Dariusz Tryniecki

Czarne dziury w teorii półklasycznej i w teoriach z uogólnionym działaniem grawitacyjnym

Black holes in semiclassical theory and in theories with generalized gravitational action

Rozprawa doktorska przygotowana
pod kierunkiem dr. hab. Jerzego Matyjaska

Lublin 2016

Panu dr. hab. Jerzemu Matyjaskowi
dziękuje za pomoc i poświęcony czas

Spis treści

Spis treści **1**

Spis rysunków **4**

1 Wprowadzenie **9**
1.1 Organizacja pracy . . . 9
1.2 Cele rozprawy doktorskiej . . . 10

2 Wstęp **13**
2.1 Czarne dziury . . . 13
2.1.1 Geneza czarnych dziur . . . 13
2.1.2 Horyzont zdarzeń, osobliwości, najprostsze czasoprzestrzenie czarnych dziur . . . 14
2.1.3 Termodynamika czarnych dziur . . . 16
2.2 Teorie z wyższymi członami krzywiznowymi . . . 20
2.2.1 Kwadratowa grawitacja . . . 20
2.2.2 Grawitacja $f(R)$ . . . 22
2.2.3 Teorie wyższego rzędu . . . 22
2.2.4 Grawitacja Lovelocka . . . 23
2.2.5 Cechy rozwiązań grawitacyjnych równań pola . . . 24
2.3 Rozwiązania czarnodziurowe w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi - przegląd 24
2.3.1 Czarne dziury w teorii kwadratowej . . . 24
2.3.2 Czarne dziury w teorii szóstego rzędu . . . 27
2.3.3 Czarne dziury w teoriach wysokiego rzędu . . . 28
2.3.4 Czarne dziury Gaussa-Bonneta . . . 32
2.3.5 Czarne dziury w teorii Lovelocka . . . 41

3 Związek kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni z teorią z wyższymi członami krzywiznowymi **47**
3.1 Wpływ kwantowego pola skalarnego na geometrię czasoprzestrzeni . . . 47
3.2 Bitensory σ, $\triangle^{1/2}$, $\triangle^{-1/2}$ oraz ich granice koincydencji . . . 49
3.3 Metody obliczania współczynników $[a_n]$ . . . 50
3.3.1 Metoda rekurencyjna jawnie kowariantna . . . 50
3.3.2 Metoda obliczania z wykorzystaniem współczynników Hadamarda . . . 52
3.3.3 Metoda obliczania poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych . . . 53
3.3.4 Metoda rekurencyjna jawnie kowariantna bezindeksowa . . . 55

4 Czarne dziury w grawitacji kwadratowej **59**
4.1 Naładowana czarna dziura w grawitacji kwadratowej . . . 59

4.2 Regularna czarna dziura w kwadratowej grawitacji sprzężonej z nieliniową elektrodynamiką . . . 67

5 Czarne dziury w teoriach wysokiego rzędu 75

5.1 Zwrotne działanie pola skalarnego na metrykę czarnych dziur . . . 75
5.1.1 Współczynniki HaMiDeW - praktyczna realizacja obliczeń . . . 75
5.1.2 Tensor energii-pędu i jego własności w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma . . . 82
5.1.3 Zwrotne działanie pola na metrykę Schwarzschilda . . . 94
5.1.4 Ekstremalna kwantowo zmodyfikowana czarna dziura Reissnera-Nordströma . . . 95
5.2 Tensor energii-pędu w czasoprzestrzeni ABGB-(AdS)dS w przypadku pól o ogólnym spinie . . . 101
5.3 Wielowymiarowa sferycznie symetryczna czarna dziura w teoriach wysokiego rzędu . . . 106

6 Metody komputerowe w kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni: szczegóły obliczeniowe 114

6.1 Współczynniki HaMiDeW - projekty programistyczne . . . 114
6.1.1 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy . . . 114
6.1.2 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy . . . 114
6.1.3 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy . . . 114
6.1.4 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy . . . 117
6.1.5 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I . . . 118
6.1.6 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I . . . 119
6.1.7 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I . . . 119
6.1.8 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II . . . 119
6.1.9 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II . . . 120
6.1.10 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II . . . 121
6.1.11 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II . . . 121

6.1.12 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy . . . 123
6.1.13 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy . . . 124
6.1.14 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy 124
6.1.15 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy . . . 124
6.1.16 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy . . . 124
6.1.17 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I 126
6.1.18 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I 127
6.1.19 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I . . . 127
6.1.20 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II 128
6.1.21 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II . . 128
6.1.22 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II 130
6.1.23 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II 130
6.1.24 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych-sposób podstawowy 131
6.1.25 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych-sposób podstawowy 134
6.1.26 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnie jawnie kowariantnej bezindeksowej 135
6.2 Efektywność obliczeń współczynników $[a_n]$ 137
6.3 Tensor energii-pędu - projekty programistyczne 139
6.3.1 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń tensora energii-pędu z wykorzystaniem jego definicji 139
6.3.2 Projekt napisany w języku Mathematica, Maple i Perl oparty na metodzie obliczania tensora energii-pędu poprzez redukcję działania efektywnego W_{ren} . 139

7 Podsumowanie **141**

8 Dodatek **145**
8.1 Formalizm Avramidiego - przykład obliczeń . . . 145
8.2 Funkcje $f_i^{(\alpha)}$ i $f_i^{(\beta)}$ . . . 145
8.3 Współczynnik $[a_5]$ . . . 146
8.4 Funkcje $C_a^{(i)b}$ oraz $D_a^{(i)b}$ . . . 154
8.5 D-wymiarowe obiekty krzywiznowe w pierwszym rzędzie przybliżenia . . . 156
8.6 Składowa $T_a^{(2)b}$ . . . 156
8.7 Przykłady kodów źródłowych . . . 165
8.7.1 Język Form . . . 165
8.7.2 Język Mathematica . . . 169
8.7.3 Język Maple . . . 174
8.7.4 Język Lisp . . . 190
8.7.5 Język Perl . . . 196
8.7.6 Język C++ (pakiet GiNaC) . . . 198
8.7.7 Język C . . . 199

Literatura **201**

Spis rysunków

1 Grupa programów, których celem jest obliczenie $\int S_t^{(0)t} dr$. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 72
2 Dwa etapy obliczeń zrenormalizowanego tensora energii-pędu: obliczenie W_{ren} i obliczenie T^{ab}. . . . 76
3 Metody, sposoby oraz języki, którymi wykonane zostały obliczenia $[a_n]$, a tym samym obliczenia przybliżonej wartości W_{ren}. Plus oznacza, że dany projekt programistyczny został wykonany w oparciu o daną metodę, sposób oraz język. . . . 77
4 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjna jawnie kowariantną - sposób podstawowy. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 77
5 Przeskalowana fluktuacja kwadratowa $\lambda\langle\phi^2\rangle$ ($\lambda = 16\pi^2 M^2$) w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma liczona na horyzoncie zdarzeń dla $mM = 2$. Oś pozioma to $q = e/M$, zakres parametru to $q \in \langle 0, 0.8\rangle$. Linia kropkowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_2$, linia kreskowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_3$, linia ciągła odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_4$. . . . 83
6 Przeskalowana fluktuacja kwadratowa $\lambda\langle\phi^2\rangle$ ($\lambda = 16\pi^2 M^2$) w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma liczona na horyzoncie zdarzeń dla $mM = 2$. Oś pozioma to $q = e/M$, zakres parametru to $q \in \langle 0.8, 1\rangle$. Linia kropkowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_2$, linia kreskowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_3$, linia ciągła odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_4$. . . . 83
7 Metody i języki, którymi zostały wykonane obliczenia T^{ab}. Plus oznacza, że daną metodą, sposobem oraz językiem został wykonany projekt programistyczny. . . . 85

8 Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń tensora energii-pędu z definicji. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: szary - Perl, czerwony - Mathematica, zielony - Maple, niebieski - Form. 86
9 Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń metodą poprzez redukcję działania efektywnego. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 90
10 Dwie przeskalowane funkcje $C_\theta{}^\theta\,(\lambda = 90\pi^2\,(8M)^4)$ zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Schwarzschilda dla $mM = 2$: górna (patrząc na punkt $x = 0$) obliczona przez Andersona, Hiscocka i Samuela, dolna obliczona z wyższą dokładnością. 92
11 Dwie przeskalowane funkcje $D_\theta{}^\theta\,(\lambda = 90\pi^2\,(8M)^4)$ zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Schwarzschilda dla $mM = 2$: dolna (patrząc na punkt $x = 0$) obliczona przez Andersona, Hiscocka i Samuela, górna obliczona z wyższą dokładnością. 92
12 Dwie przeskalowane funkcje $C_\theta{}^\theta\,(\lambda = 90\pi^2\,(8M)^4)$ zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (e=0,95M) dla $mM = 2$: linia przerywana odpowiada przybliżeniu pierwszego rzędu, linia ciągłą odpowiada wyższej dokładności obliczeń. 93
13 Dwie przeskalowane funkcje $D_\theta{}^\theta\,(\lambda = 90\pi^2\,(8M)^4)$ zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (e=0,95M) dla $mM = 2$: linia przerywana odpowiada przybliżeniu pierwszego rzędu, linia ciągłą odpowiada wyższej dokładności obliczeń. 94
14 Współczynniki $\alpha_i^{(s)}$ dla skalarnych, spinorowych i wektorowych pól masywnych. 102
15 Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego pola skalarnego w pobliżu horyzontu ultraextremalnego regularnej czarnej dziury. Krzywe od góry do dołu reprezentują odpowiednio radialną, czasową i kontową składową. $[\mu = M^6m^2/10^2]$ 104
16 Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego pola skalarnego w pobliżu horyzontu ultraextremalnego regularnej czarnej dziury. Krzywe od góry do dołu w punkcie x= 0.1 reprezentują odpowiednio radialną, czasową i kontową składową. $[\mu = M^6m^2/10^2]$ 105
17 Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego skalarnego pola kwantowego w otoczeniu centrum czarnej dziury. Tensor w centrum jest identyczny z odpowiednikiem dla geometrii de Sittera. $[\mu = M^6m^2/10^2]$ 105
18 Realizacja programistyczna obliczeń równań pola przy wykorzystaniu metody działania zredukowanego. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: niebieski - Form, szary - Perl, zielony - Maple. 108
19 Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: niebieski - Form, szary - Perl, zielony - Maple. 109

20 Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. 110
21 Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Obliczenia oparte na pakiecie GiNaC. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: fioletowy - pakiet GiNaC, szary - Perl, czerwony - Mathematica. 110
22 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. 115
23 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple. 116
24 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp. 117
25 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 118
26 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. 119
27 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 120
28 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. 121
29 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple. 122
30 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantna zmodyfikowana typu II. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp. 122
31 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 123
32 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. 125

33 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple. . . . 125
34 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp. . . . 126
35 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 127
36 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. . . . 128
37 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 129
38 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjna jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. . . . 129
39 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple. . . . 130
40 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp. . . . 131
41 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 132
42 Alternatywna metoda otrzymania rozwinięcia Taylora metryki we współrzędnych normalnych. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. . . . 133
43 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. . . . 134

44 Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną bezindeksowa. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 135
45 Maksymalny współczynnik $[a_n]$ obliczony za pomocą danej metody, sposobu oraz języka programowania. 138
46 Szczegółowa struktura programu do obliczeń pochodnej kowariantnej. Kolor czarny bloku oznacza, że program został napisany w języku C. 138
47 Program do obliczeń pochodnej kowariantnej. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form. 139
48 Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń z definicji tensora energii-pędu. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica. . . . 140
49 Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń metodą poprzez redukcję działania efektywnego. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: szary - Perl, czerwony - Mathematica, zielony - Maple. 140

1 Wprowadzenie

1.1 Organizacja pracy

Niniejsza rozprawa składa się z czterech części: **wstępu**, **części głównej**, **podsumowania** oraz **dodatku**.

Zadaniem **wstępu** jest wprowadzenie czytelnika w bogaty świat czarnych dziur w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi. W podrozdziale 2.1 w sposób zwięzły przedstawiam podstawowe informacje na temat klasycznych czarnych dziur. W podrozdziale 2.2 podaję ogólną charakterystykę klasycznej i półklasycznej grawitacji z wyższymi członami krzywiznowymi, a także omawiam typowe problemy pojawiające się w tego typu teoriach. W podrozdziale 2.3 dokonuję przeglądu literatury dotyczącej tematyki czarnych dziur w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi.

Celem **części głównej** rozprawy jest przedstawienie oryginalnych wyników uzyskanych w latach 2004-2014, z których część nie została jeszcze opublikowana. Wszystkie oryginalne rezultaty zostały na potrzeby niniejszej pracy przeliczone raz jeszcze, czesto z wykorzystaniem innych strategii i technik obliczeniowych. Pozwoliło to nadać przedstawionemu materiałowi bardziej jednolity charakter. Rozdział 3 zawiera podstawy teoretyczne oraz metody stosowane w oryginalnej części pracy. Rozdziały 4 i 5 przedstawiają wyniki, które są zawarte w 8 artykułach, których jestem współautorem. Rozdział 6 przedstawia opis projektów komputerowych wykorzystywanych do otrzymywania wyników z oryginalnej części rozprawy oraz analizę szybkości języków programowania i metod obliczeniowych.

Podsumowanie zawiera wnioski płynące z rozprawy oraz krótką dyskusję możliwych uzupełnień i uogólnień prezentowanych tutaj rezultatów.

W **dodatku** znajdują się informacje szczegółowe, które z różnych przyczyn nie mogły zostać włączone do części głównej rozprawy. Zawarte tam informacje zawierają dodatkowe rozważania teoretyczne, wyniki oraz przykłady kodu źródłowego programów.

Spis publikacji na których oparta jest niniejsza rozprawa

1. J. Matyjasek i D. Tryniecki, *Charged black holes in quadratic gravity*, Phys. Rev. **D69,** 124016 (2004).

2. W. Berej, J. Matyjasek, D. Tryniecki i M. Woronowicz, *Regular black holes in quadratic gravity*, Gen. Rel. Grav. **38,** 885 (2006).

3. J. Matyjasek, M. Telecka i D. Tryniecki, *Higher dimensional black holes with a generalized gravitational action,* Phys. Rev. **D73**, 124016 (2006).

4. J. Matyjasek, D. Tryniecki i M. Klimek, *Regular black holes in an asymptotically de Sitter universe,* Mod. Phys. Lett. **A23**, 3377 (2009).

5. J. Matyjasek i D. Tryniecki, *Next-to-leading term of the renormalized stress-energy tensor of the quantized massive scalar field in Schwarzschild spacetime. The back reaction*, Phys. Rev. **D79,** 084017 (2009).

6. J. Matyjasek i D. Tryniecki, $ADS_2 \times S^2$ *geometries and the extreme quantum-corrected black holes,* Mod. Phys. Lett. **A24**, 2517 (2009).

7. J. Matyjasek, D. Tryniecki i K. Zwierzchowska, *Vacuum polarization of the quantized massive scalar field in Reissner-Nordstrom spacetime,* Phys. Rev. **D81**, 124047 (2010).

8. J. Matyjasek, P. Sadurski i D.Tryniecki, Inside the degenerate horizons of regular black holes, Phys. Rev. D87, 124025 (2013)

1.2 Cele rozprawy doktorskiej

Teorie z wyższymi członami krzywiznowymi pojawiają się dosyć powszechnie w teorii grawitacji: jako alternatywa dla ciemnej energii, jako człon źródłowy półklasycznych równań Einsteina, jako niskoenergetyczne przybliżenie teorii strun. Stanowią one naturalne uogólnienie teorii Einsteina prowadzące do teorii Lanczosa-Lovelocka i są niezbędne w procedurze renormalizacji pól kwantowych. W niniejszej pracy zamierzam zająć się kilkoma interesującymi mnie problemami, głównie z obszaru fizyki czarnych dziur, które wiąże obecność wyższych członów krzywiznowych w równaniach pola grawitacyjnego. Problemami, którymi zamierzam się zająć i pytaniami, na które zamierzam odpowiedzieć są:

1. Znalezienie przybliżonego rozwiązania równań kwadratowej grawitacji, opisującego naładowaną elektrycznie, statyczną i sferycznie symetryczną czarną dziurę oraz zbadanie jej własności. Podobny problem był dyskutowany w pracy [1], jednak nasze podejście jest zdecydowanie prostsze, a uzyskane rezultaty różnią się w sposób istotny od rezutatów otrzymanych wcześniej.

2. Znalezienie rozwiązania równań kwadratowej grawitacji sprzężonych z elektrodynamiką nieliniową, opisujacego klasę regularnych czarnych dziur. W przypadku równań Einsteina takie rozwiązanie zaostało skonstruowane w pracy [2], a nstępnie krytycznie zreinterpretowane przez Bronnikova w pracach [3, 4]. Celem jaki stawiam przed sobą w tej części rozprawy jest próba znalezienia regularnych rozwiązań tego typu w teoriach kwadratowych.

3. Skonstruowanie jednopętlowego działania efektywnego skwantowanego pola skalarnego w granicy dużych mas z dokładnością do wyrazów rzędu $1/m^4$, a następnie zbadanie konsekwencji fizycznych, jakie wynikają z przyjęcia takiej dokładności. W szczególności zbadanie wpływu pół kwantowych na geometrię czarnej dziury Schwarzschilda i Reissnera-Nordstroma. Należy przy tym zauważyć, że dotychczas zrenormalizowany tensor energii-pędu skwantowanego pola analizowany były tylko przy wykorzystaniu działania efektywnego w pierwszym rzędzie przybliżenia, tzn. z dokładnością do członów rzędu $1/m^2$. Obliczenia te należą do klasy obliczeń wielkoskalowych.

4. Określenie typu kwantowo-skorygowanej geometrii bezpośredniego sąsiedztwa ekstremalnej czarnej dziury, przy uwzględnieniu wyższej dokładności obliczeń (z dokładnością do członu $1/m^4$) w jednopętlowym działaniu efektywnym. Klasycznie, geometria najbliższego sąsiedztwa horyzontu zdarzeń ekstremalnej czarnej dziury Reissnera-Nordströma jest geometrią Bertottiego-Robinsona. Włączenie efektów polaryzacji próżni w pierwszym rzędzie przybliżenia zaburza geometrię czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma, jednak w otoczeniu horyzontu zdarzeń ekstremalnej czarnej dziury geometria jest typu Bertottiego-Robinsona. Powstaje pytanie, jaka jest geometria otoczenia horyzontu zdarzeń ekstremalnej czarnej dziury w wyższej dokładności obliczeń. Rozważania zostały ograniczone do pola skalarnego. Problem ten jest związany z poszukiwaniem samozgodnych rozwiązań półklasycznych równiań Eisteina w klasie czasoprzestrzeni z maksymalnie symetrycznymi podprzestrzeniami.

5. Analiza zachowania tensora energii-pędu dla pól o dowolnym spinie (pole skalarne, spinorowe i wektorowe) w czasoprzestrzni ABGB z niezerową stałą kosmologiczną wewnątrz czarnej dziury. W szczególności zbadanie zachowania tensora-energii pędu w otoczeniu centrum symetrii czarnej dziury (regularność), otoczeniu horyzontu ekstremalnego z uwzględnieniem analizy typu geometrii.

6. Poszukiwanie rozwiązań czarnodziurowych teorii z uogólnionym działaniem grawitacyjnym w D-wymiarach i w teorii Lanczosa - Lovelocka (21).

Zrealizowanie wymienionych powyżej zadań zależy w sposób krytyczny od zrealizowania zadań obliczeniowych, na które składają się:

1. Poprawne obliczenie współczynnika $[a_4]$ dla pola skalarnego przy wykorzystaniu czterech metod:

   (a) metody rekurencyjnej (jawnie kowariantnej) zaproponowanej DeWitta [5],

(b) poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych,

(c) metody rekurencyjnej (jawnie kowariantnej i bezindeksowej) zaproponowanej przez Avramidiego [6],

(d) metody wykorzystującej współczynniki Hadamarda.

Aby obliczyć działanie efektywne w przybliżeniu dużych mas pola, należy znać współczynniki $[a_n]$. W czterech wymiarach działanie efektywne W_{ren} konstruowane z dokładnością do członu $1/m^4$ wymaga znajomości współczynników $[a_3]$ i $[a_4]$. Współczynnik $[a_4]$ był obliczony różnymi metodami [7, 8, 9], jednak przedstawione wyniki nie są identyczne co prowadzi do wniosku, że zawierają one techniczne lub typograficzne błędy.

2. Stworzenie metodologii obliczeń opartej na komputerowej algebrze symbolicznej służącej do:

   (a) rozwiązywania równań prowadzących do znalezienia biskalarów i ich pochodnych kowariantnych w granicy koincydencji (przykładem jest obliczanie współczynników $[a_n]$),

   (b) obliczania jawnej postaci tensora energii-pędu na podstawie działania składającego się z dowolnych obiektów krzywiznowych,

   (c) upraszczania tensorów przy wykorzystaniu własności ich symetrii,

   (d) komunikacji miedzy językami programowania polegającej na translacji wyniku fizycznego ze składni danego języka do innego. Translacja ma kluczowe znaczenie w rozwiązywaniu problemów poruszanych w niniejszej pracy.

3. Rozwiązanie problemów poruszanych w niniejszej pracy za pomocą szerokiego wachlarza strategii programistycznych oraz języków programowania (Mathematica, Maple, Form, Perl, Lisp, C++ (pakiet GiNaC) oraz C). Założenie to stwarza możliwość przetestowania poprawności wyników obliczeń o dużej komplikacji, oraz oceny przydatności poszczególnych języków programowania do obliczeń wykonywanych na potrzebę niniejszej rozprawy.

2 Wstęp

2.1 Czarne dziury

2.1.1 Geneza czarnych dziur

Obszar w czasoprzestrzeni, z którego w wyniku działania pola grawitacyjnego niemożliwa jest ucieczka światła, nazywamy czarną dziurą. Brzeg tego obszaru to powierzchnia czarnej dziury, zwana także horyzontem zdarzeń. Żaden fizyczny obiekt nie może wydostać się z czarnej dziury, choć nie zaprzecza to oczywiście możliwości dostania się do jej wnętrza. Choć termin „czarna dziura" został po raz pierwszy wprowadzony dopiero w 1967 roku, to na możliwości istnienia takich obiektów wskazywano znacznie wcześniej. Istotnie, już w roku 1784 John Mitchell, a następnie w roku 1795 Pierre Laplace zauważyli, że konsekwencją dwóch teorii Newtona (teorii grawitacji i korpuskularnej teorii światła) jest możliwość powstania obiektów o tak dużej masie i tak małych rozmiarach, że nawet światło nie będzie mogło się z nich wydostać.

Problematyka czarnych dziur pojawiła się w Ogólnej Teorii Względności bardzo wcześnie, bo zaledwie kilka tygodni po jej ostatecznym sformułowaniu przez Einsteina i do tego w bardzo naturalny sposób. W grudniu 1915 roku Karl Schwarzchild jako pierwszy otrzymał ścisłe statyczne rozwiązanie próżniowych równań Einsteina w przypadku sferycznie-symetrycznym [10]. W rozwiązaniu tym pojawia się osobliwość zarówno w centrum symetrii ($r = 0$), jak i na powierzchni o promieniu $r_g = 2M$ (gdzie M to masa ciała, r_g to tzw. promień grawitacyjny, używane są jednostki w których $c = G = 1$). Wkrótce też pojawiły się i inne interesujące rozwiązania, takie jak rozwiązanie de Sittera, Reissnera-Nordstroma i Kottlera i wszystkie one posiadały zagadkowe własności. Minęło kilkadziesiąt lat zanim dogłębnie zrozumiano strukturę takich czasoprzestrzeni i otrzymano pełne rozwiązanie tego problemu [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Sukces ten zawdzięczano jednak również i pracom wcześniejszym, z których warto wymienić [18, 19, 20, 21, 22], a także prac, autorzy których starali się zrozumieć fizyką obiektów o bardzo duzej gęstości materii. Badaniem obiektów zwartych zajmowali się: Chandrasekhar (białe karły) [23], Landau [24], Baade i Zwicky [25] oraz Oppenheimer i Volkoff [26] (gwiazdy neutronowe). Ich badania wykazały, że gwiazdy neutronowe mogą mieć wielkość nawet kilku promieni grawitacyjnych. Z kolei grawitacyjne zapadanie sferycznie-symetrycznego obłoku pyłu, które prowadzi do powstania czarnej dziury zostało po raz pierwszy przeanalizowane przez Oppenheimera i Snydera w 1939 roku [27]. Kolejny okres rozwoju teorii czarnych dziur przypada na połowę lat sześćdziesiątych, wkrótce po opublikowaniu przez Synge'a i Kruskala prac poświęconych maksymalnemu analitycznemu rozszerzeniu rozwiązania Schwarzsilda oraz pracy Kerra, w której podane jest rozwiązanie opisujące obracającą się czarną dziurę [28]. Od tamtego czasu datuje się burzliwy rozwój fizyki czarnych dziur, który nieprzerwanie trwa do dnia dzisiejszego.

Równie istotne są kierunki badań mające na celu doświadczalne potwierdzenie istnienia czarnych dziur. Ponieważ w ramach teorii klasycznej czarne dziury nie emitują same z siebie żadnego promieniowania, a promieniowanie Hawkinga (poza superlekkimi czarnymi dziurami) jest zaniedbywalne, ich detekcja możliwa jest jedynie pośrednio. I tak przewidywano pojawienie się bardzo silnego promieniowania X w wyniku akrecji materii do czarnej dziury [29, 30, 31]. Okazało się, że obserwowanych

jest kilka obiektów, które potencjalnie mogą okazać się czarną dziurą. Obecnie wiadomo, że w naszej galaktyce istnieją czarne dziury w układach podwójnych [32]. Są też bardzo silne podstawy do twierdzenia, że znajdują się one w centrach galaktyk [33, 34, 35], [36, 37]). Nasza Galaktyka nie jest wyjątkiem, obserwacje wskazują, że w jej centrum rezyduje supermasywna czarna dziura, utożsamiana z radioźródłem Sagitarius A1*. Inny kierunek poszukiwań czarnych dziur dotyczy badania fal grawitacyjnych (projekty LIGO, LISA). Przypuszcza się, że zderzenie czarnych dziur lub czarnej dziury z gwiazdą neutronową może być źródłem fal grawitacyjnych o takiej energii, iż możliwe będzie ich zarejestrowanie na przez ziemskie detektory.

2.1.2 Horyzont zdarzeń, osobliwości, najprostsze czasoprzestrzenie czarnych dziur

Jeśli w czasoprzestrzeni znajduje się czarna dziura, dzieli ją ona na dwa obszary: wnętrze oraz obszar zewnętrzny. Istotą definicji czarnej dziury jest to, że z obszaru wewnętrznego nie można przesłać żadnej informacji na zewnątrz. Przedstawiona definicja jest nieprecyzyjna. Aby dokładnie zdefiniować pojęcie czarnej dziury i horyzontu zdarzeń, należy posłużyć się językiem matematyki. Czarna dziura w asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni jest obszarem, z którego żaden przyczynowy sygnał nie może dotrzeć do J^+ (ang. „future null infinity") [38]. Każdy przyczynowy sygnał porusza się wzdłuż krzywej czasowej lub zerowej. Aby zdefiniować horyzont zdarzeń, należy wprowadzić nowe pojęcia: przyczynowa przyszłość (ang. „causal future") punktów Q, oznaczona jako $J^+(Q)$ oraz przyczynowa przeszłości (ang. „causal past") punktów Q oznaczoną jako $J^-(Q)$. Przyczynową przyszłością $J^+(Q)$ nazywamy zbiór zdarzeń P, które można połączyć przyczynową krzywą (ang. „causal curve") z punktem Q. Krzywa ta jest skierowana od punktu Q do P w kierunku przyszłości. Definicja przyczynowej przeszłość punktu Q oznaczona jako $J^-(Q)$ jest podobna, jednak krzywa jest skierowana od punktu P do Q w kierunku przyszłości. Horyzont zdarzeń definiuje się jako brzeg zbioru $J^-(P^+)$ i oznacza $\dot{J}^-(P^+)$ lub H^+. Wnętrzem czarnej dziury B nazywamy wszystkie punkty p, które nie należą do $J^-(P^+)$, czyli $B = M - J^-(P^+)$, gdzie M oznacza całą czasoprzestrzeń.

Czasoprzestrzeń może zawierać wiele czarnych dziur. Horyzont zdarzeń $J^-(P^+)$ jest wtedy sumą horyzontów każdej z nich. Rozważmy powierzchnię Cauchyego $\Sigma(\tau)$, czyli powierzchnię przestrzenną określającą ewolucję poprzez warunki początkowe. W dowolnej chwili τ zawiera ona zbiór dwuwymiarowych powierzchni $\partial S_i(\tau)$,$(i = 1, ..., n)$, których każdy element jest traktowany jako brzeg czarnej dziury istniejącej w danym czasie τ. Część przestrzeni $\Sigma(\tau)$ ograniczona przez $\partial S_i(\tau)$ jest nazywana czarną dziurą S_i w danej chwili τ.

W naturalny sposób nasuwa się pytanie, jakiego typu powierzchnią jest powierzchnia horyzontu zdarzeń: czy jest przestrzenna, czasowa, czy może zerowa. Odpowiedzi na to pytanie udziela następujące rozumowanie: niech pewien punkt p znajduje się na powierzchni horyzontu zdarzeń i niech w pewnym sąsiedztwie tego punktu horyzont będzie typu czasowego. Po emisji światła z punktu p formuje się stożek świetlny skierowany w kierunku przyszłości. Ponieważ horyzont jest czasowy, dzieli on stożek na dwie części. Promienie wychodzą wówczas z czarnej dziury, ale swój początek mają w jej wnętrzu. Okazuje się zatem, że z wnętrza czarnej dziury można przesłać informację na zewnątrz, co jest sprzeczne z definicją. Analogiczna sprzeczność pojawia się również, gdy horyzont

będzie przestrzenny. Z powyższej analizy wynika więc, że horyzont jest zerową powierzchnią. Jednym z matematyków, który zajmował się opisem horyzontu zdarzeń, był Roger Penrose. Dowiódł on między innymi, że horyzont zdarzeń jest uformowany z zerowych geodezyjnych (tzw. generatorów), które nie przecinają się w przyszłości. Generatory nigdy nie opuszczają horyzontu zdarzeń H^+ w przyszłości oraz nigdy nie przecinają się w przyszłości. Konsekwencją wyników Penrose'a jest to, że czarna dziura nie może zniknąć, ani też dzielić się na dwie lub więcej czarnych dziur [39].

Aby określić brzeg czarnej dziury H^+ należy znać całą historię danego wszechświata, w którym się ona znajduje. Przypuśćmy, że w danej czasoprzestrzeni w danej chwili znajduje się czarna dziura o masie M. Rodzi się pytanie czy horyzont zdarzeń ma promień $r_{g_1} = 2M$. Otóż, bez znajomości dalszej historii, nie można tego stwierdzić. Jeśli po pewnym czasie w czarnej dziurze znajdzie się ciało o masie ΔM, promień horyzontu zdarzeń wzrośnie $r_{g_2} > r_{g_1}$, a zerowe geodezyjne, które przechodzą przez powierzchnię r_{g_1} znajdą się wewnątrz czarnej dziury i skończą swój bieg w osobliwości $r = 0$. Te geodezyjne nie są zatem brzegiem czarnej dziury. Nie można powiedzieć więc, że r_{g_1} należał do H^+. Bardziej jaskrawy przykład dotyczy materii, która zapada się grawitacyjnie. W procesie tym w pewnym punkcie o promieniu zerowym powstaje powierzchnia H^+. W miarę upływu czasu promień horyzontu wzrasta do r_1. Jeśli przed zapadnięciem się poniżej promienia grawitacyjnego gwiazda eksploduje, nie powstanie czarna dziura i nie można powiedzieć, że istniał kiedykolwiek promień czarnej dziury r_1 [38].

Wkrótce po sformułowaniu Ogólnej Teorii Względności przez Einsteina znaleziono rozwiązania równań Einsteina: Schwarzschilda i kosmologiczny model Friedmanna. Oba te rozwiązania posiadają osobliwości w tym sensie, że krzywizna i gęstości materii są nieskończone w pewnym punkcie czasoprzestrzeni. Rozwiązanie Schwarzschilda ma osobliwość w $r = 0$, natomiast model Friedmanna w czasie $t = 0$, gdzie cała materia jest skondensowana w zerowej objętości. W początkowym okresie fizyki czarnych dziur panował pogląd, że osobliwości pojawiają się w wyniku narzucenia na czasoprzestrzeń symetrii. Rozwiązanie Schwarzchilda jest osobliwe gdy $r = 2M$ oraz $r = 0$. Osobliwość w $r = 2M$ to osobliwość pozorna, ponieważ można ją usunąć przechodząc do nowych współrzędnych. Punkt $r = 0$ jest natomiast osobliwością rzeczywistą (ponieważ np. $R^{abcd}R_{abcd} \to \infty$) i nie można jej usunąć z pomocą żadnej transformacją współrzędnych. Czasoprzestrzeń Schwarzschilda jest również osobliwa w tym sensie, że przyczynowe geodezyjne skierowane w przyszłość mają swój koniec w punkcie osobliwym i osiągają ten punkt w skończonym czasie własnym. O krzywych takich mówi się, że są geodezyjnie niekompletne [40, 39, 41]. Istnienie osobliwości tam, gdzie skalary krzywiznowe oraz gęstości są nieskończone, wskazuje na prawdziwą osobliwość czasoprzestrzeni oraz załamanie w tych punktach znanych nam praw fizyki.

Roger Penrose oraz Stephen Hawking badali problem powstawania osobliwości dla ogólnych typów czasoprzestrzeni. Twierdzenia o osobliwościach (ang: „singularity theorem") orzekają, że przy założeniu pewnych warunków (materia spełnia fizycznie umotywowane warunki energetyczne, w czasoprzestrzeni nie są naruszone zasady przyczynowości oraz w pewnym obszarze występuje silne pole grawitacyjne umożliwiające pułapkowanie materii) w czasoprzestrzeni zawsze powstanie osobliwość [39].

Najprostszym przykładem czarnej dziury jest czarna dziura Schwarzschilda opisana metryką

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{1}$$

Jak już wspomnielismy wcześniej, rozwiązanie to zostało znalezione przez Karla Schwarzschilda i opisuje geoemtrię na zewnątrz sferycznie symetrycznego ciała o masie M [10]. Charakterystyczną cechą tej czasoprzestrzeni jest jej osobliwy charakter gdy $r \to 2M$. Tradycyjnie promień $r = 2M$ nazywmy się promieniem Schwarzschilda lub promieniem grawitacyjnym i określa on miejsce geometryczne punktów, które nazywamy horyzontem zdarzeń. Należy przy tym zauważyć, że osobliwość przy $r = 2M$ jest jedynie osobliwością związaną z niefortunnym wyborem współrzędnych. Istotnie, Kruskal i Szekeres w 1960 roku wprowadzili nowe współrzędne: U, V, które usunęły tą osobliwość [14, 15]. Element liniowy Kruskala-Szekeresa ma postać

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dU dV + r^2 d\Omega^2 \tag{2}$$

i jak widać jest on regularny w $r = 2M$. W punkcie $r = 0$ znajduje się prawdziwa osobliwość, której nie można usunąć przy pomocy żadnej transformacji współrzędnych.

Oczywiście czarna dziura Schwarzschilda nie wyczerpuje listy interesujących rozwiązań tego typu. Naładowaną elektrycznie czarną dziurę Reissnera-Nordströma opisuje sferycznie symetryczny element liniowy

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{3}$$

będący rozwiązaniem równań Einsteina-Maxwella, gdzie M to jak poprzenio masa czarnej dziury a e to jej ładunek. Charakterystyczną cechą tej czasoprzestrzeni jest to, równaie $gtt = 0$ ma w ogólności dwa rozwiązania $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$. Analogicznie jak w przypadku metryki Schwarzschilda, osobliwości w r_+ i r_- można usunąć, przechodząc do współrzędnych typu Kruskala. Należy jednak zauważyć, że tylko $r = 0$ jest osobliwością prawdziwą. Powierzchnia $r_+ = M + \sqrt{M^2 - e^2}$ jest horyzontem zdarzeń, natomiast $r_- = M - \sqrt{M^2 - e^2}$ jest horyzontem wewnętrznym. Zarówno horyzont zdarzeń, jak i horyzont wewnętrzny może w ogóle się nie pojawić (tzw. „naga osobliwość"), jeśli ładunek i masa spełniają warunek $e^2 > M^2$. W niniejszej pracy będę respektować konsekwencje hipotezy kosmicznej cenzury, zgodnie z którą osobliwości czarnych dziur są zawsze ukryte dla obserwatora zewnętrznego pod horyzontem zdarzeń.

2.1.3 Termodynamika czarnych dziur

Pierwszym, który zwrócił uwagę na problemy jakie stwarzają czarne dziury w kontekście procesów termodynamicznych był John Wheeler. Z jego rozważań wynikało, że czarne dziury muszą posiadać entropię, w przeciwnym bowiem wypadku nastąpi naruszenie drugiej zasady termodynamiki. W latach siedemdziesiątych Bekenstein wykazał, że wielkością, która ma własności podobne do entropii jest powierzchnia czarnej dziury A [42]. Ukoronowaniem poszukiwań analogii pomiędzy termodynamiką a

fizyką czarnych dziur jest sformułowanie czterech praw termodynamiki czarnych dziur [43]. **Zerowe prawo** - grawitacja powierzchniowa stacjonarnej czarnej dziury jest stała na horyzoncie zdarzeń. **Pierwsze prawo** - różnicę mas pomiędzy dwiema stacjonarnymi czarnymi dziurami opisuje relacja

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega^H dJ + \Phi^H de, \tag{4}$$

gdzie dM to różnica mass, κ - grawitacja powierzchniowa, która wiąże się z temperaturą Hawkinga relacją $T_H = \kappa/2\pi$, dA - różnica powierzchni horyzontów zdarzeń, Ω^H - prędkość kątowa czarnej dziury, dJ - różnica momentów pędu, Φ^H - potencjał elektryczny czarnej dziury, de - różnica ładunków dwóch czarnych dziur. **Drugie prawo** - powierzchnia horyzontu zdarzeń nie może maleć. **Trzecie prawo** - żaden dowolny proces fizyczny nie może doprowadzić do tego, że grawitacja powierzchniowa zmaleje do zera.

W najprostszych przypadkach czarnych dziur entropia wiąże się z powierzchnią horyzontu zdarzeń A prostą zależnością $A/4$, jednak w ogólności, na przykład dla tzw. brudnych czarnych dziur[1] (ang. „dirty black holes") relacja ta nie jest spełniona. Aby obliczyć entropię można posłużyć się różnymi metodami, z których wymienię tutaj tylko trzy.

Tradycyjna metoda (ang. „Lorentzian techniques") wymaga znajomości temperatury Hawkinga T_H. Dla statycznej sferycznie symetrycznej i asymptotycznie płaskiej czasoprzestrzeni opisanej metryką

$$ds^2 = -e^{2\psi(r)} \left(1 - \frac{2m\left(r\right)}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m\left(r\right)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{5}$$

obliczenia T_H prowadzą do

$$T_H = \frac{1}{4\pi r_H} e^{-\psi(r_H)/2} \left[1 - 2m'\left(r_H\right)\right], \tag{6}$$

gdzie r_H oznacza promień horyzontu zdarzeń [44]. Końcowym etapem jest obliczenie entropii poprzez scałkowanie $dM = T_H dS$.

Drugą metodą obliczania entropii jest metoda Euklidesowa. Wymaga ona, aby w czasoprzestrzeni wykonać obrót Wicka $t \to it$ [45]. Obrót Wicka zmienia sygnaturę metryki na Euklidesową $(+,+,+,+)$. Euklidesowy Lagranżjan i sumę statystyczną łączy relacja $Z = \int \mathcal{D}\left(g, \Phi\right) \exp\left(-I_E\left(g, \Phi\right)/\hbar\right)$, gdzie Φ oznacza dowolne pola [45]. Energia swobodna jest powiązana z sumą statystyczną relacją $F = -kT \ln Z$, a ta z kolei z łączy się się z entropią poprzez związek $F = U - TS$. Wykorzystując powyższe zależności można pokazać [46, 47], że dla ogólnej stacjonarnej i osiowosymetrycznej czarnej dziury entropia ma postać

$$S = \frac{A_H}{4} + \int\limits_H \mathcal{S}_{surf} \sqrt{{}_{(2)}g}\, d^2x, \tag{7}$$

gdzie całkowanie przebiega po części przestrzennej horyzontu zdarzeń H, a wielkości ${}_{(2)}g$ i $\mathcal{S}_{surf}$ to odpowiednio: wyznacznik z metryki indukowanej na horyzoncie zdarzeń oraz gęstość powierzchniowa

[1] „brudne" czarne dziury to takie, które pojawiają się w wyniku wprowadzenia do teorii dodatkowych pól klasycznych lub kwantowych, a także czarne dziury w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi.

entropii na horyzoncie zdarzeń. Jawna postać gęstości $\mathcal{S}_{surf}$ wymaga specyfikacji Lagranżjanu. Dla dalszych rozważań interesujący jest Lagranżjan typu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R_{abcd})$ obejmujący teorię z wyższymi członami krzywiznowymi pozbawioną pochodnych tensora Riemanna. W takim przypadku entropia przyjmuje postać

$$S = \frac{A_H}{4} + 4\pi \int_H J^{abcd} g^{\perp}_{ac} g^{\perp}_{bd} \sqrt{{}^{(2)}g}\, d^2x, \tag{8}$$

gdzie $J^{ab}{}_{cd} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{ab}{}^{cd}}$, natomiast $g^{\perp}_{ab}$ to rzut na dwuwymiarową podprzestrzeń prostopadłą do horyzontu zdarzeń. Powyższe wyrażenie przyjmuje szczególnie prostą postać dla przypadku kwadratowej grawitacji $\mathcal{L}_{kwadrat} = \frac{1}{16\pi}\left(\alpha R^2 + \beta R_{ab}R^{ab}\right)$, dla której po wykorzystaniu jawnej postaci metryki sferycznie symetrycznej można otrzymać

$$S = \pi r_+^2 + 2\pi r_+^2 \left(\alpha R + \frac{1}{2}\beta\left\{R^t_t + R^r_r\right\}\right)\Big|_{r_+}, \tag{9}$$

gdzie r_+ oznacza promień horyzontu zdarzeń. Należy zwrócić uwagę, że w obliczeniach nadal niezbędna jest znajomość rozwiązań uogólnionych równań Einsteina kwadratowej grawitacji, a także położenia horyzontu zdarzeń r_+.

Kolejna z metod obliczania entropii, zaproponowana przez Walda, wiąże konstrukcję entropii czarnych dziur z twierdzeniem Noether [38, 48, 49, 50, 51]. Mając pewną gęstość Lagranżjanu L, w skład której wchodzą pola (włączając metrykę) oznaczone wspólnie ψ, można dokonać wariacji względem tych pól $\delta\psi$, otrzymując

$$\delta L = \mathcal{E} \cdot \delta\psi + \nabla_a \theta^a(\delta\psi), \tag{10}$$

gdzie $\mathcal{E} = 0$ to równania pola, kropka oznacza sumowanie po wszystkich polach i kontrakcję indeksów tensorowych, θ^a jest prądem Noether. Rozważając wariacje pól $\delta\psi = \mathcal{L}_\xi\psi$ generowaną przez dyfeomorfizm $x^a \to x^a + \xi^a$ można otrzymać prąd Noether $J(\xi)$

$$J^a(\xi) = \theta^a(\mathcal{L}_\xi\psi) - \xi^a L, \tag{11}$$

którego dywergencja zwynosi zero $\nabla_a J^a(\xi) = 0$, jeśli $\mathcal{E} = 0$. Prąd ten można zapisać w postaci $J^a(\xi) = \nabla_b Q^{ab}(\xi)$, gdzie $Q^{ab}(\xi)$ nazywa się potencjałem Noether. Całka

$$Q(\Sigma, \xi) = \int_\Sigma Q^{ab}(\xi)\, d\sigma_{ab} \tag{12}$$

liczona po dwuwymiarowej powierzchni Σ zwana jest ładunkiem Noether. Wybierając powierzchnię Σ jako powierzchnię będącą horyzontem zdarzeń H oraz pole wektorowe ξ jako wektor Killinga χ dla którego H jest horyzontem Killinga, Wald powiązał ładunek Noether $Q(\Sigma, \xi)$ z entropią czarnej dziury S [50, 51], otrzymując związek

$$S = \frac{2\pi}{\kappa} Q(H, \xi). \tag{13}$$

Powyższa definicja entropii pozwala sprowadzić entropię do postaci (8) [51].

2.2 Teorie z wyższymi członami krzywiznowymi

Zgodnie z obecnym rozumieniem klasycznych równań Einsteina, ich zakres stosowalności ogranicza się czasoprzestrzeni, których krzywizna jest znacząco mniejsza niż skala Plancka. Przypuszcza się zatem, że równania te powinny być rozumiane jako pierwsze przybliżenie bardziej fundamentalnej teorii. I chociaż nie jest obecnie jasne, w jaki sposób można taką fundamentalną teorię skonstruować, to możliwe jest postulowanie jej niskoenergetycznego przybliżenia. Przybliżenie to modyfikuje klasyczną teorię Einsteina poprzez włączenie do niej członów krzywiznowych wyższego rzędu[2]. Grawitacyjna część całkowitego działania może być wtedy zapisana w postaci

$$I_g = I_0 + I_1 + I_2 + ..., \tag{14}$$

gdzie I_0 to działanie Einsteina, natomiast I_k (dla $k \geq 1$) to człony zawierające obiekty krzywiznowe rzędu $2k+2$. Z teorią z wyższymi członami krzywiznowymi mamy więc do czynienia wtedy, gdy w całkowitym działaniu grawitacyjnym I_g oprócz I_0 pojawiają się dodatkowe człony I_k . Poniżej dokonamy krótkiego przeglądu teorii, w których obecne są wyrazy takiego typu, a także teorii pokrewnych. Oczywiście, mój wybór jest dalece selektywny, a zaprezentowane tutaj uogólnienia i modyfikacje równań Einsteina stanowią jedynie niewielki ułamek teorii pojawiających się w literaturze przedmiotu.

2.2.1 Kwadratowa grawitacja

Najprostszym przykładem teorii z wyższymi członami krzywiznowymi jest kwadratowa grawitacja opisana działaniem

$$I_g = I_0 + I_1 = \frac{1}{16\pi} \int d^4x\sqrt{g} \left(R + \alpha R^2 + \beta R_{ab}R^{ab} + \gamma R_{abcd}R^{abcd} \right), \tag{15}$$

gdzie do klasycznego działania Einsteina dodano trzy człony czwartego rzędu. Kwadratowa grawitacja jest jednym z najważniejszych przykładów teorii tego typu. Pojawia się ona w teorii zarówno w kontekście klasycznym, jak i kwantowym. Na gruncie klasycznym została wprowadzona w 1918 roku przez Hermanna Weyla przy próbach unifikacji pól elektromagnetycznych i grawitacyjnych [52]. Kwadratowa grawitacja Weyla jest nietypowa ponieważ nie dopuszcza pojawienia się w działaniu członu klasycznego $\int d^4x\sqrt{g}R$. Pociąga to za sobą niepożądane z punktu widzenia fizyki cechy takiej teorii. Przykładem obrazującym te cechy może być najprostsza teoria tego typu sprzężona z materią $\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(R^2 + \mathcal{L}_m\right)$. Analiza rozwiązań równań pola na zewnątrz materii ($T_{ab} = 0$) ujawnia, że czasoprzetrzeń nie jest asymptotycznie płaska ale bardzo silnie zakrzywiona [53]. Zachowania takiego nie posiada jednak kwadratowa grawitacja opisana działaniem (15). Dokonując analizy równań kwadratowej grawitacji w granicy słabego pola dla cząstki punktowej można otrzymać rozwiązanie

$$\phi = -\frac{GM}{r}\left(1 + \frac{1}{3}e^{-m_0 r} - \frac{4}{3}e^{-m_2 r}\right), \tag{16}$$

[2] Dany obiekt krzywiznowy ma wymiar $1/m^n$, liczbę n nazywamy rzędem, np. R jest rzędu 2, ponieważ $[R] = 1/m^2$.

gdzie $m_2 = \sqrt{-\beta}$, $m_0 = [2(3\alpha+\beta)]^{-1/2}$, $g_{tt} = 1 + 2\phi$ [54]. Aby otrzymać akceptowalne z punktu widzenia fizyki zachowanie pola grawitacyjnego, należy na stałe m_0 i m_2 narzucić warunki $m_2 \geq 0$ oraz $m_0 \geq 0$. Warunki te ograniczają wybór stałych α i β poprzez nierówności $3\alpha + \beta \geq 0$, $\beta \leq 0$. Przy tych założeniach funkcja ϕ jest ograniczona nawet w punkcie $r \to 0$. Analogiczne warunki na stałe sprzężenia istnieją również dla teorii wyższych rzędów [55].

W 1998 roku, badając jasność supernowej typu Ia, astronomowie doszli do wniosku, że tempo ekspansji wszechświata rośnie [56,57]. Można przypuszczać, że źródłem tego przyśpieszenia jest tzw. „ciemna energia" stanowiąca ok. 70% energii wszechświata. Alternatywą pozwalającą uniknąć wprowadzania „ciemnej energii", jest zmodyfikowanie samej teorii grawitacji. Jedną z takich teorii, angażujących wyższe człony krzywiznowe, jest model ciemnej energii oparty na grawitacji Gaussa-Bonneta sprzężonej z polem skalarnym [58]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}F(\phi)R - \frac{1}{2}\omega(\phi)(\nabla\phi)^2 - V(\phi) - f(\phi)G\right\} + S_m, \tag{17}$$

gdzie $F(\phi)$, $\omega(\phi)$, $V(\phi)$, $f(\phi)$ to funkcje ϕ, natomiast $G = R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\sigma}R^{\alpha\beta\gamma\sigma}$ to człon Gaussa-Bonneta. Powyższe działanie jest inspirowane niskoenergetycznym działaniem efektywnym teorii strun [59]. Teoria tego typu pozwala również uniknąć problemu kosmologicznej osobliwości, która pojawia się w metryce Friedmanna-Lemaître'a-Robertsona-Walkera, gdy czynnik skali $a(t)$ dąży do zera. Dla szczególnego wyboru funkcji $F(\phi) = 1$, $\omega(\phi) = -1$, $V(\phi) = 0$, $f(\phi) = \frac{1}{16}\delta\xi(\phi)$ dokonana została analiza rozwiązań. Gdy człon Gaussa-Bonneta jest zaniedbany ($\delta = 0$) rozwiązanie jest zawsze osobliwe, natomiast istnieją rozwiązania nieosobliwe, gdy człon Gaussa-Bonneta jest niezerowy ($\delta \neq 0$) przy założeniu, że funkcja $\xi(\phi)$ ma postać $\xi(\phi) = \phi^n$ ($n > 0$) [60].

Z punktu widzenia kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni włączenie wyrazów kwadratowych w krzywiźnie do klasycznego działania Einsteina jest uzasadnione jako konsekwencja procedury renormalizacji [61]. W teorii tej kwantowe pole wpływa na geometrię czasoprzestrzeni poprzez wartość oczekiwaną tensora energii-pędu $\langle T^{ab}\rangle$ występującą w półklasycznych równaniach Einsteina

$$\left(R^{ab} - 1/2g^{ab}R\right) = -\kappa\left\langle T^{ab}(x)\right\rangle. \tag{18}$$

Zakładając, że odziaływanie między polem kwantowym i grawitacją znika, gdy $x_0 \to -\infty$, $\lim_{x_0\to-\infty} g_{ab} = \eta_{ab}$ oraz w całej czasoprzestrzeni spełniony jest warunek $|g_{ab} - \eta_{ab}| \ll 1$, rozwiązania równań Einsteina można poszukiwać w postaci $g_{ab} = \eta_{ab} + \kappa\phi_{ab}$. Przedstawiając tensor energii-pędu w postaci szeregu względem κ, można dokonać jego analizy. Okazuje się, że tensor energii-pędu posiada nieskończoności trzech różnych typów, któe symbolicznie zapiszemy w postaci: ∞^4, ∞^2 i $\log\infty$. Pierwszy typ nieskończoności można usunąć, wprowadzając człon odpowiadający stałej kosmologicznej, drugi natomiast - wprowadzając człon odpowiadający stałej grawitacyjnej. Aby usunąć nieskończoność logarytmiczną należy włączyć do teorii kontrczłon całkiem nowego typu, jakim jest kwadratowa grawitacja.

2.2.2 Grawitacja $f(R)$

Teorie kwadratowej grawitacji i wyższych rzędów mają również związek z bardziej ogólnymi teoriami typu $I_g = \int d^4x\sqrt{g}f(R)$, ponieważ w asymptotycznym przybliżeniu małych krzywizn funkcja $f(R)$ może być przybliżona poprzez (14). Przykładem może być funkcja $f(R) = \frac{R}{1-l_p^2 R}$ (l_p to stała Plancka), którą można przedstawić w postaci rozwinięcia $f(R) \simeq R + l_p^2 R^2 + l_p^3 R^3 + l_p^4 R^4 + ...$ jeśli spełniony jest warunek $l_p R \ll 1$. Przykład ten ma swoją motywację fizyczną, ponieważ taka postać działania grawitacyjnego eliminuje kosmologiczną osobliwość w modelu wszechświata Robertsona-Walkera [62].

2.2.3 Teorie wyższego rzędu

Teorie z członami krzywiznowymi rzędu wyższego niż cztery (teorie wyższego rzędu) dobrze opisują zjawiska polaryzacji próżni kwantowych pól masywnych w granicy dużych mas [63, 38, 64]. Stosując metodę DeWitta-Schwingera [5, 65] można pokazać, że gdy długość fali Comptona związana masą pola jest znacząco mniejsza od charakterystycznego promienia krzywizny badanej czasoprzestrzeni to (nielokalne) zjawiska związane z kreacją cząstek mogą zostać zaniedbanie, a przybliżone zrenormalizowane jednopętlowe działanie efektywne W_{ren} jest zbudowane z lokalnych członów geometrycznych:

$$\begin{aligned} W_{ren} &= \frac{1}{192\pi^2 m^2}\int d^4x g^{1/2}\Big\{\alpha_1^{(s)} R\Box R + \alpha_2^{(s)} R_{ab}\Box R^{ab} + \alpha_3^{(s)} R^3 + \alpha_4^{(s)} R R_{ab}R^{ab} \\ &+\alpha_5^{(s)} R R_{abcd}R^{abcd} + \alpha_6^{(s)} R_b^a R_c^b R_a^c + \alpha_7^{(s)} R^{ab}R_{cd}R^c{}_a{}^d{}_b + \alpha_8^{(s)} R_{ab}R^a_{cde}R^{bcde} \\ &+\alpha_9^{(s)} R_{ab}{}^{cd}R_{cd}{}^{ef}R_{ef}{}^{ab} + \alpha_{10}^{(s)} R^a{}_b{}^c{}_d R^b{}_e{}^d{}_f R^e{}_a{}^f{}_c + \mathcal{O}(1/m^4)\Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie współczynniki $\alpha_i^{(s)}$ zależą od typu pola (pola o spinie 0, 1/2 lub 1). Dołączając W_{ren} do działania Einsteina-Hilberta, równania pola można otrzymać w standardowy sposób (18). Pochodna funkcjonalna W_{ren} liczoną względem tensora metrycznego daje zrenormalizowany tensor energii-pędu badanego pola:

$$\left\langle T^{ab}(x)\right\rangle = \frac{2}{g^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}W_{ren}. \tag{20}$$

Działanie efektywne (19) znane jest jedynie z dokładnością do członu $1/m^6$, stąd zakres stosowalności przybliżenia dotyczy bardzo masywnych pól, ponieważ w tylko tym reżimie poprawki wyższych rzędów mogą być zaniedbane. Informacja na temat postaci działania efektywnego W_{ren} kryje się w znajomości współczynników - [3] [5, 66, 67, 68]. Szczegółowe informacje na temat współczynników HaMiDeW znajdują się w podrozdziale 3.1.

Współczynniki HaMiDeW związane są również z fizyką klasyczną, a konkretnie z siłą samooddziaływania cząstki (ang. „self force") [66]. Rozpatrując przypadek poruszającej się w zakrzywionej czasoprzestrzeni masywnej cząstki sprzężonej z polem skalarnym, można zadać pytanie o siłę samooddziaływania tej cząstki . Siła samooddziaływania to siła, z jaką cząstka działa na siebie za pośrednictwem pola skalarnego.

[3] Skrót HaMiDeW lub stosowany zamiennie HMDS pochodzi od nazwisk Hadamarda, Minakshisundarama, De Witta i Seeley'a.

Na gruncie matematycznym współczynniki HaMiDeW mają swój wkład do teorii równań różniczkowych cząstkowych liniowych drugiego rzędu [69, 70, 71], ponieważ ich znajomość pozwala otrzymać ich przybliżone asymptotyczne rozwiązanie.

Wpływ włączenia pól kwantowych do rozważań ma istotne znaczenie dla rozwiązań kosmologicznych, ponieważ uwzględnienie poprawek kwadratowych wynikających z procesu regularyzacji generuje nieosobliwe rozwiązania [72].

Teorie z wyższymi członami krzywiznowymi w naturalny sposób wynikają z teorii strun [73]. Na przykład kwantując strunę Polyakova metodą całek po trajektoriach, napotyka się jednopętlowe rozbieżności. Rozbieżności te nie pojawiają się, gdy metryka czasoprzestrzeni spełnia równania konsystencji $R_{ab} = 0$. Dwupętlowe obliczenia ujawniają, że rozbieżności znikają, gdy równania konsystencji będą zmodyfikowane o człon pochodzenia „strunowego" $R_{ab} + \frac{\alpha'}{2} R_{acde} R_b{}^{cde} = 0$. Równanie $R_{ab} = 0$ to analogon klasycznych równań Einsteina dla próżni, parametr α' znakuje człon w rozwiązaniu strunowym będący bardzo małą fluktuacją względem rozwiązania klasycznego [74]. W sposób równoważny można wyprowadzić powyższe równania konsystencji, żądając od działania Polyakova niezmienniczości Weyla oraz rozpatrując je z punktu widzenia teorii kwantowej.

2.2.4 Grawitacja Lovelocka

Teorie z wyższymi członami krzywiznowymi mogą być też naturalnym uogólnieniem teorii Einsteina na dowolny wymiar czasoprzestrzeni. Taką teorią jest grawitacja Lovelock'a [75, 76], w która zakłada się, że lewa strona równań pola grawitacyjnego (oznaczona jako A^{ij}) posiadaja następujace własności:

1. tensor A^{ij} jest symetryczny ($A^{ij} = A^{ji}$),
2. A^{ij} zależy od metryki g_{ab} oraz jej pierwszych dwóch pochodnych ($A^{ij} = A^{ij}\left(g_{ab}; g_{ab,c}; g_{ab,cd}\right)$),
3. kowariantna dywergencja A^{ij} znika ($A^{ij}{}_{;i} = 0$).

Jeśli do trzech powyższych dodany zostanie jeszcze warunek, że tensor A^{ij} jest liniowy w drugich pochodnych metryki, to własności te prowadzą do wniosku , że $A^{ij} = aG^{ij} + bg^{ij}$, gdzie a i b to stałe, natomiast G^{ij} to tensor Einsteina [52, 77, 78]. Zatem lewa strona równań składać się może jedymie z kombinacji liniowej tensora Einsteina i tensora metrycznego. Lovelock pokazał, że tensor A^i_j spełniający warunki 1-3 jest generowany ze skalara I_D poprzez równanie Eulera-Lagrange [75, 79]. Można pokazać, że tym skalarem jest

$$\begin{aligned} I_D &= \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \\ \mathcal{L} &= \sum_{k=0}^{[(D-1)/2]} c_k \mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_k = \mathcal{R}^k = 2^{-n} \delta^{c_1 d_1 \ldots c_k d_k}_{a_1 b_1 \ldots a_k b_k} R_{c_1 d_1}{}^{a_1 b_1} \ldots R_{c_k d_k}{}^{a_k b_k}, \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_N}_{j_1 j_2 \ldots j_N}$ to uogólniona delta Kroneckera której definicja ma postać

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_N}_{j_1 j_2 \ldots j_N} = \det \begin{vmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta^{i_1}_{j_N} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \delta^{i_N}_{j_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \delta^{i_N}_{j_N} \end{vmatrix}, \tag{22}$$

lub równoważnie:

$$\delta^{c_1 d_1 \ldots c_N d_N}_{a_1 b_1 \ldots a_N b_N} = \frac{1}{N!} \delta^{c_1}_{[a_1} \delta^{d_1}_{b_1} \ldots \delta^{c_N}_{a_N} \delta^{d_N}_{b_N]}. \tag{23}$$

Cechą charakterystyczną teorii Lovelock'a jest to, że nie generuje ona osobliwych rozwiązań znalezionych metodą perturbacyjną [80].

2.2.5 Cechy rozwiązań grawitacyjnych równań pola

Rozwiązywanie równań pola grawitacyjnego wynikających z teorii wyższych rzędów niesie ze sobą wiele problemów. Takie teorie dają bardzo skomplikowane równania różniczkowe, w których występują wysokie pochodne tensora metrycznego względem współrzędnych, co powoduje, że pojawia się nowa klasa rozwiązań niedostępnych dla klasycznej teorii Einsteina. Przykładem może być wpływ kwadratowej grawitacji na rozwiązania próżniowe, dzięki której oprócz konwencjonalnego rozwiązania Minkowskiego, pojawia się również rozwiązanie anty-de Sittera [81]. Ponadto pojawiają się problemy związane z niefizycznością niektórych rozwiązań (brak minimalnej energii, rozwiązania typu „runaway" [80, 82]), co powoduje konieczność wyselekcjonowania tych fizycznych. Metody, dzięki którym można zaradzić tym problemom, to metody perturbacyjne, w których klasyczne rozwiązanie Einsteina jest przybliżeniem bazowym, natomiast człony wyższego rzędu generują poprawki do rozwiązań [76]. Metody te rozwijane były w teorii grawitacji z wyższymi członami krzywiznowymi [83, 84, 85, 86, 54, 87] i innych dziedzinach fizyki (teoria Wheelera-Feynmana [88], relatywistyczny model Abrahama-Lorenza [89]). Jedną z metod przybliżonych umożliwiających rozwiązywanie równań pola grawitacyjnego wyższego rzędu jest metoda przedstawiona w pracy [90]. Wykorzystano ją do badania szeregu interesujących fizycznie przypadków, między innymi: czasoprzestrzeni de Sittera, strun kosmicznych, naładowanej czarnej dziury [90, 1, 91].

2.3 Rozwiązania czarnodziurowe w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi - przegląd

2.3.1 Czarne dziury w teorii kwadratowej

Najprostszym rozwiązaniem opisującym czarną dziurę jest rozwiązanie Schwarzschilda. Metryka ta jest rozwiązaniem kwadratowej grawitacji bez pól materii (15). Można to łatwo pokazać uwzględniając własność $R = R_{\mu\nu} = 0$, która zachodzi dla metryki Schwarzchilda.

Najprostszą teorią kwadratową z polami materii jest teoria, w której członem źródłowym jest

pole elektromagnetyczne opisywane działaniem $\mathcal{S}_m$

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(R + \alpha R^2 + \beta R_{ab}R^{ab}\right) + \mathcal{S}_m. \tag{24}$$

W powyższym równaniu nie występuje skalar Kretschmanna $R_{abcd}R^{abcd}$. Takie uproszczenie kwadratowej grawitacji jest możliwe ponieważ pochodna funkcjonalna $\frac{\delta}{\delta g_{ab}}$ członu Gaussa-Boneta $\sqrt{g}(R^{abcd}R_{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2)$ znika w czterech wymiarach. W przeciwieństwie do rozwiązania Schwarzschilda metryka Reissnera-Nordströma nie jest już rozwiązaniem równań pola, możliwe jest jednak znalezienie rozwiązań w sposób przybliżony. Rozwiązaniem tak postawionego problemu jest wtedy niewielka modyfikacja klasycznej metryki i można je zapisać w postaci

$$g_{ab} = \widehat{g}_{ab} + \chi\widehat{g}_{ab} + \psi_{ab}, \tag{25}$$

gdzie $\widehat{g}_{ab}$ to rozwiązanie klasycznej teorii Einsteina, natomiast funkcje χ i ψ_{ab} charakteryzują modyfikację rozwiązania klasycznego i spełniają warunki $|\chi| \ll 1, \psi_{ab} \ll \widehat{g}_{ab}$. Przy wykorzystaniu metryki (25) zlinearyzowane równania pola kwadratowej grawitacji dają sprzężony układ równań

$$\begin{aligned}
G_{ab}\left(\widehat{g}_{ab}\right) &= 8\pi T_{ab}, &(26)\\
\left(\Box - m_0^2\right)\chi &= -\frac{8\pi}{3}T, &(27)\\
\left(\Box - m_1^2\right)\psi_{ab} + \left(1 - \frac{m_1^2}{m_0^2}\right)\nabla_a\nabla_b\psi^c{}_c &= 16\pi\left(T_{ab} - \frac{1}{3}Tg_{ab}\right), &(28)\\
\left(\psi_{ab} - \psi^c{}_c g_{ab}\right)^{;b} &= 0, &(29)
\end{aligned}$$

gdzie $m_0^{-2} = 6\alpha + 2\beta$, $m_1^{-2} = -\beta$, a G_{ab} to tensor Einsteina [91]. Powyższe równania mogą być interpretowane jako układ trzech pól: teoria pola grawitacyjnego $\widehat{g}_{ab}$, masywnego pola skalarnego χ oraz masywnego pola tensorowego ψ_{ab}. Rozpatrując statyczne i sferycznie symetryczny rozkład pola elektromagnetycznego, rozwiązaniem równań (26) jest metryka $\widehat{g}_{ab}$ będąca metryką Reissnera-Nordströma. Rozważana symetria pola jest również przyczyną znikania śladu tensora energii-pędu, co powoduje, że pole skalarne χ jest niewzbudzone. Rozwiązując równania ze względu na ψ_{ab} dla przypadku $r \geq M \gg m_1^{-1}$, można otrzymać przybliżoną metrykę $g_{ab} \approx \widehat{g}_{ab} + \psi_{ab}$

$$\begin{aligned}
ds^2 \approx\ & -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{2e^2}{m_1^2r^4}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{2e^2}{m_1^2r^4}\right)dr^2\\
& + r^2\left(1 - \frac{2e^2}{m_1^2r^4}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Promień horyzontu zdarzeń dla takiej czasoprzestrzeni określa związek

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - e^2}, \tag{31}$$

który jest taki sam jak w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma.W powyższym rozwiązaniu potenc-

jał „Newtonowski" uległ modyfikacji w stosunku do rozwiązania klasycznych równań Einsteina. Na dużych odległościach, oprócz siły pochodzącej od rozwiązania Reissnera-Nordströma, cząstka podlega dodatkowej sile odpychającej.

Charakterystyczną cechą metryki jest to, że zerowe geodezyjne na powierzchni $\theta = 0$ są takie same jak w przypadku czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma. Znajomość metryki oraz wykorzystanie podstawowych zasad termodynamiki czarnych dziur umożliwia obliczenie wielkości termodynamicznych takich jak temperatura Hawkinga i entropia [42]. Okazuje się, że temperatura Hawkinga posiada tą samą wartość, jak ta obliczona dla klasycznego rozwiązania Reissnera-Nordströma i wynosi ona

$$T_H = \frac{\sqrt{M^2 - e^2}}{2\pi \left(M + \sqrt{M^2 - e^2}\right)^2}. \tag{32}$$

Entropia jednak różni się od entropii liczonej dla klasycznej teorii Einsteina i da się zapisać w postaci

$$S \approx \frac{A}{4} + \frac{8\pi^2 e^2}{m_1^2 A}. \tag{33}$$

Wszystkie powyższe rozważania na temat teorii kwadratowej sprzężonej z polem elektromagnetycznym można rozszerzyć do przypadku obracającej się naładowanej czarnej dziury. Aby otrzymać rozwiązania można użyć równań pola (26-29) oraz tych samych metod przybliżonych, co w poprzednim przypadku. Metryka czasoprzestrzeni ma ogólną postać

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{rr}dr^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \tag{34}$$

i można aproksymować ją metryką zlinearyzowaną (25). Tensor $\widehat{g}_{ab}$ opisuje klasyczną obracającą się czarną dziurę Kerra-Newmanna, natomiast funkcja $\chi = 0$, ponieważ tensor energii-pędu jest bezśladowy. Wykorzystując równania pola oraz tensor energii-pędu czarnej dziury Kerra-Newmana $T_{\mu\nu}^{(KN)}$ we współrzędnych Boyera-Lindquista [92], można obliczyć funkcję ψ_{ab}, co prowadzi do metryki $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
g_{tt} &= -\frac{\Delta I_{(+)}}{\rho^2} + \frac{a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} I_{(-)}, \\
g_{t\phi} &= \left[\Delta I_{(+)} - \left(\rho^2 + a^2\right) I_{(-)}\right] \frac{a \sin^2\theta}{\rho}, \\
g_{\phi\phi} &= \left[\left(\rho^2 + a^2\right)^2 I_{(-)} - \Delta a^2 \sin^2\theta I_{(+)}\right] \frac{\sin^2\theta}{\rho}, \\
g_{\theta\theta} &= \rho^2 I_{(-)}, \\
g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta} I_{(+)},
\end{aligned} \tag{35}$$

gdzie $I_{(\pm)} = \left(1 \pm \frac{2e^2}{m_1^2 \rho^4}\right)$, $\rho = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + e^2$, litera „$a$" oznacza moment pędu J podzielony przez masę. Własności termodynamiczne można przeanalizować analogicznie jak w poprzednim przypadku. Promień horyzontu zdarzeń oraz grawitacja powierzchniowa posiadają

wartości identyczne jak te obliczone dla przypadku klasycznej ogólnej teorii względności, jednak powierzchnia A horyzontu zdarzeń już tej własności nie ma. Entropię S można wyrazić poprzez trzy parametry: A, J, i e w następujący sposób

$$S \approx \frac{A}{4} + \frac{8\pi^2 e^2}{m_1^2 A} + \frac{8\left(4\pi\right)^4 e^2 J^2}{3 m_1 A^3} + ..., \tag{36}$$

zależy ona zatem nie tylko od pola powierzchni, ale też i od innych parametrów. Interesującą własnością entropii jest to, że można ją nadal zapisać w postaci identycznej jak ta obliczona w ogólnej teorii względności $S = 4\pi r_H^2$. Należy jednak zwrócić uwagę, że równość ta może nie obowiązywać w przypadku obliczeń dokładnych, a nie przybliżonych.

Modyfikacja rozwiązania Reissnera-Nordströma wynikająca z włączenia do teorii członów kwadratowych (24) poszukiwana była również przy wykorzystaniu metod przybliżonych o dużej dokładności. Wyniki przedstawiono w pracy Campanelli, Lousto i Audretsch'a, gdzie metryka otrzymana została przy pomocy metody perturbacyjnej[4] w trzecim rzędzie dokładności [1]. Analizy przeprowadzone w [93] wykazały, że z powodu niefortunnej parametryzacji wykorzystywanej w pracy [1], wiele skadinąd prostych relacji, zostało przedstawionych w sposób nadmiernie skomplikowany.

2.3.2 Czarne dziury w teorii szóstego rzędu

Metryka Schwarzschilda jest rozwiązaniem teorii kwadratowej bez pól materii. Dodanie do działania kolejnego członu (szóstego rzędu) mającego postać

$$I_3 = \int d^4x\sqrt{-g}\left(c_1 R^3 + c_2 R R_a^b R_b^a + c_3 R R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ab} + c_4 R_a^b R_c^d R_{bd}{}^{ac} + c_5 R_a^b R_b^c R_c^a + c_6 R_a^b R_{bc}{}^{de} R_{de}{}^{ac}\right.$$
$$\left. + c_7 R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} + c_8 R_{ce}{}^{ab} R_{af}{}^{cd} R_{bd}{}^{ef}\right) \tag{37}$$

powoduje, że metryka Schwarzschilda nie jest rozwiązaniem w tym przypadku [84]. Na liczbowe współczynniki c_i nie są nakładane żadne dodatkowe warunki. W pierwszym rzędzie metody perturbacyjnej musimy rozwiązać dwa równania

$$\begin{aligned} m'\left(r\right) &= 48\pi G\left(-98c_7 + 25c_8 - 33c_6 - 132c_3\right)\left(2GM\right)^3/r^7 \\ &\quad + \left(90c_7 - \frac{45}{2}c_8 + 30c_6 + 120c_3\right)\left(2GM\right)^2/r^6, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\psi'\left(r\right) = 48\pi G\left(-54c_7 + 18c_8 - 21c_6 - 84c_3\right)\left(2GM\right)^2/r^7, \tag{39}$$

gdzie „prim" oznacza pochodną po współrzędnej r, a funkcja $m\left(r\right)$ i $\psi\left(r\right)$ wiąże się z metryką poprzez $ds^2 \simeq -e^{-2\psi(r)}\left[1 - m\left(r\right)/r\right]dt^2 + \frac{dr^2}{1-m(r)/r} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$. Można zatem zauważyć, że rozwiązanie Schwarzschilda może istnieć tylko, gdy $c_3 = c_6 = c_7 = c_8 = 0$. Obliczone z pomocą

[4] Metoda perturbacyjna omówiona została w podrozdziale 4.1.

standardowych metod promień horyzontu zdarzeń i entropia ulegają modyfikacji

$$r_+ = 2GM\left[1-\frac{\pi}{G^3M^4}\left(6c_3+5c_7+\frac{3}{2}c_6-c_8\right)\right], \tag{40}$$

$$S = 4\pi GM^2+\frac{2\pi^2}{G^2M^2}\left(4c_4+c_8\right). \tag{41}$$

Szczególnym przypadkiem teorii szóstego rzędu jest klasyczna teoria Einsteina wzbogacona o tylko jeden człon typu $\mathcal{L}^{(2)}_{eff}=\frac{\alpha}{M_p^2}R_{ab}{}^{cd}R_{cd}{}^{ef}R_{ef}{}^{ab}$. Celem dodania poprawki $\mathcal{L}^{(2)}_{eff}$ jest zaabsorbowanie dwupętlowych rozbieżności kwantowej grawitacji. Alternatywą dla metody perturbacyjnej jest poszukiwanie rozwiązań równań pola w postaci rozwinięcia (ang. „large distance expansion") metryki $ds^2\simeq B\left(r\right)dt^2-A\left(r\right)dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)$ typu

$$A\left(r\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{L_p}{r}\right)^n, \qquad B\left(r\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{L_p}{r}\right)^n, \tag{42}$$

gdzie L_p to długość Plancka, a współczynniki a_n, b_n są bezwymiarowe i spełniają warunek $a_0=b_0=1$[94]. Współczynniki a_n, b_n dla $n>0$ wyznaczone z równań pola wynoszą $a_1=2M/M_p$, $a_k=a_1^k$ dla $k=2,3,4,5$, $a_k=a_1^k+16\pi\alpha a_1^{k-4}\left(54+\left(k-6\right)5\right)$ dla $k=6,7,8,9$, $b_1=-a_1$, $b_k=0$ dla $k=2,3,4,5,6$, $b_7=-16\pi\alpha 5a_1^3$, $b_8=b_9=0$.

2.3.3 Czarne dziury w teoriach wysokiego rzędu

Rozwiązania czarnodziurowe oraz ich własności badane były również w klasycznej teorii Einsteina w której uwzględniono pola kwantowe. Wpływ tych pól na działanie Einsteina ujawnia się poprzez dodanie do niego zrenormalizowanego działania efektywnego W_{ren} (19). W odróżnieniu od teorii Lovelocka, równania pola są w tym przypadku bardziej skomplikowane, ponieważ występują tam wyższe pochodne metryki. Pierwszym i koniecznym krokiem na drodze poszukiwania rozwiązań w sposób przybliżony jest analiza tensora energii-pędu dla różnego typu czasoprzestrzeni. Należy zwrócić jeszcze raz uwagę, że jednopętlowe działanie efektywne W_{ren} jest obliczone w sposób przybliżony i znane jedynie z dokładnością do odwrotności kwadratu masy pola m. Tensor energii-pędu w czasoprzestrzeni Schwarzschilda został obliczony przez Frolova i Zel'nikova [38] a następnie uogólniony do czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma przez Matyjaska [95] oraz Taylora, Hiscocka, Andersona dla przypadku pola skalarnego [96]. Analiza w czasoprzestrzeni RN pokazuje, że jeśli ograniczymy się do pół skalarnych (spin s=0), to wynik otrzymany metodą rozwinięcia DeWitta-Schwingera [95] jest identyczny z wynikiem bazującym na przybliżeniu WKB [64]. Tensor energii-pędu wykazuje również własność regularności (nieosobliwości) w czasoprzestrzeni RN na horyzoncie zdarzeń [95].

Interesującym przypadkiem ze względu na swoją nieosobliwość jest metryka

$$ds^2=-\left\{1-\frac{2M}{r}\left(1-\tanh\frac{e^2}{2Mr}\right)\right\}dt^2+\left\{1-\frac{2M}{r}\left(1-\tanh\frac{e^2}{2Mr}\right)\right\}^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2 \tag{43}$$

opisująca naładowaną elektrycznie czarną dziurę w której pole elektryczne generowane jest przez

elektrodynamikę nieliniową zaproponowaną przez Ayon-Beato i Garcię [2] (ABG). Analogicznie, jak dla czasoprzestrzeni RN, tensor energii-pędu $\langle T^{ab}(x)\rangle$ można obliczyć dla czasoprzestrzeni ABG i dokonać porównania. Dla przypadku konforemnie sprzężonego pola skalarnego[5] [85] oraz pola wektorowego i spinorowego [97], tensor energii-pędu w czasoprzestrzeni ABG wykazuje wiele podobieństw do swojego odpowiednika w czasoprzestrzeni RN. Dla bardzo małych wartości $q = \frac{e}{M}$ wykresy funkcji $\langle T^a_b\rangle(r)$ pokazują, że przypadek RN w zasadzie nie różni się od przypadku ABG. Poważne różnice pojawiają się, gdy czarna dziura jest bliska przypadkowi ekstremalnemu. Rozszerzenie rozważań na przypadek pola skalarnego dowolnie sprzężonego (ξ jest dowolne) wykazuje, że matematyczna struktura tensora energii-pędu RN i ABG znacząco się różni. W przypadku czasoprzestrzeni RN tensor energii-pędu ma postać $\langle T^a_b\rangle = C^a_b + \eta D^a_b$, gdzie C^a_b, D^a_b to pewne funkcje zależne od współrzędnej r, $\eta = \xi - 1/6$, natomiast dla metryki ABG tensor ten ma postać $\langle T^a_b\rangle = T^{(0)a}_{\quad b} + \eta T^{(1)a}_{\quad b} + \eta^2 T^{(2)a}_{\quad b} + \eta^3 T^{(3)a}_{\quad b}$, gdzie $T^{(i)a}_{\quad b}$ to pewne funkcje zależne od współrzędnej r [98]. Zamiana elektrodynamiki klasycznej na nieliniową powoduje zatem pojawienie się dwóch nowych członów: $\eta^2 T^{(2)a}_{\quad b}$ i $\eta^3 T^{(3)a}_{\quad b}$. W przypadku minimalnego sprzężenia pola skalarnego ($\xi = 0$) przy małych wartościach q wykresy funkcji $\langle T^a_b\rangle$ dla czasoprzestrzeni RN i ABG są podobne, jednak jeśli czasoprzestrzeń jest bliska przypadkowi ekstremalnemu to wykresy radialnej części tensora energii-pędu $\langle T^r_r\rangle$ całkowicie się różnią [98]. Bez względu na spin pola tensor energii-pędu ABG jest regularny w centrum symetrii ($r = 0$), co odróżnia go od osobliwego odpowiednika w czasoprzestrzeni RN [97].

Tensor energii-pędu pola skalarnego analizowany był również w czasoprzestrzeni naładowanej elektrycznie dylatonowej czarnej dziury opisanej metryką

$$ds^2 = A(r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{A(r)} + B^2(r)\,d\Omega^2, \tag{44}$$

gdzie $A(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{1-a^2}{1+a^2}}$ i $B(r) = r^2\left(1 - \frac{r_-}{r}\right)^{\frac{2a^2}{1+a^2}}$ [99]. Masa oraz ładunek są związane z r_+ oraz r_- relacjami $2M = r_+ + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right) r_-$, $e = \frac{r_+ r_-}{1+a^2}$. Dla szczególnej wartości parametru $a = 0$ teoria uwzględniająca pole dylatonowe ϕ przechodzi w klasyczną teorię grawitacji sprzężonej z polem elektromagnetycznym. W takim przepadku tensor energii-pędu jest taki sam, jak dla czasoprzestrzeni RN. Istotną wartością jest $a = 1$, ponieważ taka teoria odpowiada niskoenergetycznemu przybliżeniu teorii strun. Dla $a = 1$ można pokazać, że tensor energii-pędu jest rozbieżny na horyzoncie zdarzeń ale tylko dla przypadku ekstremalnego czasoprzestrzeni [100].

Zwrotne działanie pola skalarnego (inaczej wpływ pola) na metrykę Reissnera-Nordströma znalezione zostało w pierwszym rzędzie przybliżenia przez Taylora, Hiscocka i Andersona [96]. Pole traktowane było jako niewielkie zaburzenie rzędu $\hbar$, które wpływa na geometrię RN za pośrednictwem tensora energii-pędu $\langle T^a_b\rangle$ (20). Rozwiązanie opisujące dowolną statyczną i sferycznie-symetryczną czasoprzestrzeń może być przedstawione w postaci

$$ds^2 = -e^{2\psi(r)}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{45}$$

[5] Kwantowe pole skalarne ϕ spełnia równanie $\left(-\Box + \xi R + m^2\right)\phi = 0$, pole jest konforemnie sprzężone, gdy $\xi = 1/6$.

gdzie $\psi(r)$ i $m(r)$ to funkcje, które należy wyznaczyć. O funkcjach tych założymy, że mają następujące rozwinięcia $e^{\psi(r)} = 1 + \epsilon\rho(r)$, $m(r) = M[1 + \epsilon\mu(r)] - e^2/(2r)$, gdzie ϵ jest małym parametrem, zdefiniowany jako $\epsilon = M_{Pl}/M_{BH}$ [96]. Funkcje $\mu(r)$, $\rho(r)$ odzwierciedlają zaburzenie pochodzące od pola kwantowego i składają się z sumy kilkudziesięciu członów typu $a_i \frac{1}{m^2} \frac{M^k r_+^l}{r^n}$. W funkcjach tych pojawiają się także stałe całkowania, odpowiednio: C_1 i C_2, wybrane poprzez naturalne warunki $\mu(r_+) = C_1$ i $\rho(r_+) = C_2$. Stałą C_1 można zaabsorbować dokonując redefinicji masy $(M + \epsilon C_1) \to M_{BH}$, natomiast stałą C_2 wyznaczyć poprzez warunek asymptotycznej płaskości czasoprzestrzeni. Taka redefinicja masy (tzw. masa definiowana poprzez horyzont) prowadzi do skomplikowanej formuły na masę widzianą z nieskończoności $M_\infty = M_{BH}[1 + \epsilon\mu(\infty)] = M_{BH} + \delta M$, gdzie δM jest funkcją zależną od M_{BH}, e, m. Wartość M_∞ różni się od masy M_{BH} definiowanej poprzez horyzont zdarzeń i może być większa lub mniejsza od M_{BH} w zależności od znaku funkcji δM. Dla konforemnie sprzężonego pola skalarnego ($\xi = 1/6$) funkcja $\delta M > 0$, gdy spełniony jest warunek $e^2/M_{BH}^2 \leq 0.954463$, natomiast dla minimalnie sprzężonego pola skalarnego ($\xi = 0$) funkcja $\delta M > 0$, gdy $e^2/M_{BH}^2 \leq 0.998701$. Jeśli czarna dziura przejdzie w przypadek ekstremalny czarnej dziury Reissnera-Nordströma $e^2/M_{BH}^2 = 1$, funkcja δM jest ujemna i niezależna od parametru ξ: $\delta M = \frac{-17\epsilon}{31752\pi m^2 M_{BH}}$. Oznacza to, że stosunek ładunku do masy widzianej z nieskończoności dla takiego przypadku jest zawsze większy niż jeden. Istotną wartością mającą związek z temperaturą Hawkinga T_H jest grawitacja powierzchniowa κ ($T_H = \kappa/2\pi$). Poprawka do grawitacji powierzchniowej wynikająca z istnienia pola kwantowego oznaczona jako $\delta\kappa$ może przyjmować różny znak. Jeśli $e = 0$ (granica Schwarzschilda), to $\delta\kappa$ jest zawsze ujemne, gdy $\xi < 37/168$. Oznacza to, że temperatura Hawkinga, po włączeniu pola skalarnego, zostaje obniżona w stosunku do swojego odpowiednika bez pola. Dla przypadku ekstremalnej czarnej dziury Reissnera-Nordströma $\delta\kappa > 0$, gdy $\xi < 5/14$.

Zwrotne działanie pól o dowolnym spinie ($s = 0, \frac{1}{2}, 1$) na metrykę, może być badane przy wykorzystaniu tensora energii-pędu $\langle T_b^a \rangle$ (20). W przypadku zwrotnego działania na metrykę Reissnera-Nordströma rozwiązania przybliżone mają postać

$$f(r) = 1 - \frac{r}{r_+} - \frac{e^2}{r r_+} + \frac{e^2}{r^2} + \frac{\epsilon}{\pi m^2}\left(A^{(s)}(r) + \xi B^{(s)}(r)\right), \tag{46}$$

$$\psi(r) = \frac{\epsilon}{\pi m^2}\left(D^{(s)}(r) + \xi E^{(s)}(r)\right), \tag{47}$$

gdzie $f(r)$ wiąże się z $m(r)$ poprzez $f(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)$ [101]. Postać funkcji $A^{(s)}$, $B^{(s)}$, $D^{(s)}$, $E^{(s)}$ zależy od spinu pola s i można pokazać, że $B^{(1/2)} = B^{(1)} = E^{(1/2)} = E^{(1)} = 0$. Promień ekstremalnej czarnej dziury dla pół spinorowych i wektorowych jest zawsze mniejszy niż ładunek czarnej dziury $r_{ekstr} < |e|$, dla pola skalarnego $r_{ekstr} < |e|$, jeśli ξ spełnia warunek $\left[\frac{16}{21} - 4\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\right] < 0$ [101]. Warunek $r_{ekstr} < |e|$ oznacza, że wartość promienia ekstremalnego kwantowo zmodyfikowanej czarnej dziury jest niższa niż wartość promienia czarnej dziury Reissnera-Nordströma, dla której $r_{ekstr} = |e|$. Dla konfiguracji ekstremalnej, bez względu na spin pola, masa widziana z nieskończoności M_∞ jest zawsze mniejsza niż masa definiowana przez horyzont zdarzeń M_{BH}. Geometria w pobliżu horyzontu

zdarzeń dla przypadku ekstremalnej czarnej dziury jest opisana metryką

$$ds^2 = \frac{r_+^2}{y^2}\left(-dt^2 + dy^2 + y^2 d\Omega^2\right), \tag{48}$$

zatem jest typu Bertottiego-Robinsona [102,103].

Jeśli w czasoprzestrzeni istnieją co najmniej trzy horyzonty, to istnieje potencjalna możliwość ich połączenia. W takim przypadku horyzont nazywa się ultraekstremalnym [104]. Wpływ pól kwantowych na położenie horyzontu eltraekstremalnego badany był w teoriach z niezerową stałą kosmologiczną ($\Lambda \neq 0$) oraz z niezerowym polem elektromagnetycznym ($e \neq 0$). Można pokazać, że przypadek ultraekstremalny istnieje i pojawia się, gdy r_+, $M_0 = M - Ar_+$ i e spełniają warunki [105]

$$r_+^2 = \frac{1}{2\Lambda}\left(1-2A\right), \quad M_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}\left(1-3A\right), \quad e^2 = \frac{1}{4\Lambda}\left(1-4A\right). \tag{49}$$

Parametr A zależy od typu pola (skalarne, wektorowe, spinorowe) i wynosi odpowiednio

$$A^{(0)} = \frac{\Lambda^2\left(3780\left(\xi-1/6\right)^3 + 63\left(\xi-1/6\right) - 8\right)}{5670\pi m^2}, \quad A^{(1/2)} = -\frac{\Lambda^2}{252\pi m^2}, \quad A^{(1)} = -\frac{2\Lambda^2}{105\pi m^2}. \tag{50}$$

Pola kwantowe mogą mieć znaczący wpływ również na wielkości termodynamiczne czarnej dziury RN (temperatura Hawkinga, entropia). Wykorzystując metodę Noether [51, 106] lub korzystając z pierwszej zasady termodynamiki można pokazać, że entropia wynosi

$$\begin{aligned} S \simeq \pi r_+^2 - \frac{1}{m^2 r_+^6}\Bigg[&\frac{2}{3}e^2\left(e^2 - r_+^2\right)\alpha_2^{(s)} - \frac{1}{3}e^4\alpha_4^{(s)} - \frac{1}{3}\left(3r_+^4 - 6e^2r_+^2 + 5e^4\right)\alpha_5^{(s)} - \frac{1}{4}e^4\alpha_6^{(s)} \\ &-\frac{1}{12}e^2\left(4r_+^2 - 7e^2\right)\alpha_7^{(s)} - \frac{1}{12}\left(14e^2r_+^2 - 3r_+^4 - 17e^4\right)\alpha_8^{(s)} - \left(r_+^2 - 2e^2\right)^2\alpha_9^{(s)} \\ &+\frac{1}{8}\left(e - r_+\right)^2\left(e + r_+\right)\alpha_{10}^{(s)}\Bigg] = \pi r_+^2 + \triangle S^{(s)}, \end{aligned} \tag{51}$$

gdzie współczynniki $\alpha_i^{(s)}$ zależą od spinu pola i są to te same współczynniki, które występują w działaniu efektywnym W_{ren} (19) [107]. Entropia jest obliczona w sposób przybliżony (pierwszy rząd przybliżenia [107]). Przybliżenie jest poprawne, gdy wpływ pola kwantowego jest niewielki. Entropia w ogólności narusza regułę „entropia=1/4 powierzchni horyzontu". Przechodząc do przypadku ekstremalnego $r_+ = r_-$ można pokazać, że przybliżona wartość promienia ekstremalnego wynosi

$$r_{ekstr} \simeq |e| - \frac{1}{24\pi m^2\left|e\right|^3}\left(4\alpha_4^{(s)} + 8\alpha_5^{(s)} + 3\alpha_6^{(s)} + 3\alpha_7^{(s)} + 6\alpha_8^{(s)} + 12\alpha_9^{(s)}\right), \tag{52}$$

co prowadzi do redukcji wartości entropii do $S \simeq \pi e^2$. Entropia ma wartość niezależną od spinu pola, spełnia regułę „entropia=1/4 powierzchni horyzontu" oraz jest identyczna z przypadkiem klasycznej czarnej dziury Reissnera-Nordströma.

2.3.4 Czarne dziury Gaussa-Bonneta

Czarne dziury Gaussa-Bonneta to kolejna grupa rozwiązań rozpatrywana w czasoprzestrzeni d-wymiarowej. Działanie Einsteina-Hilberta z włączonym do niego członem Gaussa-Bonneta, stałą kosmologiczną Λ oraz materią S_m ma postać

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^d x\sqrt{-g}\left(R - 2\Lambda + \alpha L_{GB}\right) + S_m, \tag{53}$$

gdzie $L_{GB} = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2$ [81]. Równania pola takiej teorii to

$$G_{ab} + \alpha H_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \tag{54}$$

gdzie G_{ab} to tensor Einsteina, natomiast H_{ab} to tensor pochodzący od członu Gaussa-Bonneta

$$H_{\mu\nu} = 2\left\{RR_{ab} - 2R_{ac}R^c_b - 2R^{cd}R_{acbd} + R_a{}^{cde}R_{bcde}\right\} - \frac{1}{2}g_{ab}L_{GB}. \tag{55}$$

Pierwsza czarna dziura w tej teorii (statyczna, sferycznie symetryczna) odkryta została przez Boulwara i Desera [81]. Rozważano wtedy przypadek próżniowy $T_{ab} = 0$ z ujemną stałą kosmologiczną $\Lambda < 0$. Rozwiązanie to można uogólnić zakładając, że horyzont zdarzeń może być hiperpowierzchnią o stałej dodatniej, ujemnej lub zerowej krzywiźnie. Przy takim założeniu rozwiązania należy poszukiwać w postaci

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2 h_{ij}dx^i dx^j, \tag{56}$$

w której funkcje ν, λ zależą jedynie od r, a człon $h_{ij}dx^i dx^j$ reprezentuje element liniowy $(d-2)$-wymiarowej hiperpowierzchni o stałej krzywiźnie $(d-2)(d-3)k$ i objętości Σ_k. Bez straty ogólności można rozważyć trzy przypadki $k = -1, 0, 1$. Analiza równań pola dla takiej teorii prowadzi do znalezienia ich rozwiązania dokładnego w postaci

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = k + \frac{r^2}{2\widetilde{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi G\widetilde{\alpha}M}{(d-2)\Sigma_k r^{d-1}} - \frac{4\widetilde{\alpha}}{l^2}}\right), \tag{57}$$

gdzie $\widetilde{\alpha} = (d-3)(d-4)\alpha$, M to masa natomiast stała kosmologiczna została wyrażona poprzez $\Lambda = -(d-1)(d+2)/\left(2l^2\right)$. Przypadek sferycznie symetryczny k=1 to wspomniane rozwiązanie znalezione przez Boulwara i Desera [81].

Z analizy przypadku $M = 0$ wynika, że parametr $\widetilde{\alpha}$ musi spełniać $4\widetilde{\alpha}/l^2 \leq 1$ w przeciwnym wypadku teoria nie jest zdefiniowana. Jeśli $M = 0$ oraz $4\widetilde{\alpha}/l^2 = 1$, dwie gałęzie rozwiązań łączą się w jedno, dając $e^{-2\lambda} = k + \frac{2r^2}{l}$. Analizując górną gałąź rozwiązania oznaczoną znakiem „plus" Boulware i Deser pokazali, że propagujące się grawitony są typu ghost a także jeśli $k = 1$ i $1/l^2 = 0$, rozwiązanie jest asymptotycznie typu AdS-Schwarzschild z ujemną masą [81]. Niepożądane z punktu widzenia fizyki własności powodują, że przypadek ten jest mniej interesujący i w dalszych rozważaniach zostanie pominięty. Temperatura Hawkinga oraz entropia czarnej dziury (57) mają

postać[6]

$$T = \frac{1}{4\pi}\left(e^{-2\lambda}\right)'\Big|_{r=r_+} = \frac{(d-1)\,r_+^4 + (d-3)\,kl^2r_+^2 + (d-5)\,\widetilde{\alpha}k^2l^2}{4\pi l^2 r_+\left(r_+^2 + 2\widetilde{\alpha}k\right)}$$
$$S = \frac{\Sigma_k r_+^{d-2}}{4G}\left(1 + \frac{(d-2)}{(d-4)}\frac{2\widetilde{\alpha}k}{r_+^2}\right). \tag{58}$$

Rozpatrując temperaturę Hawkinga jako funkcję r_+, można zauważyć, że wykazuje ona zróżnicowane zachowanie w zależności od przypadku k=-1,0,1. W przypadku uproszczonym $\widetilde{\alpha} = 0$ dla k=-1,0, odwrotność temperatury Hawkinga jest nieskończona w $r_+ = 0$ i wraz ze wzrostem r_+ maleje monotonicznie do zera [108]. Takie zachowanie oznacza, że czarna dziura jest układem stabilnym termodynamicznie. W przypadku $\widetilde{\alpha} = 0$, $k = 1$ pojawia się przejście fazowe powodujące termodynamiczną niestabilność dla czarnej dziury o małym promieniu, a stabilność dla przypadku o dużym promieniu [109].

Jeśli $\widetilde{\alpha} \neq 0$, to wielkości termodynamiczne zaczynają znacząco zależeć od samego $\widetilde{\alpha}$, typu czasoprzestrzeni $k = -1, 0, 1$, oraz od wymiaru czasoprzestrzeni d.

Dla $\widetilde{\alpha} \neq 0$, $k = 0$ temperatura Hawkinga, entropia, pojemność cieplna $C = \frac{\partial M}{\partial T}$, energia swobodna $F = M - TS$ oraz promień horyzontu zdarzeń

$$r_+^{d-1} = 16\pi G l^2 M/\left(d-2\right)\Sigma_k \tag{59}$$

są niezależne od parametru $\widetilde{\alpha}$. Wielkości te mają identyczne wartości jak te rozważane bez członu Gaussa-Bonneta [109]. Należy zwrócić uwagę, że wielkości termodynamiczne są identyczne mimo, że samo rozwiązanie równań pola (57) różni się od przypadku pozbawionego członu Gaussa-Bonneta.

Z analizy przypadku $\widetilde{\alpha} \neq 0$, $k = -1$ wynika, że horyzont zdarzeń posiada wartość minimalną $r_{\min}$. Wartość minimalna jest osiągana wtedy, gdy czarna dziura jest ekstremalna. Promień $r_{\min}$ oraz masa ekstremalna M_{ext} (masa liczona dla przypadku ekstremalnego) silnie zależą od wymiaru czasoprzestrzeni. Jednak, gdy spełniony jest warunek $4\widetilde{\alpha}/l^2 = 1$, to wielkości te od wymiaru nie zależą i wynoszą $r_{\min} = l^2/2$, $M_{ext} = 0$. Funkcja temperatury Hawkinga w zależności od horyzontu zdarzeń jest zawsze monotoniczna i rosnąca oraz ma swój początek w punkcie $r_{\min}$, dla którego wynosi zero. Wyjątkiem jest przypadek $4\widetilde{\alpha}/l^2 = 1$, dla którego punkt $r_{\min}$ zaczyna się od temperatury $T_H = 1/\sqrt{2}\pi l$, a nie od zera. Z powyższych własności wynika, że czarne dziury tego typu są termodynamiczne stabilne. Czarna dziura posiada spodziewaną osobliwość w punkcie $r = 0$ oraz, gdy

$$r_{sing}^{d-1} = \frac{4\widetilde{\alpha}r_+^{d-3}}{1 - 4\widetilde{\alpha}/l^2}\left(1 - \frac{\widetilde{\alpha}}{r_+^2} - \frac{r_+^2}{l^2}\right), \tag{60}$$

i $M_{ext} < M < 0$. Obie osobliwości znajdują się wewnątrz horyzontu zdarzeń. Wykorzystując metrykę (57) można pokazać również, że promień horyzontu zdarzeń musi spełniać warunek $r_+ \geq 2\widetilde{\alpha}$.

W przypadku $\widetilde{\alpha} \neq 0$, $k = 1$ wyróżnia się wymiar $d = 5$ względem wymiarów $d \geq 6$. Jeśli $d = 5$, to

[6] Masa czarnej dziury została wyrażona poprzez położenie horyzontu zdarzeń r_+.

wykres temperatury zaczyna się od zera w punkcie $r_+ = 0$ i dąży do nieskończoności, gdy $r_+ \to \infty$. Natomiast dla $d \geq 6$ wykres ten rozpoczyna się nieskończonością w $r_+ = 0$. Zależność temperatury dla $d \geq 6$ jest podobna do przypadku teorii bez członu Gaussa-Bonneta, natomiast przypadek $d = 5$ różni się od przypadku teorii bez tego członu. Dla $d = 5$ horyzont zdarzeń wynosi

$$r_+^2 = \frac{l^2}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\left\{16\pi GM/\left(3\Sigma_k\right) - \widetilde{\alpha}\right\}}{l^2}}\right), \tag{61}$$

co powoduje, że masa czarnej dziury M jest ograniczona wartością $M \geq M_0 = 3\Sigma_k\widetilde{\alpha}/\left(16\pi G\right)$. Czarną dziurę o danym promieniu horyzontu zdarzeń można sklasyfikować pod względem stabilności termodynamicznej. Wartość horyzontu zdarzeń można podzielić na trzy charakterystyczne przedziały:

$$\begin{aligned} 0 &< r_+ < r_1,\ C > 0, \\ r_1 &< r_+ < r_2,\ C < 0, \\ r_2 &< r_+ < \infty,\ C > 0, \end{aligned} \tag{62}$$

gdzie

$$r_{1,2}^2 = \frac{l^2}{4}\left(1 - \frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2}\right)\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16\widetilde{\alpha}}{l^2}\left(1 - \frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2}\right)^{-2}}\right). \tag{63}$$

W punktach r_1 i r_2 pojemność cieplna C jest rozbieżna. W pierwszym i trzecim przedziale pojemność cieplna C jest dodatnia, a w drugim ujemna, zatem czarna dziura jest niestabilna termodynamicznie tylko w drugim przedziale wartości. Powyższa analiza jest słuszna tylko, gdy spełniony jest warunek $36\widetilde{\alpha}/l^2 < 1$. Jeśli $36\widetilde{\alpha}/l^2 = 1$, drugi przedział niestabilności znika i czarna dziura spełniająca warunek $36\widetilde{\alpha}/l^2 \geq 1$ jest zawsze stabilna.

Powyższa analiza dotyczyła czarnych dziur Gaussa-Bonneta z ujemną stałą kosmologiczną. Czarne dziury te mają geometrię asymptotyczną Anty-de Sittera (AdS). Podobna analiza została dokonana dla czarnych dziur Gaussa-Bonneta z geometrią asymptotyczną de Siterra (dS) [110]. Punktem startowym jest teoria opisywana przez działanie (53). Stała kosmologiczna ma znak dodatni $\Lambda = (d-1)(d-2)/(2l^2)$, a tensor energii-pędu wynosi zero. Rozwiązanie poszukiwane jest przy założeniu sferycznej symetrii

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \tag{64}$$

gdzie $d\Omega_{d-2}^2$ jest metryką $(d-2)$-wymiarowej sfery jednostkowej o powierzchni $\Omega_{d-2} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma[(d-1)/2]}$. Jest to zatem przypadek mniej ogólny niż rozważany wcześniej. Rozwiązanie równań pola prowadzi do

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 + \frac{r^2}{2\widetilde{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{64\pi G\widetilde{\alpha}M}{(d-2)\,\Omega_{d-2}r^{d-1}} + \frac{4\widetilde{\alpha}}{l^2}}\right). \tag{65}$$

Metryka ta posiada osobliwość w $r = 0$, gdy $\widetilde{\alpha} > 0$, natomiast jeśli $\widetilde{\alpha} < 0$, pojawia się dodatkowa osobliwość w punkcie, w którym wyrażenie pod pierwiastkiem się zeruje. Mimo, że stała kosmologiczna

jest dodatnia dla $M = 0$, rozwiązanie może przyjmować asymptotycznie geometrię Anty-de Sittera dla gałęzi rozwiązania +, pod warunkiem, że $\widetilde{\alpha} > 0$. Dla przypadku $\widetilde{\alpha} < 0$, $M = 0$ czasoprzestrzeń dla dwóch gałęzi $\pm$ jest asymptotycznie geometrią de Sittera, jednak w tym przypadku parametr $\widetilde{\alpha}$ musi spełniać warunek $\widetilde{\alpha}/l^2 \geq -1/4$, w przeciwnym razie teoria nie jest poprawnie zdefiniowana.

W pierwszej kolejności rozważony zostanie przypadek $\widetilde{\alpha} > 0$. Można pokazać, że czarna dziura jest ekstremalna, gdy

$$r_+^2 = r_{1,2} = \frac{(d-3)\,l^2}{2\,(d-1)} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{(d-1)\,(d-5)}{(d-3)^2} \frac{4\widetilde{\alpha}}{l^2}} \right). \tag{66}$$

Dla $d = 5$ istnieją dwa promienie o wartościach $r_+ = r_1 = 0$ oraz $r_+ = r_2 = l^2/2$. Promień r_2 jest maksymalnym promieniem czarnej dziury, powyżej którego pojawia się naga osobliwość. Odwrotność temperatury Hawkinga dla $d = 5$ jest nieskończona w punkcie $r_+ = 0$, następnie osiąga minimum, aby znowu przejść do nieskończoności, gdy osiągnie promień maksymalnej czarnej dziury r_2. Pojemność cieplna jest dodatnia (stabilność termodynamiczna) w przedziale

$$0 < r_+^2 < r_0^2 = \frac{l^2}{4} \left(1 + \frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{16\widetilde{\alpha}}{l^2} \left(1 + \frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2} \right)^{-2}} - 1 \right), \tag{67}$$

a negatywna dla

$$r_0^2 < r_+^2 < l^2/2. \tag{68}$$

Górna granica przedziału $l^2/2$ to kwadrat długości promienia maksymalnej czarnej dziury w pięciu wymiarach. Własność pojemności cieplnej jest zatem inna niż w teorii pozbawionej członu Gaussa-Bonneta, gdzie jest ona zawsze ujemna. Dla $d \geq 6$ istnieje tylko jeden promień horyzontu zdarzeń r_1, dla którego czarna dziura jest ekstremalna; odwrotność temperatury zawsze rośnie zaczynając od zera w punkcie $r_+ = 0$ a kończąc na nieskończoności w punkcie r_1; pojemność cieplna jest zawsze negatywna. Własności te upodabniają czarne dziury tego typu do czarnych dziur Schwarzschilda-de Sittera z teorii pozbawionej członów Gaussa-Bonneta.

Przechodząc do przypadku $\widetilde{\alpha} < 0$, przy wykorzystaniu warunku, aby entropia była pozytywna, można pokazać, że horyzont zdarzeń musi spełniać nierówność

$$r_+^2 \geq -2\widetilde{\alpha} \frac{d-2}{d-4}. \tag{69}$$

Dla $d = 5$ na horyzont narzucone jest dodatkowe ograniczenie $r_+^2 \geqslant l^2/2$, wynikające z wymagania, aby temperatura Hawkinga była dodatnia. Horyzont zdarzeń dla $d = 5$ musi zatem należeć do przedziału $-6\widetilde{\alpha} \geqslant r_+^2 \geqslant l^2/2$, a tym samym musi być również spełniony warunek

$$\widetilde{\alpha}/l^2 \geqslant -1/12. \tag{70}$$

Pojemność cieplna natomiast posiada dwa przypadki charakterystyczne, w których zmienia swój znak

$$r_+^2 = \frac{l^2}{4}\left(1+\frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2}\right)\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{16\widetilde{\alpha}}{l^2}\left(1+\frac{12\widetilde{\alpha}}{l^2}\right)^{-2}}\right). \tag{71}$$

Są one rzeczywiste tylko wtedy, gdy $\widetilde{\alpha}/l^2 \leq -1/12$ co jest w sprzeczności z warunkiem (70). Oznacza to, że pojemność cieplna nie posiada punktów zerowania się i jest zawsze ujemna, co świadczy o niestabilności (podobnie jak przypadek pozbawiony członów Gaussa-Bonneta).

Dla wymiarów $d \geq 6$ czarna dziura jest ekstremalna dla dwóch promieni horyzontu zdarzeń o wartościach (66). Aby promienie te były rzeczywiste, musi być spełniony warunek $\widetilde{\alpha}/l^2 \geqslant \frac{(d-3)^2}{4(d-1)(d-5)}$. Okazuje się, że mniejszy z promieni ekstremalnej czarnej dziury nie spełnia warunku (69). Ograniczenie to powoduje, że wykres temperatury rozpoczyna się skończoną wartością w punkcie (69) i dąży monotonicznie do nieskończoności którą osiąga w punkcie (71). W tym przedziale czarna dziura jest niestabilna tak jak i w przypadku czasoprzestrzeni pięciowymiarowej.

Poprzednie rozważania dotyczyły teorii Gaussa-Bonneta bez pól materii $S_m = 0$. Najprostszym rozszerzeniem tej teorii uwzględniającym pola materii jest uwzględnienie bezźródłowego pola elektromagnetycznego $S_m = -\frac{1}{4\pi g_c^2}\int d^dx\sqrt{-g}F_{ab}F^{ab}$. Można poszukiwać rozwiązania w postaci metryki statycznej (56), co powoduje, że rozwiązaniem równań Maxwella jest pole elektryczne $E(r) = \frac{e}{r^{n-2}}$ wytworzone przez ładunek e . Ogólne rozwiązanie dla takiej konfiguracji opisuje metryka

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = k + \frac{r^2}{2\widetilde{\alpha}}\left(1 \pm \sqrt{1+4\widetilde{\alpha}\left[\frac{\widetilde{M}}{r^{d-1}} - \frac{1}{l^2} - \frac{(d-3)\,\widetilde{e}^2}{2r^{2(d-2)}}\right]}\right), \tag{72}$$

gdzie $\widetilde{M} = \frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_k}$, $\widetilde{e} = \frac{4e^2}{(d-2)g_c^2}$, $\Lambda = -(d-1)(d-2)\left(2l^2\right)$ [111, 112]. Czarna dziura Gaussa-Bonneta bez pól materii może posiadać dodatkową osobliwość w punkcie $r = r_b > 0$ (ang. „branch singularity"). Taką dodatkową osobliwość posiada również naładowana czarna dziura Gaussa-Bonneta. Położenie tej osobliwości, niezależne od k, wyznacza równanie

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}_b = -\left(1-\frac{4\widetilde{\alpha}}{l^2}\right)\frac{r_b^{n-1}}{4\widetilde{\alpha}} + \frac{(n-3)\,\widetilde{e}^2}{2r_b^{n-3}}. \tag{73}$$

Obecność niezerowego ładunku umożliwia pojawienie się osobliwości dla masy $M > 0$, co w przypadku $e = 0$ jest możliwe, jak już wspomniano, jedynie dla masy $M < 0$. Przykładem zachowania osobliwego w pobliżu r_b jest zachowanie skalara Kretschmana $I = R^{abcd}R_{abcd} \sim O\left[(r-r_b)^{-3}\right]$. Osobliwość tą można porównać z osobliwością czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma $I_{RN} = R^{abcd}R_{abcd} \sim O\left[\tilde{e}^2/r^{4d-8}\right]$ i przekonać się, że łagodniej zmierza do nieskończoności. Dla $k = 1, 0$ i gałęzi „plus"[7] metryki (72) horyzont zdarzeń nie pojawia się. Jeśli $k = -1$, horyzont zdarzeń pojawia się dla obu gałęzi. Jeśli czarna dziura jest ekstremalna, relację miedzy promieniem horyzontu zdarzeń $r_+ = r_{ex}$,

[7] Metryka (72) posiada dwie gałęzie rozwiązań, co sugeruje znak ±.

masą $\widetilde{M} = \widetilde{M}_{ex}$ i ładunkiem $\widetilde{e} = \widetilde{e}_{ex}$ można zapisać w postaci

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}_{ex} = 2r_{ex}^{n-1}\left[\frac{(d-2)}{(d-3)\,l^2} + \frac{k}{r_{ex}^2} + \frac{(d-4)\,\widetilde{\alpha}k^2}{(d-3)\,r_{ex}^4}\right], \tag{74}$$

$$\widetilde{e}^2 = \widetilde{e}_{ex}^2 = \frac{2r_{ex}^{2(n-2)}}{(d-3)^2}\left[\frac{d-1}{l^2} + \frac{(d-3)\,k}{r_{ex}^2} + \frac{(d-5)\,\widetilde{\alpha}k^2}{r_{ex}^4}\right]. \tag{75}$$

Dla $d = 5$ relacja określająca $\widetilde{e}_{ex}^2$ jest taka sama, jak w klasycznej teorii względności, co oznacza, że dla danego promienia ekstremalnego r_{ex}, zarówno w teorii Gaussa-Bonneta, jak i Einsteina, ładunek $\widetilde{e}_{ex}^2$ jest ten sam. Ta sama prawidłowość nie dotyczy jednak masy ekstremalnej. Prawa strona równania (75) musi być dodatnia, w przeciwnym wypadku rozwiązanie ekstremalne nie isnieje. Prawa strona równania może być ponadto funkcją monotoniczną, co oznacza, że każdej konfiguracji ekstremalnej odpowiada dokładnie jedna masa ekstremalna. Jeśli jednak funkcją monotoniczną nie jest, to dla pewnego ustalonego ładunku $\widetilde{e}_{ex}^2$ istnieją dwa (lub więcej) horyzonty ekstremalne, a więc i masy $\widetilde{M}_{ex}$. Istnieje jednak wartość horyzontu ekstremalnego $r_{ex} = r_d$, dla której następuje degeneracja - i dla danego $\widetilde{e}_{ex}^2$ jest tylko jedna wartość horyzontu ekstremalnego. Dla $\Lambda = 0$ zdegenerowany horyzont pojawia się w

$$r_d^2 = -\frac{(d-4)\,(d-5)}{(d-3)}k\widetilde{\alpha}, \tag{76}$$

a zatem k musi wynosić -1. Jeśli $\Lambda \neq 0$ to

$$r_d^2 = -\frac{(d-3)^2\,l^2 B}{(d-1)\,(d-2)}, \tag{77}$$

gdzie

$$B = k \pm |k|\sqrt{1 - \frac{4\widetilde{\alpha}\,(d-1)\,(d-2)\,(d-4)\,(d-5)}{(d-3)^4\,l^2}}, \tag{78}$$

a zatem mogą istnieć dwa promienie r_d w zależności od wyboru gałęzi dodatniej lub ujemnej we wzorze określającym B.

Na czarną dziurę Gaussa-Bonneta-Maxwella-Λ można spojrzeć bardziej szczegółowo pod kątem liczby horyzontów zdarzeń i struktury czasoprzestrzeni [112]. Można dokonać klasyfikacji pod względem wartości stałej kosmologicznej oraz typu czasoprzestrzeni określonej przez parametr k:

- Dla $\Lambda = 0$ i $k = 1$ gałąź dodatnia rozwiązania (72) prezentuje nagą osobliwość (brak horyzontu zdarzeń). Dla gałęzi ujemnej rozwiązanie ekstremalne posiada dodatnią masę[8] $\widetilde{M}_{ex}^{(-)} > 0$. Dla masy $\widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(-)}$ rozwiązanie jest nagą osobliwością, natomiast, gdy $\widetilde{M} > \widetilde{M}_{ex}^{(-)}$ pojawiają się dwa horyzonty: wewnętrzny i zdarzeń.

- Dla $\Lambda = 0$ i $k = 0$ analogicznie jak poprzednio gałąź dodatnia nie posiada rozwiązań z horyzontem zdarzeń. Dla gałęzi ujemnej charakterystyczne jest to, że gdy $\widetilde{M} \to 0^+$ to $r_h \to \infty$, natomiast gdy masa jest ujemna, horyzont zdarzeń nie pojawia się.

[8] Znak minus w górnym indeksie oznacza, że wielkość ta dotyczy gałęzi rozwiązania ze znakiem ujemnym.

- Dla $\Lambda = 0$ i $k = -1$ gałąź dodatnia posiada horyzont zdarzeń, a także pojawiają się horyzonty ekstremalne, lecz tylko dla $d \geq 6$ (dla $d = 5$ horyzonty ekstremalne nie istnieją). Gdy $|\widetilde{e}| < |\widetilde{e}_d|$, to istnieją dwa horyzonty ekstremalne - gdy $\widetilde{M}_{ex}^{(+)} = \widetilde{M}_{ex}^{(1+)}$ oraz $\widetilde{M}_{ex}^{(+)} = \widetilde{M}_{ex}^{(2+)}$. Wtedy to istnieje pewna wartość $\widetilde{M}_B$ taka, że dla $\widetilde{M} < \widetilde{M}_B$, horyzont zdarzeń nie istnieje. Dla $\widetilde{M}_B < \widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(1+)}$ oraz $\widetilde{M} > \widetilde{M}_{ex}^{(2+)}$ istnieje horyzont zdarzeń, natomiast dla $\widetilde{M}_{ex}^{(1+)} < \widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(2+)}$ istnieją trzy horyzonty (wewnętrzny, zdarzeń i kosmologiczny). Dla czasoprzestrzeni pięciowymiarowej w ogóle nie pojawia się horyzont, gdy $\widetilde{M} < \widetilde{M}_B$, gdzie $\widetilde{M}_B$ to pewna wartość masy. Dla gałęzi ujemnej istnieje pewna wartość $\widetilde{M}_B$ taka, że dla $\widetilde{M} < \widetilde{M}_B$ istnieje horyzont kosmologiczny oraz czasoprzestrzeń jest nagą osobliwością. Dla $\widetilde{M} \geq \widetilde{M}_B$ horyzont nie pojawia się.

- Dla $\Lambda > 0$ i $k = 1$ gałąź dodatnia nie posiada rozwiązań z horyzontem zdarzeń. Gałąź ujemna posiada horyzonty oraz istnieją rozwiązania ekstremalne. Gdy $|\widetilde{e}| < |\widetilde{e}_d|$, to istnieją dwa horyzonty ekstremalne $\widetilde{M}_{ex}^{(1-)}$ i $\widetilde{M}_{ex}^{(1+)}$. Dla $\widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(1-)}$ istnieje jedynie horyzont kosmologiczny, a czasoprzestrzeń jest nagą osobliwością. Dla $\widetilde{M}_{ex}^{(1-)} < \widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(2-)}$ czasoprzestrzeń posiada trzy horyzonty: wewnętrzny, zdarzeń i kosmologiczny. Dla $\widetilde{M} > \widetilde{M}_{ex}^{(2-)}$ istnieje jedynie horyzont kosmologiczny.

- Dla $\Lambda > 0$ i $k = 0$ gałąź dodatnia nie posiada rozwiązań z horyzontem zdarzeń. Gałąź ujemna posiada horyzont kosmologiczny, a rozwiązanie jest nagą osobliwością.

- Dla $\Lambda > 0$ i $k = -1$ struktura horyzontów jest podobna do przypadku $\Lambda = 0$ i $k = -1$.

- Dla $\Lambda < 0$ i $k = 1$ gałąź dodatnia nie posiada rozwiązań z horyzontem zdarzeń. Dla gałęzi ujemnej rozwiązanie ekstremalne istnieje dla każdego $\widetilde{e}$. Masa przypadku ekstremalnego jest dodatnia dla $d \geq 6$ oraz $\widetilde{M}_{ex}^{(-)} > \widetilde{\alpha}$ dla $d = 5$. Dla $\widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(-)}$ nie ma horyzontów, z kolei dla $\widetilde{M} > \widetilde{M}_{ex}^{(-)}$ istnieje horyzont wewnętrzny i horyzont zdarzeń.

- Dla $\Lambda < 0$ i $k = 0$ gałąź dodatnia rozwiązań nie posiada horyzontów (naga osobliwość). Struktura czasoprzestrzeni dla gałęzi ujemnej jest podobna do przypadku $\Lambda < 0$ i $k = 1$, z tą różnicą że dla $d = 5$ masa ekstremalna spełnia warunek $\widetilde{M}_{ex}^{(-)} > 0$.

- Dla $\Lambda < 0$ i $k = -1$ i gałęzi ujemnej dla każdego ładunku istnieje rozwiązanie ekstremalne. Dla $\widetilde{M} < \widetilde{M}_{ex}^{(-)}$ nie ma horyzontów, dla $\widetilde{M}_{ex}^{(-)} < \widetilde{M} < \widetilde{M}_B$ istnieje horyzont wewnętrzny i horyzont zdarzeń, a dla $\widetilde{M} > \widetilde{M}_B$ rozwiązanie

  posiada horyzont zdarzeń. Gałąź dodatnia rozwiązań posiada rozwiązania czarnodziurowe oraz, co charakterystyczne, rozwiązanie ekstremalne ($r_{ex} \neq 0$) można otrzymać dla przypadku zerowej masy $\widetilde{M}_{ex}^{(+)} = 0$.

Kolejną modyfikacją teorii Gaussa-Bonneta jest zastąpienie klasycznego pola elektromagnetycznego teorią alternatywną, jaką jest elektrodynamika Borna-Infelda. Rozpatrywana jest zatem

teoria, w której pole materii w działaniu (53) ma postać

$$S_m = \sqrt{\det\left(bg_{ab} + F_{ab}\right)} + \sqrt{-\det g_{ab}}. \tag{79}$$

Elektrodynamika Borna-Infelda została wprowadzona w 1934 roku. Jej celem było uzyskanie skończonej energii elektronu [113]. Obecnie teoria ta ma swoją motywację z punktu widzenia teorii strun, ponieważ pojawia się jako jej niskoenergetyczne przybliżenie [114]. Poszukując rozwiązań czarnodziurowych w pięciowymiarowej czasoprzestrzeni, można pokazać, że analogon rozwiązania Reissnera-Nordströma ma postać

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= e^{-2\lambda} = 1 + \frac{r^2}{4\alpha} - \frac{r^2}{4\alpha}\left(1 + \frac{16m\alpha}{\pi r^4} - \frac{2}{3}\alpha\left(4b^2 - 2\Lambda\right) + \frac{8}{3}\frac{b^2\alpha}{r^3}\sqrt{r^6 + L^6}\right. \\ &\left. - \frac{8b^2L^6\alpha}{r^4}\int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^6 + L^6}}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{80}$$

gdzie m to masa, $L = \left(\frac{e}{b}\right)^{1/3}$ a, e to ładunek elektryczny [115]. Cechą charakterystyczną tego rozwiązania jest to, że nie posiada ono w centrum osobliwości w sensie metrycznym

$$\lim_{r\to 0} e^{2\nu} = 1 - \left(\frac{m}{\pi\alpha} - \frac{b^2L^4\gamma}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{81}$$

gdzie $\gamma = \Gamma\left(1/3\right)\Gamma\left(7/6\right)/\sqrt{\pi}$. Aby rozwiązanie było rzeczywiste, przy założeniu $\alpha > 0$, wyrażenie pod pierwiastkiem nie może być ujemne, a zatem $m \geq m_c = \frac{\pi}{2}b^2L^4\gamma$. Wartość masy $m = m_c$ (masa krytyczna) jest szczególna, ponieważ czasoprzestrzeń nie posiada wtedy w centrum osobliwości stożkowej.

Liczba horyzontów zmienia się w zależności od wartości masy. Dla $\Lambda = 0$ oraz $m > m_c + \pi\alpha$ istnieje tylko jeden horyzont. Dla $m \leq m_c + \pi\alpha$ istnieją dwa horyzonty i w tym sensie czasoprzestrzeń przypomina rozwiązanie Reissnera-Nordströma. Jeśli $m = m_c + \pi\alpha$, to jeden z horyzontów znajduje się w $r = 0$.

Czarne dziury Gaussa-Bonneta można zbadać pod kątem stabilności. Rozwiązanie jest stabilne jeśli pod wpływem niewielkiego początkowego zaburzenia następuje względem niego oscylacja w czasie. Jeśli natomiast to niewielkie zaburzenie powoduje, że rozwiązanie w miarę upływu czasu coraz bardziej się zmienia, to wtedy jest rozwiązaniem niestabilnym [116, 117]. Aby zbadać stabilność sferycznie symetrycznej czarnej dziury bez pól materii opisanej metryką (65) ($\Lambda = 0$), należy rozważyć jej zaburzenie

$$g_{ab} \to g_{ab} + h_{ab}. \tag{82}$$

Badanie stabilności sprowadza się w praktyce do znalezienia rozwiązania równania pola Einsteina-Gaussa-Bonneta (54) dla próżni ze względu na h_{ab}, a następnie przeanalizowania jego zachowania.

Istnieją trzy typy zaburzeń h_{ab}: skalarne, wektorowe i tensorowe. Nazwy te pochodzą od sposobu transformacji tych wielkości w obrębie podprzestrzeni x_i (do x_i nie należą współrzędne r, t) [118]. Z

kombinacji liniowej tych trzech typów zaburzeń można odtworzyć dowolne zaburzenie.

Najprostszym typem zaburzenia jest zaburzenie tensorowe określone poprzez dodatkowe warunki [118]

$$h_{ti} = h_{rj} = 0. \tag{83}$$

Poszukiwane jest rozwiązanie równań w postaci

$$h_{ij}\left(t, r, x\right) = r^2 e^{\omega t} \chi\left(r\right) \overline{h}_{ij}\left(x\right), \tag{84}$$

gdzie $\overline{h}_{ij}$ jest funkcją własną operatora Laplace'a, x natomiast oznacza współrzędne różne od r, t [119]. Po wprowadzeniu nowej funkcji $\Phi\left(r\right) = \chi\left(r\right) K\left(r\right)$ [119] oraz przejściu do nowych współrzędnych r^* zdefiniowanych poprzez związek $dr^*/dr = e^{2\lambda}$ (gdzie $e^{2\lambda}$ to składowa metryki (64)), z równań pola można otrzymać równanie różniczkowe postaci

$$-\frac{d^2\Phi}{dr^{*2}} + V\left(r\left(r^*\right)\right)\Phi = -\omega^2 = E\Phi. \tag{85}$$

Jeśli rozwiązanie tego równania istnieje dla $\omega > 0$, to mamy do czynienia z niestabilnością, ponieważ h_{ij} ciągle wzrasta wraz z upływem czasu. Równania zostały doprowadzone do postaci przypominającej równanie Schrödingera (85), ponieważ można wtedy spojrzeć na zagadnienie niestabilności jako na problem istnienia stanów związanych o ujemnej energii $E < 0$. Analiza równania (85) pokazuje [119], że stabilność rozwiązań zależy od wymiaru czasoprzestrzeni. Dla $D \neq 6$ oraz $\alpha > 0$ asymptotycznie płaska czarna dziura o dodatniej masie jest zawsze stabilna. Jednak jeśli $D = 6$, to istnieje pewna wartość masy, poniżej której rozwiązanie zachowuje się niestabilnie.

Rozważania nad stabilnością można uogólnić na teorię Gaussa-Bonneta bez pól materii, ale tym razem z niezerową stałą kosmologiczną oraz rozpatrzyć czarne dziury opisane rozwiązaniem typu (56). Analogicznie, jak w poprzednim przypadku, niestabilność występuje poniżej pewnej wartości krytycznej masy dla przypadku rozwiązań z horyzontem zdarzeń o dodatniej krzywiźnie $k = 1$ dla wymiarów $D = 6$ [120]. Dla przypadku rozwiązań z horyzontem zdarzeń o ujemnej krzywiźnie $k = -1$, powyżej pewnej masy krytycznej występuje niestabilność dla dowolnego wymiaru D.

Podobnej analizy stabilności można dokonać dla zaburzeń typu wektorowego oraz skalarnego. Analogiczne, jak w przypadku zaburzeń tensorowych, operacje prowadzą do analizy istnienia rozwiązań równania typu (85). Okazuje się, że zaburzenia typu wektorowego są zawsze stabilne, natomiast dla $D = 5$ istnieją niestabilności typu skalarnego [121].

Pod kątem stabilności rozwiązań badane były również czarne dziury w teorii EDGB (Einstein-Dilaton-Gauss-Bonnet). Teoria taka jest opisana działaniem

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{2} + \frac{1}{4}\partial_a\phi\partial^a\phi + \frac{\alpha'}{8g^2}e^{\phi}L_{GB}\right), \tag{86}$$

gdzie ϕ to pole dylatonowe [73], a L_{GB} to człon Gaussa-Bonneta. Badana czarna dziura opisana jest metryką sferycznie symetryczną (64). Stabilność takiej czarnej dziury była badana ze względu na

liniowe zaburzenie typu

$$\begin{aligned}\Gamma(r,t) &= \Gamma(r)+\delta\Gamma(r)\,e^{i\sigma t},\\ \Lambda(r,t) &= \Lambda(r)+\delta\Lambda(r)\,e^{i\sigma t},\\ \phi(r,t) &= \phi(r)+\delta\phi(r)\,e^{i\sigma t},\end{aligned} \tag{87}$$

gdzie funkcje Γ i Λ wiążą się z metryką relacjami $\Gamma = 2\nu$ oraz $\Lambda = 2\alpha$ [122]. Dokładna wartość funkcji $\Gamma(r)$ i $\Lambda(r)$ nie jest znana, co nie przeszkadza w dowodzie stabilności, jeśli założona zostanie asymptotyczna płaskość rozwiązań oraz istnienie horyzontu zdarzeń. Analogicznie, jak w poprzednich przypadkach dowód opiera się na analizie równania typu Schrödingera (85) i wykazaniu, że rozwiązania dla $\omega > 0$ nie istnieją.

2.3.5 Czarne dziury w teorii Lovelocka

Rozszerzeniem teorii Gaussa-Bonneta jest teoria Lovelocka. Szczególnym jej przypadkiem jest ograniczenie Lagranżjanu (21) do postaci

$$\mathcal{L} = c_0 + c_n\mathcal{L}_n \tag{88}$$

zawierającego jedynie stałą kosmologiczną $\mathcal{L}_0$ oraz jeden człon $\mathcal{L}_n$, gdzie $n > 1$. Ogólnym rozwiązaniem równań pola jest metryka (56) spełniająca warunek

$$e^{2\nu} = \frac{1}{e^{2\lambda}} = f(r)\,. \tag{89}$$

Metrykę tę można przedstawić w postaci [123, 124, 125]

$$f(r) = k - r^2F(r)\,, \tag{90}$$

gdzie $F(r)$ spełnia równanie

$$\widehat{c}_0 + \widehat{c}_nF^n(r) = \frac{16\pi GM}{(d-2)\,\Sigma_{d-2}r^{d-2}}, \tag{91}$$

gdzie M to masa, a Σ_{d-2} objętość $(d-2)$-wymiarowej hiperpowierzchni o stałej krzywiźnie, oraz

$$\widehat{c}_0 = \frac{c_0}{(d-1)\,(d-2)}, \quad \widehat{c}_1 = 1, \quad \widehat{c}_n = c_n\Pi_{j=3}^{2m}(d-j) \ \text{ dla } n > 1. \tag{92}$$

Jeśli parametr $\widehat{c}_0$ zapisany zostanie w postaci $\widehat{c}_0 = -1/l^2$, natomiast parametr $\widehat{c}_n$, posiadający wymiar [długość]$^{2n-2}$, w postaci $\widehat{c}_n = \alpha^{2n-2}$, to rozwiązaniem jest funkcja

$$F(r) = \begin{cases} \pm\frac{1}{\alpha^{2-2/n}}\left(\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}r^{d-1}} + \frac{1}{l^2}\right)^{1/n} & \text{dla } n = \text{ parzyste}\\ \frac{sign(x)}{\alpha^{2-2/n}}\left|\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}r^{d-1}} + \frac{1}{l^2}\right|^{1/n} & \text{dla } n = \text{ nieparzyste,}\end{cases} \tag{93}$$

gdzie $x = \frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}r^{d-1}} + \frac{1}{l^2}$.

Metryka ta dla $n < (d-1)/2$, oprócz osobliwości w $r = 0$, może posiadać osobliwość dodatkową dla takiego r dla którego spełniony jest warunek $x = 0$. Dla n parzystego można zauważyć, że rozwiązanie próżniowe $M = 0$ jest poprawne tylko wtedy, gdy stała kosmologiczna jest dodatnia $\left(l^2 > 0\right)$.

Analizę rozwiązania można podzielić na trzy przypadki: o zerowej, dodatniej oraz ujemnej stałej kosmologicznej:

- W przypadku zerowej stałej kosmologicznej $1/l^2 = 0$ jeśli $n = (d-1)/2$ rozwiązanie

$$f(r) = \begin{cases} k \pm \frac{1}{\alpha^{2-2/n}} \left(\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}}\right)^{1/n} & \text{dla } n = \text{ parzyste} \\ k - \frac{sign(x)}{\alpha^{2-2/n}} \left|\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}}\right|^{1/n} & \text{dla } n = \text{ nieparzyste,} \end{cases} \tag{94}$$

  istnieje jedynie dla wymiarów nieparzystych i opisuje defekt topologiczny. Mimo, że funkcja $f(r)$ jest stałą to dla $d > 3$ niektóre skalary krzywizny są rozbieżne, gdy $r \to 0$. Jeśli $n < (d-1)/2$, to rozwiązanie jest asymptotycznie płaskie i może opisywać nagą osobliwość lub czarną dziurę: rozwiązanie jest zawsze nagą osobliwością jeśli $k = 0, -1$; natomiast czarną dziurą opisaną rozwiązaniem postaci

$$f(r) = 1 - r^2 \left(\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}r^{d-1}}\right)^{1/n}, \tag{95}$$

  dla $k = 1$, $M > 0$ oraz dowolnego n. Przechodząc do właściwości termodynamicznych, można pokazać, że temperatura Hawkinga jest związana z promieniem horyzontu zdarzeń poprzez związek $T = \frac{d-2n-1}{4\pi n}\frac{1}{r_+}$. Wykorzystując pierwsze prawo termodynamiki, można pokazać, że entropia S ma postać

$$S = \frac{(d-2)\Sigma_{d-2}}{4G}\frac{n\alpha^{2n-2}}{d-2n}r_+^{d-2n} \tag{96}$$

  i spełnia klasyczną regułę „entropia = 1/4 * powierzchni czarnej dziury" jedynie dla $n = 1$. Dla $n > 1$ entropia ma zawsze mniejszą wartość, niż entropia dla $n = 1$. Pojemność cieplna $C = \frac{\partial M}{\partial T} < 0$, analogicznie jak dla czasoprzestrzeni Schwarzschilda, jest zawsze ujemna, co prowadzi do niestabilności termodynamicznej.

- W przypadku stałej kosmologicznej dodatniej $l^2 > 0$ otrzymujemy rozwiązanie

$$f(r) = \begin{cases} k \pm \frac{r^2}{\alpha^{2-2/n}} \left(\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}} + \frac{1}{l^2}\right)^{1/n} & \text{dla } n = \text{ parzyste} \\ k - \frac{r^2}{\alpha^{2-2/n}} \left|\frac{16\pi GM}{(d-2)\Sigma_{d-2}} + \frac{1}{l^2}\right|^{1/n} & \text{dla } n = \text{ nieparzyste.} \end{cases} \tag{97}$$

  Analogicznie jak poprzednio dla $n = (d-1)/2$ rozwiązanie opisuje defekt topologiczny, natomiast dla $n < (d-1)/2$ czarną dziurę lub nagą osobliwość. Dla $k = 1$ mogą pojawiać się dwa horyzonty: zdarzeń r_+ i kosmologiczny r_c. Horyzonty te łączą się, gdy temperatura Hawkinga

wynosi zero, osiągając wspólny promień $r_n = r_+ = r_c = \left(\frac{d-2n-1}{d-1}\frac{l^2}{\alpha^{2-2n}}\right)^{1/2n}$. Dla $k = 0$ rozwiązanie zawsze opisuje nagą osobliwość. Dla $k = -1$ gałąź dodatnia $f(r)$ może być czarną dziurą. Jeśli $M > 0$, to pojawia się horyzont wewnętrzny i zdarzeń, które łączą się, gdy temperatura Hawkinga się zeruje (horyzont minimalny). Jeśli $M = 0$, to rozwiązanie nadal opisuje czarną dziurę o promieniu $r_{\max} = \left(l/\alpha^{1-n}\right)^{1/n}$ (horyzont maksymalny). Dla przypadku $k = -1$, $M > 0$ interesująca jest potencjalna ujemność entropii ponieważ wynosi ona

$$S = C_0 - \frac{(d-2)\,\Sigma_{d-2}}{4G}\frac{n}{d-2n}\alpha^{2n-2}r_+^{d-2n}, \tag{98}$$

gdzie C_0 stała całkowania. Problem ujemności entropii nie występuje w przypadku $k = -1$, $M < 0$.

- W przypadku ujemnej stałej kosmologicznej $l^2 < 0$ czyli $\widehat{c}_0 > 0$ równanie (91) nie posiada rozwiązań dla parzystych n. Dla $k = 0, 1$ rozwiązanie opisuje nagą osobliwość, natomiast dla $k = -1$ możliwe są rozwiązania opisujące czarną dziurę.

Inny typ teorii Lovelocka określony jest poprzez szczególny dobór współczynników c_p w działaniu (21). Współczynniki c_p określone są poprzez

$$c_p = \begin{cases} (D-2p)!\frac{1}{D-2p}\begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix} l^{-D+2p} & \text{dla } D = 2n-1 \\ (D-2p)!\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} l^{-D+2p} & \text{dla } D = 2n, \end{cases} \tag{99}$$

gdzie D to wymiar czasoprzestrzeni, a l to długość. Taki dobór współczynników wynika z żądania od Lagranżjanu niezmienniczości ze względu na grupę Anty-de Sittera [126]. Można pokazać, że rozwiązanie równań pola dla czasoprzestrzeni typu (89) ma postać

$$f(r) = \begin{cases} k - \left(\frac{2M+2\widetilde{C}_0}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 & \text{dla } D = 2n \\ k - \left(M + \widetilde{C}_0\right)^{\frac{1}{n-1}} + \left(\frac{r}{l}\right)^2 & \text{dla } D = 2n-1, \end{cases} \tag{100}$$

gdzie $\widetilde{C}_0$ to dowolna stała. Przechodząc do własności termodynamicznych można zauważyć, że temperatura Hawkinga

$$T = \begin{cases} \frac{k+(2n-1)(r_+/l)^2}{4\pi(n-1)r_+} & \text{dla } D = 2n \\ \frac{r_+}{2\pi l^2} & \text{dla } D = 2n-1 \end{cases} \tag{101}$$

znacząco różni się w swoim zachowania w zależności od parzystości bądź nieparzystości wymiaru czasoprzestrzeni. Entropia w wymiarach parzystych ma postać

$$S = \pi l^2 \left\{ \left[k + \left(\frac{r_+}{l}\right)^2 \right]^{D/2-1} - k \right\}, \tag{102}$$

natomiast dla wymiarów nieparzystych wyraża się poprzez sumę

$$S = 4\pi\,(n-1)\,l\sum_{m=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n-2 \\ m \end{array}\right)\frac{1}{2m+1}\left(\frac{r_+}{l}\right)^{2m+1} k^{n-2-m}, \tag{103}$$

gdzie $D = 2n-1$. Entropia w ogólności nie spełnia klasycznej reguły „entropia=1/4 powierzchni". Aby zbadać stabilność termodynamiczną, niezbędna jest znajomość pojemności cieplnej, która wynosi

$$C = \begin{cases} 2\pi\,(n-1)\,r_+^2\,\frac{\left[k+(r_+/l)^2\right]^{n-2}\left[(2n-1)(r_+/l)^2+k\right]}{(2n-1)(r_+/l)^2-k} & \text{dla } D = 2n \\ 4\pi\,(n-1)\,r_+\left[k+(r_+/l)^2\right]^{n-2} & \text{dla } D = 2n-1. \end{cases} \tag{104}$$

Aby szczegółowo przeanalizować otrzymane powyżej wielkości, wygodnie jest podzielić je na trzy grupy $k = -1, 0, -1$:

- Dla $k = 1$ możliwe jest ustalenie dowolnej stałej $\widetilde{C}_0$, występującej w (100), w taki sposób, żeby przy znikaniu energii również znikał horyzont zdarzeń [126]. Taki warunek prowadzi do tego, że dla wymiaru parzystego $\widetilde{C}_0 = 0$, a dla nieparzystego $\widetilde{C}_0 = 1$. Rozwiązanie (100) dla $k = 1$ posiada jeden horyzont zdarzeń, przy czym dokładne obliczenie możliwe jest dla wymiarów nieparzystych i wynosi $r_+ = l\sqrt{(M+1)^{\frac{1}{n-1}} - 1}$. Temperatura dla wymiaru parzystego dąży do zera $T \to 0$, gdy $r_+ \to 0$, dla nieparzystego $T \to \infty$, gdy $r_+ \to 0$. Dla wymiaru nieparzystego czarna dziura jest zawsze stabilna ($C > 0$), jednak dla wymiaru parzystego czarna dziura jest niestabilna, gdy $r_+ < l/\sqrt{2n-1}$. W punkcie $r_+ = l/\sqrt{2n-1}$ pojemność cieplna osiąga nieskończoną wartość.

- Dla $k = 0$ stała $\widetilde{C}_0$ wynosi $\widetilde{C} = 0$, bez względu na wymiar. Horyzont zdarzeń r_+ wynosi

$$r_+ = \begin{cases} l\,(2M/l)^{\frac{1}{2n-1}} \\ lM^{\frac{1}{2n-2}}. \end{cases} \tag{105}$$

  Temperatura Hawkinga, bez względu na wymiar, dąży do zera, gdy masa dąży do zera, a zatem i pojemność cieplna jest zawsze dodatnia.

- W przypadku $k = -1$, po wcześniejszym ustaleniu stałej $\widetilde{C}_0 = 0$, można obliczyć horyzont zdarzeń dla wymiaru nieparzystego i wynosi on $r_+ = l\sqrt{M^{\frac{1}{n-1}} + 1}$. Z równania (100) można zauważyć, że $r_+ \geq l$. Własność ta pozwala stwierdzić, że pojemność cieplna jest zawsze dodatnia. Dla tego przypadku występuje również ujemna masa krytyczna M_c jeśli $n = 2\widetilde{k} + 2$, gdzie $\widetilde{k}$ jest liczbą całkowitą. Dla wymiarów parzystych wynosi ona

$$M_c = -\frac{l}{2\sqrt{2\widetilde{k}+2}}\left[\frac{2\widetilde{k}+1}{2\widetilde{k}+2}\right]^{2\widetilde{k}+1}, \tag{106}$$

  natomiast dla nieparzystych $M_c = -1$.

Rozwiązanie równań pola (100) można rozszerzyć poprzez włączenie działania Maxwella [126]. Dla takiego przypadku ma ono postać

$$f(r)=\begin{cases} k-\left(\frac{2M+2\widetilde{C}_0}{r}-\frac{e^2}{(D-3)r^{D-2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{r}{l}\right)^2 & \text{dla } D=2n \\ k-\left(M+\widetilde{C}_0-\frac{e^2}{2(D-3)r^{D-3}}\right)^{\frac{1}{n-1}}+\left(\frac{r}{l}\right)^2 & \text{dla } D=2n-1. \end{cases} \tag{107}$$

Czasoprzestrzeń może mieć dwa horyzonty r_- i r_+, posiada także, oprócz osobliwości w $r=0$, dodatkową osobliwość[9] r_c spełniającą warunek $0<r_c<r_-<r_+$. Entropia opisana jest identycznymi zależnościami (102-103) jak w przypadku pozbawionym pola elektromagnetycznego.

Interesujące jest zachowanie pojemności cieplnej, ponieważ dla nieparzystych wymiarów D jest ona zawsze dodatnia i skończona oraz wynosi zero ($C_e=0$), gdy spełniony jest warunek

$$4\left(k+(r_+/l)^2\right)^{n-2}/l^2=e^2/\left(n-1\right)r_+^{D-1}. \tag{108}$$

Warunek ten gwarantuje nie tylko zerowanie się pojemności cieplnej, ale też powoduje, że czarna dziura staje się wtedy ekstremalna $T=0$.

Dla wymiarów D parzystych, jeśli $k=1$, pojemność cieplna C_e może być ujemna lub dodatnia, a także nieskończona. Nieskończoność ta pojawia się w punktach przejścia z $C_e<0$ do $C_e>0$ [127]. Jeśli $k=-1,0$, to pojemność cieplna jest zawsze skończona i dodatnia [128].

Rozważania dotyczące rozwiązań czarnodziurowych wymagały specyfikacji współczynników c_n w działaniu Lovelocka (21). Możliwa jest analiza temperatury Hawkinga, entropii oraz pojemności cieplnej bez specyfikacji współczynników c_n, jednak przy założeniu, że hiperpowierzchnia horyzontu zdarzeń jest płaska ($k=0$) [129]. Temperatura Hawkinga przyjmuje wtedy nadzwyczaj prostą postać

$$T_{k=0}=\frac{(D-1)\,\widehat{c}_0}{4\pi}r_+, \tag{109}$$

i nie zawiera współczynników $\widehat{c}_n$ $n>0$. Z kolei entropia wynosi

$$S_{k=0}=\frac{\Sigma_D r_+^{D-2}}{4}, \tag{110}$$

gdzie $\Sigma_D r_+^{D-2}$ to powierzchnia horyzontu zdarzeń, a zatem zawsze spełnia regułę „entropia=1/4 powierzchni horyzontu zdarzeń".

Jeśli $k=0$, to masa wyrażona poprzez horyzont zdarzeń przyjmuje postać $M_{k=0}=\frac{(D-2)\Sigma_D r_+^{D-1}}{16\pi}\widehat{c}_0$, co przy pomocy równania (109) pozwala wykazać, że czarna dziura jest zawsze stabilna termodynamicznie ($C>0$).

W czterech wymiarach obowiązuje reguła, która mówi, że dowolne rozwiązanie sferycznie symetryczne w próżni można doprowadzić do rozwiązania Schwarzschilda (twierdzenie Birkhoffa). W przypadku ogólnej teorii Lovelocka można udowodnić analogon tego twierdzenia [130], które mówi:

[9] Istnienie osobliwości r_c można zauważyć analizując zachowanie skalara krzywizny R.

rozwiązanie równania pola teorii Lovelocka bez pól materii o symetrii sferycznej, euklidesowej lub hiperbolicznej można zawsze doprowadzić do statycznego rozwiązania czarnodziurowego typu (89).

Badanie stabilności czarnych dziur Lovelocka sprowadza się, analogicznie jak w przypadku teorii Gaussa-Bonneta, do pytania o istnienia rozwiązań równania (85). Jawna postać funkcji potencjału $V\left(r\left(r^*\right)\right)$ zależy od rodzaju zaburzeń: skalarnych, wektorowych lub tensorowych [131]. Najprostszym rozszerzeniem teorii Gaussa-Bonneta, badanym pod kątem stabilności, jest teoria Lovelocka trzeciego rzędu $\mathcal{L} = c_0\mathcal{L}_0 + c_1\mathcal{L}_1 + c_2\mathcal{L}_2 + c_3\mathcal{L}_3$. Dla wymiarów $D \leq 6$ rozpatrywanie takiej teorii nie jest konieczne jednak dla $D = 7$ i $D = 8$ należy ją uwzględnić. Wprowadzając nowe zmienne $c_0 = -2\Lambda$, $c_1 = 1$, $c_2 = \alpha/2$ i $c_3 = \beta/3$, można dokonać analizy stabilności ze względu na zaburzenia tensorowe sferycznie symetrycznych czarnej dziury (k=1) opisanej metryką (89) [132]. Dla $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, gdy $D = 7$ czarna dziura jest zawsze stabilna, natomiast, gdy $D = 8$ istnieje masa krytyczna czarnej dziury poniżej której staje się ona niestabilna.

Jeśli spełniony jest warunek $c_0 = -2\Lambda = 0$ oraz $c_n \geq 0$, można udowodnić trzy ogólne twierdzenia dotyczące stabilności czarnej dziury opisanej metryką (89):

- poniżej pewnej masy krytycznej i dla wymiarów parzystych czarna dziura jest niestabilna ze względu na zaburzenia typu tensorowego [133]
- dla zaburzeń skalarnych istnieje pewna masa krytyczna poniżej której występuje niestabilność (niestabilność ta pojawia się jedynie dla wymiarów nieparzystych) [134]
- czarna dziura jest zawsze stabilna ze względu na zaburzenia wektorowe [134]

Z powyższych twierdzeń wynika wniosek, że w teorii Lovelocka niewielkie czarne dziury są zawsze niestabilne (bez względu na wymiar).

3 Związek kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni z teorią z wyższymi członami krzywiznowymi

Zadaniem poprzedniego rozdziału było wprowadzenie w tematykę czarnych dziur w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi. W tym rozdziale przedstawione zostaną podstawy teoretyczne oraz metody stosowane w oryginalnej części rozprawy. Pokazane zostanie, że wpływ pól kwantowych na geometrię czasoprzestrzeni może być w pewnych przypadkach interpretowany jako teoria z wyższymi członami krzywiznowymi. Pokazane zostanie, że kluczowym i niezbędnym krokiem do poznania wpływu pól kwantowych jest obliczenie tzw. współczynników HaMiDeW $[a_n]$. Przedstawionych zostanie kilka metod obliczeń tych współczynników.

3.1 Wpływ kwantowego pola skalarnego na geometrię czasoprzestrzeni

Kwantowe pola skalarne propagujące się w klasycznej zakrzywionej czasoprzestrzeni opisane jest funkcjonałem działaniem

$$S_m = \int dx^4 \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \nabla_a \phi - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \tag{111}$$

gdzie R to skalar krzywizny, ξ to dowolna liczba rzeczywista określająca sprzężenie pola z krzywizną, a m to masa pola. Poprzez analogię z półklasyczną elektrodynamiką, gdzie klasyczne pole elektromagnetyczne jest sprzężone z wartością oczekiwaną operatora prądu, poszukiwana jest teoria oparta na równaniach Einsteina, gdzie tensor energii-pędu jest traktowany jako wartość oczekiwana operatora T_{ab}, czyli

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi \left\langle T_{ab} \right\rangle. \tag{112}$$

Zakładając, że znany jest obiekt $\langle T_{ab} \rangle$, można podjąć próbę rozwiązania powyższego równania i poznać wpływ układu kwantowego na geometrię czasoprzestrzeni. Problem ten może być przeformułowany w taki sposób, że poszukiwane jest działanie efektywne W, którego pochodna funkcjonalna liczona względem metryki wynosi $\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} = \langle T_{ab} \rangle$. Działanie efektywne W jest związane z operatorową postacią propagatora Feynmana G_F znaną relacją [135]

$$W = -\frac{1}{2} i \; tr\{\ln(-G_F)\}. \tag{113}$$

Operacja $tr\{...\}$ zdefiniowana jest jako $trM = \int dx^4 \sqrt{-g} \langle x| M |x\rangle$, gdzie $|x\rangle$ to wektory własne operatora x^μ: $x^\mu |x'\rangle = x'^\mu |x'\rangle$, $\langle x'' |x'\rangle = \delta(x'', x')$. Operator G_F jest związany z propagatorem Feynmana poprzez element macierzowy $G_F(x, x') = \langle x| G_F |x'\rangle$. Zdefiniowanie działania efektywnego poprzez (113) powoduje, że $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ jest reprezentowany przez element macierzowy $\frac{\langle out,0|T_{\mu\nu}|0,in\rangle}{\langle out,0|in,0\rangle}$, gdzie $|0,in\rangle$ oraz $|0,out\rangle$ oznaczają stany próżni in i out. Funkcja Greena $G(x, x')$ spełnia równanie

$$\left(\Box - \xi R - m^2\right) G\left(x, x'\right) = -\frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g}}, \tag{114}$$

gdzie $\Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ jest kowariantnym operatorem D'Alemberta. W przypadku pola skalarnego funkcja Greena jest biskalarem, to znaczy obiektem dwupunktowym, który transformuje się jak skalar ze względu na zmianę współrzędnych zarówno w punkcie x, jak i x'. Można ją wyrazić wykorzystując formalizm czasu własnego DeWitta-Schwingera [5]. Pierwszym krokiem tego formalizmu jest zapisanie funkcji Greena w postaci całkowej

$$G\left(x,x'\right) = i\int_0^\infty ds\,\langle x,s\,|x',0\rangle\,, \tag{115}$$

gdzie funkcja $\langle x,s\,|x',0\rangle$ jest wyrażona w postaci

$$\langle x,s\,|x',0\rangle = \frac{i}{\left(4\pi i s\right)^2}e^{-im^2 s}\exp\left(\frac{i\sigma}{2s}\right)\triangle^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n\,a_n\left(x,x'\right)\qquad \lim_{x'\to x} a_0 = 1. \tag{116}$$

Jest to tzw. „ansatz" DeWitta [5]. Funkcja $\sigma = \sigma\left(x,x'\right)$ to funkcja dwupunktowa, która zdefiniowana jest jako połowa kwadratu długości geodezyjnej poprowadzonej między punktami x i x'. Funkcja $\triangle = \triangle\left(x,x'\right)$ zdefiniowana jest przez

$$\triangle = \triangle\left(x,x'\right) = (-g)^{-1/2}\left(x\right)\det\left(\nabla_{b'}\nabla_a\sigma\right)(-g)^{-1/2}\left(x'\right) \tag{117}$$

i nazywana wyznacznikiem Van Vlecka-Morette [5]. Współczynniki a_n są znane pod wieloma nazwami: współczynniki jądra cieplnego (ang. „heat kernel coefficients"), współczynniki HaMiDeW, współczynniki HMDS, współczynniki DeWitta, współczynniki Seeleya-Gilkeya lub współczynniki Minakshisundarama-Plejela. Nazwy te pochodzą od nazwisk osób, które wniosły znaczący wkład w rozwój dziedziny fizyki matematycznej dotyczącej tych obiektów. Wykorzystując równanie Greena (114), można pokazać, że a_n spełnia równanie rekurencyjne

$$\sigma^{;a}a_{n+1;a} + (n+1)\,a_{n+1} - \triangle^{-1/2}\left(\triangle^{1/2}a_n\right)_{;a}^{\;a} = -R\xi a_n, \tag{118}$$
$$a_n = a_n\left(x,x'\right),$$

Szczególnie istotne dla rozwiązania problemu zwrotnego działania pola na geometrię czasoprzestrzeni jest policzenie współczynników a_n w granicy koincydencji. Granica koincydencji a_n oznaczona jako $[a_n]$ jest zdefiniowana następująco:

$$[a_n] = \lim_{x\to x'} a_n\left(x,x'\right). \tag{119}$$

Wykorzystując wzory (113), (115) oraz (116) można pokazać, że działanie efektywne W wiąże się ze współczynnikami $[a_n]$ poprzez

$$W = -\frac{1}{32\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty ds\frac{1}{s^3}e^{-im^2 s}\,(is)^n\int dx^4\sqrt{-g}\,[a_n]\,. \tag{120}$$

Fundamentalne znaczenie dla znajomości działania efektywnego mają zatem współczynniki $[a_n]$. Działanie W można symbolicznie zapisać jako sumę obiektów: nieskończonego $W_{\rm div}$ oraz skończonego W_{ren}. W wyniku procedury regularyzacji nieskończoności działanie $W_{\rm div}$ skutkuje pojawieniem się w działaniu Einsteina dodatkowych członów: R^2, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{abcd}R^{abcd}$ [135]. Działanie W_{ren} po uprzednim wycałkowaniu po zmiennej s wynosi

$$W_{ren} \;=\; \frac{1}{32\pi^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n-3)!}{(m^2)^{n-2}}\int d^4x\sqrt{-g}[a_n]. \tag{121}$$

Współczynniki $[a_n]$ w jawnej postaci to niezmienniki krzywiznowe, których rząd jest tym wyższy, im wyższy jest indeks n. Chcąc zatem rozwiązać równania Einsteina należy poszukać rozwiązań teorii z wyższymi członami krzywiznowymi. Policzenie W_{ren} wymaga znajomości wszystkich współczynników $[a_n]$, gdzie n=3, 4, 5,..., ∞. Operacja ta jest niemożliwa ze względu na szybki wzrost komplikacji obliczeń wraz ze wzrostem indeksu n współczynnika $[a_n]$. W pewnych przypadkach uzasadnione jest rozpatrywanie jedynie kilku pierwszych wyrazów sumy (121), np. $n = 3, 4$, a pominięcie pozostałych. Takie uproszczenie jest uzasadnione w przypadku, gdy masa m pola jest dostatecznie duża.

3.2 Bitensory σ, $\triangle^{1/2}$, $\triangle^{-1/2}$ oraz ich granice koincydencji

Najważniejszym obiektem niezbędnym w obliczeniach współczynników HaMiDeW jest funkcja Synge'a $\sigma(x,x')$ (tzw. „world function") [136,137]. Funkcja ta jest połową kwadratu długości geodezyjnej pomiedzy punktami x' i x [136] i dla czasoprzestrzeni płaskiej ma postać $\sigma = \frac{1}{2}\eta_{ab}(x-x')^a(x-x')^b$. Najprostsze własności funkcji Synge'a i jej pochodnych kowariantnych to [136,137]

$$[\sigma] \;=\; \lim_{x\to x'}\sigma\left(x,x'\right) = 0, \tag{122}$$

$$[\sigma_{;a}] \;=\; \lim_{x\to x'}\sigma_{;a}\left(x,x'\right) = 0, \tag{123}$$

$$[\sigma_{;ab}] \;=\; \lim_{x\to x'}\sigma_{;ab}\left(x,x'\right) = g_{a'b'}, \tag{124}$$

oraz

$$g^{ab}\sigma_{;a}\sigma_{;b} = \sigma. \tag{125}$$

Wyznacznik Van Vlecka-Morette [5,136] jest zdefiniowany jako

$$\triangle = \triangle\left(x,x'\right) = (-g)^{-1/2}(x)\det\left(\nabla_{b'}\nabla_a\sigma\right)(-g)^{-1/2}\left(x'\right). \tag{126}$$

Biorąc granicę koincydencji powyższego równania, można otrzymać

$$[\triangle] = \left(-g'\right)^{-1}\det\left([\sigma_{ab'}]\right). \tag{127}$$

Obiekt $[\sigma_{ab'}]$ można obliczyć wykorzystując własność $[\sigma_{ab}] = g_{a'b'}$ oraz twierdzenie Synge'a

$$[A_{\ldots a'}] = [A_{\ldots}]_{;a'} - [A_{\ldots a}] \tag{128}$$

słuszne dla dowolnego bitensora A, gdzie kropki oznaczają dowolne indeksy (primowane i nieprimowane) [5,136]. Z obliczeń wynika tożsamość $[\sigma_{ab'}] = -g_{a'b'}$, co prowadzi do

$$[\triangle] = 1. \tag{129}$$

Pierwiastek wyznacznika Van Vlecka-Morette $\Delta^{1/2}$ spełnia równanie

$$4\triangle^{1/2} = 2\left(\triangle^{1/2}\right)_{;a}\sigma^{;a} + \triangle^{1/2}\sigma_{;a}{}^{a}, \tag{130}$$

które analogicznie jak (125) w przypadku σ, umożliwia obliczenie granic koincydencji $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$ w sposób rekurencyjny (dowód [136]). Należy zwrócić uwagę, że do obliczeń niezbędna jest znajomość granic koincydencji pochodnych funkcji σ.

Obliczenie $[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}]$ wymaga skorzystania z tożsamości

$$\triangle^{1/2}\triangle^{-1/2} = 1 \tag{131}$$

przy założeniu, że znane są odpowiednie obiekty $[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_s}]$.

3.3 Metody obliczania współczynników $[a_n]$

3.3.1 Metoda rekurencyjna jawnie kowariantna

Podstawową metodą obliczania współczynników $[a_k]$ i $[\nabla_{w_1}\nabla_{w_2}\ldots\nabla_{w_n}a_k]$ jest metoda rekurencyjna jawnie kowariantna [138, 137, 5, 139]. Pierwszym jej krokiem jest utworzenie równania umożliwiającego obliczenie $[a_n]$. Do tego celu wykorzystywane jest równanie (118) rozpatrywane w granicy koincydencji. Po zamianie indeksów $n \to n-1$ i elementarnych przekształceniach pozwala ono otrzymać tożsamość

$$[a_n] = \frac{1}{n}\left\{-R\xi\,[a_{n-1}] + [\triangle^{-1/2}\left(\triangle^{1/2}a_{n-1}\right)_{;a}{}^{a}] - [\sigma^{;a}a_{n;a}]\right\}. \tag{132}$$

Korzystając z własności $[AB] = [A]\,[B]$, gdzie A i B to dowolne funkcje dwupunktowe można otrzymać

$$\begin{aligned}[a_n] \;=\; & \frac{1}{n}\Big\{-R\xi\,[a_{n-1}] + [\triangle^{-1/2}]\Big([\triangle^{1/2}{}_{;a}{}^{a}]\,[a_{n-1}] + 2[\triangle^{1/2;a}]\,[a_{n-1;a}] \\ & +[\triangle^{1/2}][a_{n-1;a}{}^{a}]\Big) - [\sigma^{;a}]\,[a_{n;a}]\Big\}.\end{aligned} \tag{133}$$

Zatem do obliczenia $[a_n]$ wymagana jest znajomość obiektów $[a_{n;a}]$, $[a_{n-1}]$, $[a_{n-1;a}{}^{a}]$, $\left[\triangle^{-1/2}\right]$, $[\sigma^{;a}]$, $\left[\triangle^{1/2}\right]$ i $[\triangle^{1/2}{}_{;a}{}^{a}]$. Metoda otrzymywania granic koincydencji bitensorów σ, $\triangle^{1/2}$, $\triangle^{-1/2}$ oraz ich pochodnych została przedstawiona w rozdziale 3.2, dlatego założono, że funkcje $\left[\triangle^{-1/2}\right]$, $[\sigma^{;a}]$,

$\left[\triangle^{1/2}\right]$, $[\triangle^{1/2}{}_{;a}{}^{a}]$ są już znane. Ich jawna postać to

$$\begin{aligned}[\sigma^{;a}] &= [\triangle^{-1/2;a}] = 0,\\ [\triangle^{1/2}] &= [\triangle^{-1/2}] = 1,\\ [\triangle^{1/2}{}_{;a}{}^{a}] &= \frac{1}{6}R.\end{aligned} \tag{134}$$

Po uwzględnieniu powyższych tożsamości w (133) można otrzymać

$$[a_n] = \frac{1}{n}\left\{-R\xi[a_{n-1}] + \frac{1}{6}R[a_{n-1}] + [a_{n-1;a}{}^{a}]\right\}. \tag{135}$$

Równanie (135) ma charakter rekurencyjny w tym sensie, że posiadanie informacji o granicy koincydencji dwóch współczynników niższego rzędu $[a_{n-1}]$ oraz $[a_{n-1;a}{}^{a}]$ umożliwia obliczenie współczynników wyższego rzędu $[a_n]$. Kolejnym krokiem jest obliczenie współczynników $[a_{n-1}]$ i $[a_{n-1;a}{}^{a}]$ przy ponownym wykorzystaniu równania (118). Na podstawie równania (118) można określić prawidłowość, która wskazuje, jakie obiekty należy obliczyć, żeby uzyskać poszukiwany $[a_n]$. Stosując oznaczenia $[a_{k;a_1\ldots a_m}] = [a_k^{(m)}]$, aby obliczyć $[a_n^{(0)}] = [a_n]$ należy uprzednio obliczyć obiekty $[a_{n-1}^{(0)}]$, $a_{n-1}^{(1)}]$, $[a_{n-1}^{(2)}]$, $[a_{n-2}^{(0)}]$, $a_{n-2}^{(1)}]$, $[a_{n-2}^{(2)}]$, $[a_{n-2}^{(3)}]$, $[a_{n-2}^{(4)}]$, $[a_{n-3}^{(0)}]$, $a_{n-3}^{(1)}]$, $[a_{n-3}^{(2)}]$, $[a_{n-3}^{(3)}]$, $[a_{n-3}^{(4)}]$, $[a_{n-3}^{(5)}]$, $[a_{n-3}^{(6)}]$,..., $[a_0^{(0)}]$, $[a_0^{(1)}]$, $[a_0^{(2)}]$,..., $[a_0^{(2n)}]$. Na przykład, jeśli celem jest obliczenie współczynnika $[a_1]$, to do obliczeń niezbędna jest znajomość trzech współczynników $[a_0^{(0)}]$, $[a_0^{(1)}]$, $[a_0^{(2)}]$. Ogólna zasada obliczeń mówi, że im wyższy jest indeks n współczynnika $[a_n^{(0)}]$, tym większą liczbę współczynników niższego rzędu należy obliczyć aby go uzyskać i tym samym wzrasta komplikacja obliczeń. Oprócz współczynników $[a_k^{(i)}]$ należy również posiadać odpowiednie współczynniki $[\triangle^{1/2(m)}]$, $[\triangle^{-1/2(n)}]$, $[\sigma^{(s)}]$, co wynika z równania (133). Również dla tych bitensorów istnieje zasada, która mówi, że aby obliczyć $[a_k^{(n)}]$ należy posiadać granice koincydencji

$$[\triangle^{1/2}],\ [\triangle^{1/2(1)}],\ldots,\ [\triangle^{1/2(n+2)}], \tag{136}$$

$$[\triangle^{-1/2}],\ [\triangle^{-1/2(1)}],\ldots,\ [\triangle^{-1/2(n)}] \tag{137}$$

oraz

$$[\sigma],\ [\sigma^{(1)}],\ldots,\ [\sigma^{(n+4)}]. \tag{138}$$

Cztery pierwsze współczynniki HaMideW w granicy koincydencji mają postać:

$$[a_0] = 1, \tag{139}$$

$$[a_1] = \left(\frac{1}{6} - \xi\right)R, \tag{140}$$

$$\begin{aligned}[a_2] = {}& \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{6}\xi R^2 + \frac{1}{2}\xi^2 R^2 + \frac{1}{60}R_{;a}{}^{a} - \frac{1}{6}\xi R_{;a}{}^{a} + \frac{1}{30}R_{ab}{}^{;ba} - \frac{1}{180}R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{270}R_{abcd}R^{abcd}\\ &+\frac{1}{270}R_{abcd}R^{acbd},\end{aligned} \tag{141}$$

$$[a_3] = a_3^{(0)} + \xi a_3^{(1)} + \xi^2 a_3^{(2)} + \xi^3 a_3^{(3)}, \tag{142}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_3^{(0)} &= \frac{11}{1680}R^3 + \frac{17}{5040}R_{;a}R^{;a} - \frac{1}{2520}R_{ab;c}R^{ab;c} - \frac{1}{1260}R_{ab;c}R^{ac;b} + \frac{1}{560}R_{abcd;e}R^{abcd;e} + \frac{1}{180}RR^a_{;a} \\
&+\frac{1}{280}R_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b} + \frac{1}{420}R_{;ab}R^{ab} - \frac{1}{630}R_{ab;c}{}^{c}R^{ab} - \frac{109}{2520}RR_{ab}R^{ab} + \frac{73}{1890}R_{ab}R_{c}{}^{a}R^{bc} \\
&+\frac{1}{210}RR_{abcd}R^{abcd} + \frac{1}{105}R_{ab;cd}R^{acbd} + \frac{19}{630}R_{ab}R_{cd}R^{acbd} - \frac{1}{189}R_{abcd}R_{ef}{}^{ab}R^{cdef}, \qquad (143) \\
a_3^{(1)} &= -\frac{1}{72}R^3 - \frac{1}{30}R_{;a}R^{;a} - \frac{11}{180}RR_{;a}{}^{a} - \frac{1}{180}RR_{abcd}R^{abcd} - \frac{1}{60}R_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b} - \frac{1}{90}R_{;ab}R^{ab} \\
&+\frac{1}{180}RR_{ab}R^{ab}, \\
a_3^{(2)} &= \frac{1}{12}R^3 + \frac{1}{12}R_{;a}R^{;a} + \frac{1}{6}RR_{;a}{}^{a}, \qquad a_3^{(3)} = -\frac{1}{6}R^3, \qquad (144)
\end{aligned}$$

3.3.2 Metoda obliczania z wykorzystaniem współczynników Hadamarda

Metoda ta wykorzystuje związek pomiędzy dwiema reprezentacjami propagatora Feynmana: reprezentacją DeWitta-Schwingera (współczynniki $a_n(x,x')$) i reprezentacją Hadamarda (współczynniki Hadamarda). Związek ten pozwala znaleźć odpowiednie współczynniki HaMiDeW mając odpowiednie współczynniki Hadamarda. Pierwszym krokiem tej metody jest wyrażenie d-wymiarowego propagatora Feynmana w reprezentacji Hadamarda [139, 140, 71, 141, 142] w postaci

$$G^{\mathrm{F}}(x,x') = i\,\frac{(d/2-2)!}{2(2\pi)^{d/2}}\left[\frac{U(x,x')}{[\sigma(x,x')+i\epsilon]^{d/2-1}} + V(x,x')\ln[\sigma(x,x')+i\epsilon] + W(x,x')\right], \tag{145}$$

gdzie $U(x,x')$, $V(x,x')$ i $W(x,x')$ to nieosobliwe biskalary, natomiast d jest wymiarem czasoprzestrzeni. Powyższa reprezentacja jest słuszna dla czasoprzestrzeni o wymiarze parzystym. Po przedstawieniu funkcji $U(x,x')$, $V(x,x')$ i $W(x,x')$ za pomocą szeregu

$$U(x,x') = \sum_{n=0}^{d/2-2} U_n\left(x,x'\right)\sigma^n\left(x,x'\right), \tag{146}$$

$$V(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n\left(x,x'\right)\sigma^n\left(x,x'\right), \tag{147}$$

$$W(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n\left(x,x'\right)\sigma^n\left(x,x'\right) \tag{148}$$

i wykorzystaniu równania Greena (114) można pokazać, że każdy ze współczynników Hadamarda $U_n(x,x')$, $V_n(x,x')$ i $W_n(x,x')$ spełnia równania rekurencyjne. Dla współczynnika U_n mają one

postać [140]

$$(n+1)(2n+4-d)U_{n+1} + (2n+4-d)U_{n+1;a}\sigma^{;a} - (2n+4-d)U_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;a}\sigma^{;a} + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)U_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, ..., d/2-3, \tag{149}$$

$$U_0 = \Delta^{1/2}. \tag{150}$$

Współczynniki V_n spełniają równania

$$(n+1)(2n+d)V_{n+1} + 2(n+1)V_{n+1;a}\sigma^{;a} - 2(n+1)V_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;a}\sigma^{;a} + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)V_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{151}$$

$$(d-2)V_0 + 2V_{0;a}\sigma^{;a} - 2V_0\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;a}\sigma^{;a} + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)U_{d/2-2} = 0. \tag{152}$$

Współczynniki W_n spełniają równania

$$(n+1)(2n+d)W_{n+1} + 2(n+1)W_{n+1;a}\sigma^{;a} - 2(n+1)W_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;a}\sigma^{;a} + (4n+2+d)V_{n+1} + 2V_{n+1;a}\sigma^{;a} - 2V_{n+1}\Delta^{-1/2}\Delta^{1/2}{}_{;a}\sigma^{;a} + \left(\Box_x - m^2 - \xi R\right)W_n = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{153}$$

Między współczynnikami a_n oraz V_n istnieje związek

$$\begin{aligned} V_n(x,x') &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+d/2-1}n!(d/2-2)!}\tilde{A}_{n+d/2-1}(m^2;x,x'), \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \\ \Delta^{1/2}a_n(x,x') &= \tilde{A}_n(m^2=0;x,x'). \end{aligned} \tag{154}$$

Równania (149-152) pozwalają obliczyć współczynniki $[V_n]$ dla czasoprzestrzeni o wymiarze $d = 4$, a następnie otrzymać za pomocą relacji (154) odpowiadające im współczynniki $[a_k]$.

3.3.3 Metoda obliczania poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych

Prekursorem obliczania współczynników $[a_k]$ poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych był Sakai [143]. Metoda ta do otrzymania współczynników $[a_k]$ wykorzystuje wyróżniony układ współrzędnych tzw. współrzędnych normalnych. W pierwszym kroku metody należy przedstawić funkcję $\langle x, s\,|x', 0\rangle$ w alternatywnej do (116) postaci

$$\langle x, s\,\big|x', 0\rangle = \frac{i}{(4\pi i s)^2}e^{-im^2 s}\exp\left(\frac{i\tau^2}{4s}\right)U\left(x, x', s\right), \tag{155}$$

gdzie τ to połowa kwadratu długości geodezyjnej pomiędzy punktami x' i x. Zamiast dowolnej współrzędnej x należy wprowadzić szczególne współrzędne tzw. współrzędne normalne (ang. „Riemann normal coordinates") oznaczone y. Współrzędne normalne y mają swój początek w punkcie

x' oraz spełniają własności [144, 145, 146, 147]

$$\begin{aligned} g_{ab}|_{x'} &= \eta_{ab}, \;\; \Gamma^c{}_{ab}|_{x'} = 0, \\ \Gamma^c{}_{(ab,a_1)}\Big|_{x'} &= 0, \;\; \Gamma^c{}_{(ab,a_1a_2)}\Big|_{x'} = 0, \;\; \Gamma^c{}_{(ab,a_1a_2a_3)}\Big|_{x'} = 0 \;\; \text{itd.} \end{aligned} \tag{156}$$

Po szeregu przekształceń [148, 149], wykorzystując równanie Greena (114), można otrzymać tożsamość, którą spełnia funkcja $U(y,0,s)$ we współrzędnych normalnych

$$i\frac{\partial U}{\partial s} = -\nabla^a\nabla_a U + \xi R U - \frac{iy^a}{s}\left[\nabla_a U + U\nabla_a \ln(-g)^{1/4}\right]. \tag{157}$$

Po podstawieniu $U(y,0,s) = (-g)^{-1/4}\sum_{n=0}^{\infty}(is)^n f_n(y,0)$ alternatywna postać powyższego wzoru to

$$(n+1) f_{n+1} = (-g)^{-1/4}\partial_a\left\{\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b\left[(-g)^{-1/4} f_n\right]\right\} - R f_n - y^a\nabla_a f_{n+1}. \tag{158}$$

Ponieważ celem jest otrzymanie współczynnika $[a_n]$, należy znać relację wiążącą go z f_n. Jest ona zadana przez $[f_n] = [a_n]$. Rozwiniecie Taylora funkcji f_n wokół punktu $y = 0$ do rzędu k to

$$f_n^{(0,k)} = f_n^{(0)}(0) + \sum_{m=1}^{k}\varepsilon^m f_n^{(m)}(0)\, y^{a_1}...y^{a_m}, \tag{159}$$

gdzie $f_n^{(m)}(0) = \left[f_{n;(a_1...a_n)}\right]/m!$, $f_n^{(0)}(0) = [f_n]$. Parametr ε ma znaczenie informacyjne, a potęga przy nim znakuje rząd rozwiniecia Taylora. Współczynnik $f_n^{(m)}(0)$ wiąże się z $[a_n]$ poprzez relację $f_n^{(0)}(0) = [a_n]$. Równanie (158) można przedstawić w postaci szeregu Taylora wokół punktu $y = 0$. Poszukiwane rozwiązanie równania (158) jest wtedy równoważne poszukiwaniu rozwiązania każdego jego m-tego rzędu rozwinięcia

$$\begin{aligned} (n+m+1) f_{n+1}^{(m)}(0)\, y^{a_1}...y^{a_m} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^m}\Big((-g)^{-1/4}\partial_a\left\{\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b\left((-g)^{-1/4} f_n^{(0,m+2)}\right)\right\} \\ &\quad - R f_n^{(0,m)}\Big). \end{aligned} \tag{160}$$

Operacja $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^m}$ ma na celu wydobycie z wyrażenia, na które działa, jego m-tego rozwinięcia Taylora. Powyższe równania należy rozwiązać aby znaleźć $f_n^{(0)}(0) = [a_n]$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy znamy rozwinięcia Taylora obiektów $\sqrt{-g}$, g^{ab},$(-g)^{-1/4}$. Zatem kluczowym posunięciem będzie teraz znalezienie rozwinięcia we współrzędnych normalnych wszystkich elementów metrycznych[10], analogicznie jak to ma miejsce w równaniu (159). Tradycyjna metoda rozwijana jest skomplikowana obliczeniowo [144], dlatego posłużono się bardziej efektywną [150]. Podstawą tej metody jest algorytm rozwijania tetrady[11] $e_a^{(\mu)}(y)$ w szereg Taylora we współrzędnych normalnych. Opiera się on na

[10] Elementy metryczne to wszelkie obiekty skonstruowane przy pomocy metryki, między innymi g, $\sqrt{-g}$, R.

[11] W każdym wyrażeniu, w którym pojawia się tetrada $e_a^{(\nu)}$ litery greckie znakują numer tetrady, natomiast łacińskie składowe tetrady.

rekurencyjnym związku określającym współczynniki rozwinięcia

$$(y\cdot\nabla_0)^n\, e_a^{(\mu)}(0)=\frac{n-1}{n+1}\,(y\cdot\nabla_0)^{n-2}\left[R^{\mu}_{..\nu}(0)\, e_a^{(\nu)}(0)\right], \tag{161}$$

gdzie $R^{\mu}_{..\nu}(0)=R^{\mu}_{ab\nu}(0)\,y^a y^b$, natomiast obiekty ∇_0, $R^{\mu}_{..\nu}(0)$, $e_a^{(\nu)}(0)$ liczone są w punkcie $y=0$. Wynikiem zastosowania tego algorytmu jest

$$e=\widehat{1}+\frac{1}{6}\mathcal{R}+\frac{1}{12}\,(y\cdot\nabla_0)\,\mathcal{R}+..., \tag{162}$$

gdzie $\mathcal{R}=R^{\nu}_{..a}(0)$, $\widehat{1}=\delta^{\nu}_{a}$, $e=e_a^{(\nu)}(y)$, oraz $y\cdot\nabla_0=y^a\nabla_{0a}$. Powyższy wzór celowo został przedstawiony w sposób bezindeksowy. Wprowadzenie niekonwencjonalnego bezindeksowego formalizmu jest uzasadnione. Uniknięcie jawnej manipulacji indeksami przyspiesza lub w pewnych przypadkach umożliwia jakiekolwiek obliczenia. Taka sytuacja pojawia się w przypadku obliczeń $[a_4]$, ponieważ należy wtedy rozwinąć tetradę do ósmego rzędu, co w przypadku klasycznych metod (indeksowych) jest bardzo skomplikowane. Po przedstawieniu $(-g)^{-1/4}$, $\sqrt{-g}$, g^{ab} w postaci rozwinięcia, analogicznie jak w przypadku tetrady we wzorze (162), można przystąpić do końcowej fazy obliczeń współczynnika $[a_n]$. Poszukiwany obiekt $[a_n]$ można otrzymać rozwiązując układ równań (160), oraz wykorzystując związek $[a_n]=f_n^{(0)}(0)$.

3.3.4 Metoda rekurencyjna jawnie kowariantna bezindeksowa

W pierwszym kroku metoda rekurencyjna jawnie kowariantna rozwija każdy obiekt metryczny w postaci kowariantnego szeregu Taylora. Pod tym względem jest podobna do metody omawianej w poprzednim podrozdziale, dalej jednak koncepcja jest już inna. Zasadniczy pomysł Avramidiego - twórcy tej metody [151] - polegał na zapisie rozwinięcia Taylora w sposób bezindeksowy, w postaci analogicznej do notacji Diraca. Nowością jest również wprowadzenie operatorów, które działają na wektory bazowe rozwinięcia Taylora („wektory Diraca"). Wszystkie te zabiegi mają na celu maksymalne uproszczenie obliczeń[12].

Kowariantne rozwinięcie Taylora dowolnego pola tensorowego $A^{b_1\ldots b_m}_{a_1\ldots a_n}$ w punkcie x' jest zdefiniowane wzorem

$$A^{b_1\ldots b_m}_{a_1\ldots a_n}=\mathcal{P}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\sigma^{c'_1}\ldots\sigma^{c'_k}\overline{A}^{b'_1\ldots b'_m}_{a'_1\ldots a'_n c'_1\ldots c'_k},\quad \overline{A}^{b'_1\ldots b'_m}_{a'_1\ldots a'_n c'_1\ldots c'_k}=\left[\nabla_{(c_1\ldots}\nabla_{c_k)}\overline{A}^{b'_1\ldots b'_m}_{a'_1\ldots a'_n}\right], \tag{163}$$

gdzie przesunięcie równoległe z punktu x' do x określone zostało umownie operatorem $\mathcal{P}$ [7, 69].

[12] Przykład obliczeń ukazujący praktyczne wykorzystanie formalizmu Avramidiego przedstawiony został w dodatku „Formalizm Avramidiego - przykład obliczeń".

Wprowadźmy notację analogiczną do notacji Diraca

$$\begin{aligned} |0\rangle &= 1, \\ |n\rangle &= \left|a'_1...a'_n\right\rangle = \frac{(-1)^k}{k!}\sigma^{a'_1}...\sigma^{a'_k}, \qquad (164) \\ \langle m| &= \langle a'_1...a'_m| = (-1)^m g^{a_1}_{a'_1}...g^{a_m}_{a'_m}\nabla_{(a_1}...\nabla_{a_m)}\delta\left(x,x'\right), \\ |n\rangle\otimes|k\rangle &= \frac{(n+k)!}{n!k!}\left|n+k\right\rangle, \qquad (165) \end{aligned}$$

gdzie $\langle m|$ to funkcja dualna do $|m\rangle$. Iloczyn skalarny miedzy „wektorami Diraca" jest zdefiniowany następująco

$$\begin{aligned} \langle m|\,n\rangle &= \int d^n x\left\langle a'_1...a'_m\right|\,b'_1...b'_n\rangle, \\ \langle m|\,n\rangle &= \delta_{mn}1_{(n)}, \quad 1_{(n)} = \delta^{b_1}_{(a_1}...\delta^{b_n}_{a_n)}. \qquad (166) \end{aligned}$$

Korzystając z wprowadzonej notacji Diraca kowariantny szereg Taylora(163) dowolnego tensora φ można przedstawić w postaci

$$|\varphi\rangle = P\sum_{n\geq 0}|n\rangle\langle n|\,\varphi\rangle, \qquad (167)$$

natomiast dowolny liniowy operator różniczkowy F działający na φ można wyrazić następująco:

$$F = \sum_{m,n\geq 0} P\,|m\rangle\langle m|\,P^{-1}FP\,|n\rangle\langle n|\,P^{-1}. \qquad (168)$$

Kluczowym krokiem tej metody jest wyrażenie wszelkich obiektów (operatorów i tensorów) w bazie wektorów $|n\rangle$. Pierwszym operatorem wprowadzonym w metodzie Avramidiego jest $D \equiv \sigma^\mu\nabla_\mu$. Można udowodnić, że σ^μ i $\sigma^{\mu'}$ to funkcje własne operatora D z wartościami własnymi równymi 1. Posiłkując się tą własnością można pokazać

$$D\,|n\rangle = n\,|n\rangle. \qquad (169)$$

Istotne jest również wprowadzenie nowych obiektów

$$\begin{aligned} \eta^{\nu'}{}_\mu &= \nabla_\mu\sigma^{\nu'}, \quad \eta^{s'}{}_\mu\,\gamma^\mu{}_{\nu'} = \widehat{1}, \;\; X^{\mu'\nu'} = \eta^{\mu'}{}_\mu g^{\mu\nu}\eta^{\nu'}{}_\nu, \qquad (170) \\ \overline{\eta}^{\mu'}{}_{\nu'} &= g^\nu{}_{\nu'}\eta^{\mu'}{}_\nu, \;\; \overline{\gamma}^{\mu'}{}_{\nu'} = g^{\mu'}{}_\mu\gamma^\mu{}_{\nu'}, \;\; \overline{\gamma} = -\widehat{1}+\widehat{\overline{\gamma}}. \end{aligned}$$

Obiekt $\gamma^\mu{}_{\nu'}$ definiujemy jako macierz odwrotną[13] do η czyli $\gamma = \eta^{-1}$. Równania określające $\widehat{\overline{\gamma}}$ to

$$\left\{\widehat{1}\left(D^2+D\right)+\overline{S}\right\}\widehat{\overline{\gamma}} = \overline{S} \quad \text{i} \quad \left[\widehat{\overline{\gamma}}\right] = 0, \qquad (171)$$

gdzie $\overline{S}$ jest to macierz o elementach $\overline{S}^{a'}_{b'} = R^{a'}{}_{c'b'd'}\sigma^{c'}\sigma^{d'}$. Traktując $\overline{S}$ jako perturbację można

[13] Używana jest notacja macierzowa $\eta = \eta^{\nu'}{}_\mu$, $\gamma = \gamma^\mu{}_{\nu'}$.

formalnie rozwiązać powyższe równanie otrzymując

$$\widehat{\overline{\gamma}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ \left(D^2 + D\right)^{-1} \overline{S} \right\}^k \widehat{1}. \tag{172}$$

Aby przedstawić $\widehat{\overline{\gamma}}$ w bazie „wektorów Diraca" (165) należy uprzednio w bazie tej wyrazić każdy z obiektów $\left(D^2 + D\right)^{-1}$ i $\overline{S}$:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \sum_{k\geq 2} k\,(k-1)\, R^{a'}{}_{(a'_1|b'|a'_2\ldots a'_k)}\, |k\rangle\,, \\ \left(D^2 + D\right)^{-1} &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+n}\, |n\rangle\, \langle n|\,. \end{aligned} \tag{173}$$

Stosując powyższe tożsamości w równaniu (172), można otrzymać $\widehat{\overline{\gamma}}$ w postaci

$$\widehat{\overline{\gamma}} = \sum_{k\geq 2} \widehat{\overline{\gamma}}_{(k)}\, |k\rangle\,, \tag{174}$$

gdzie $\widehat{\overline{\gamma}}_{(k)}$ to współczynniki rozwinięcia. Obiekt ten łączy się z wyznacznikiem Van Vlecka-Morette poprzez związek

$$\begin{aligned} \Delta &= \det\left(-\overline{\eta}\right) = \det\left(-\overline{\gamma}\right)^{-1} = \exp\left(2\zeta\right) \\ \zeta &= -\frac{1}{2} Tr \log\left(-\overline{\gamma}\right). \end{aligned} \tag{175}$$

Wyznacznik Van Vlecka-Morette, podobnie jak $\widehat{\overline{\gamma}}$, można przedstawić w bazie „wektorów Diraca"

$$\Delta = \sum_{k\geq 0} \Delta_{(k)}\, |k\rangle\,. \tag{176}$$

Z (175) można otrzymać również relację $\overline{\gamma}$ z takimi obiektami jak Δ^n. Kolejnym operatorem w metodzie Avramidiego, który należy przedstawić w bazie funkcji własnych operatora D (168) jest $\Box = \nabla_a \nabla^a$. Operator ∇_μ można wyrazić przy pomocy operatora $\overline{\nabla}_{b'} = \frac{\partial}{\partial \sigma^{b'}}$ poprzez tożsamość

$$\nabla_a = \eta^{b'}{}_a \overline{\nabla}_{b'}. \tag{177}$$

Wykorzystując (170) i (175) można udowodnić

$$\Box = \left(Y^{w'} - 2\zeta_{s'} X^{s'w'}\right) \overline{\nabla}_{w'} + X^{s'w'} \overline{\nabla}_{s'} \overline{\nabla}_{w'}, \tag{178}$$

gdzie $Y^{w'} = \overline{\nabla}_{s'} X^{s'w'}$ i $\zeta_{s'} = \overline{\nabla}_{s'} \zeta$. Operator $\overline{\nabla}_{\nu'}$ ma bardzo proste obliczeniowo działanie: $\overline{\nabla}_{s'}\, |n\rangle \sim |n-1\rangle$, a z tego z kolei wynika, że $\overline{\nabla}_{s'}$ ma podobną własność jak operator anihilacji w mechanice kwantowej. Równanie (118) można napisać w postaci

$$a_{k+1} = (k+1+D)^{-1} F a_k \tag{179}$$

lub

$$a_{k+1} = (k+1+D)^{-1} F (k+D)^{-1} F ... (1+D)^{-1} F a_0, \tag{180}$$

gdzie

$$F = \triangle^{-1/2} \Box \triangle^{1/2} - R\xi. \tag{181}$$

Operator $(k+1+D)^{-1}$ w formie rozwiniecia w bazie $|n\rangle$ to

$$(k+1+D)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{k+1+n} |n\rangle \langle n| , \tag{182}$$

natomiast obiekt a_k to $a_k = P \sum_{n \geq 0} |n\rangle \langle n| \, a_k \rangle$. Ostatecznie po wykorzystaniu (180) można otrzymać

$$\langle n| \, a_{k+1} \rangle = \sum_{n_1, ..., n_k \geq 0} \frac{1}{k+1+n} \frac{1}{k+n_k} ... \frac{1}{1+n_1} \langle n| F |n_k\rangle \langle n_k| F |n_{k-1}\rangle ... \langle n_1| F |0\rangle . \tag{183}$$

Uzyskanie $\langle 0| \, a_{k+1} \rangle$ z powyższego równania oznacza znalezienie $[a_{k+1}]$ na podstawie tożsamości

$$\langle 0| \, a_n \rangle = [a_n] . \tag{184}$$

Ze wzoru (183) wynika, że kluczowe znaczenie w uzyskaniu $[a_n]$ ma policzenie elementów macierzowych $\langle n_k| F |n_m\rangle$.

4 Czarne dziury w grawitacji kwadratowej

W tym rozdziale przedstawione będą rozwiązania czarnodziurowe równań pola grawitacji kwadratowej. W podrozdziale 4.1 analizowane są rozwiązania kwadratowej grawitacji sprzężonej z elektrodynamiką klasyczną. Zbadane będą własności otrzymanych rozwiązań: horyzont zdarzeń (czy rozwiązanie opisuje czarną dziurę), położenie horyzontu wewnętrznego i zdarzeń oraz własności termodynamiczne czarnych dziur.

Rozdział ten opiera się na wynikach publikacji:

- J. Matyjasek and D. Tryniecki, *Charged black holes in quadratic gravity*, Phys. Rev. **D69,** 124016 (2004).

W podrozdziale 4.2 poddana będzie analizie teoria kwadratowa sprzężona z elektrodynamiką nieliniową. Poszukiwane będzie rozwiązanie opisujące czarną dziurę nie posiadające osobliwości w centrum symetrii.

Rozdział ten opiera się na wynikach publikacji:

- W. Berej, J. Matyjasek and D. Tryniecki, M. Woronowicz, *Regular black holes in quadratic gravity*, Gen. Rel. Grav. **38,** 885 (2006).

4.1 Naładowana czarna dziura w grawitacji kwadratowej

Jak już zostało napisane wcześniej grawitację kwadratową opisuje działanie

$$I_g = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(R+\alpha R^2+\beta R_{ab}R^{ab}\right). \tag{185}$$

Równania pola grawitacyjnego z uwzględnieniem pół materii I_m mają postać

$$L^b_a = G^b_a \,-\, \alpha\,{}^{(1)}H^b_a \,-\, \beta\,{}^{(2)}H^b_a \,=\, 8\pi\,T^b_a. \tag{186}$$

Jawna postać tensorów ${}^{(1)}H^{ab}$ i ${}^{(2)}H^{ab}$ to

$$ {}^{(1)}H^{ab} \;=\; \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\int d^4x\, g^{1/2}R^2 = 2R^{;ab} - 2RR^{ab} + \frac{1}{2}g^{ab}\left(R^2 - 4\Box R\right), \tag{187}$$

$$ {}^{(2)}H^{ab} \;=\; \frac{1}{g^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\int d^4x\, g^{1/2}R_{ab}R^{ab} = R^{;ab} - \Box R^{ab} - 2R_{cd}R^{cbda} + \frac{1}{2}g^{ab}\left(R_{cd}R^{cd} - \Box R\right). \tag{188}$$

Teoria kwadratowa zaliczana jest do teorii z wyższymi pochodnymi, ponieważ w równaniach pola maksymalną pochodną metryki jest czwarta, a nie druga, jak w przypadku klasycznych równań Einsteina. Poszukiwany będzie analogon czarnodziurowego rozwiązania Reissnera-Nordströma dla kwadratowej grawitacji sprzężonej z polem elektromagnetycznym. Analiza równań Maxwella pozwala

stwierdzić, że tensor energii-pędu ma postać

$$T_b^a = diag(-\frac{e^2}{8\pi\, r^4}, -\frac{e^2}{8\pi\, r^4}, \frac{e^2}{8\pi\, r^4}, \frac{e^2}{8\pi\, r^4}). \tag{189}$$

Aby otrzymać metrykę czasoprzestrzeni, należy rozwiązać układ równań różniczkowych (186). W równaniach tych pojawiają się wyższe człony krzywiznowe, co powoduje, że są one o wiele bardziej skomplikowane niż przypadek klasyczny. Z tego powodu rozwiązanie będzie poszukiwane z wykorzystaniem metody przybliżonej jaką, jest metoda perturbacyjna.

Metoda perturbacyjna może być z powodzeniem stosowana do poszukiwania rozwiązań przybliżonych teorii z wyższymi członami krzywiznowymi. Teorię taką można symbolicznie opisać funkcjonałem działnia

$$S = I_g + I_m = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\,\{-2\Lambda + R + J_1 + J_2 + J_3 + ... + \mathcal{L}_m\}\,, \tag{190}$$

gdzie pierwsze dwa człony Λ i R dotyczą klasycznej grawitacji Einsteina, kolejne J_1, J_2, J_3, ... , J_k, ..., to człony zawierające obiekty krzywiznowe rzędu $2k+2$, a ostatni element $\mathcal{L}_m$ opisuje pola materii. Różniczkując funkcjonalnie działanie S, względem metryki można otrzymać równania pola grawitacyjnego w postaci

$$8\pi T^{ab} = G^{ab} - \left\{J_1^{ab} + J_2^{ab} + J_3^{ab} + ...\right\}, \tag{191}$$

gdzie G^{ab} to tensor Einsteina określony jako $G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2}Rg^{ab} + \Lambda g^{ab}$, $J_{1,}^{ab}$ J_2^{ab}, J_3^{ab}, ... , J_k^{ab} to obiekty pochodzące od teorii wyższego rzędu, a tensor $T^{ab} = \frac{2}{g^{1/2}}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\mathcal{L}_m$ to tensor energii-pędu pola materii. Jeśli człony wyższego rzędu $J_{1,}^{ab}$ J_2^{ab}, J_3^{ab}, ... , J_k^{ab} dają niewielki wkład do równań pola, to można wówczas zastosować metodę perturbacyjną. Pierwszym krokiem tej metody jest rozwiązanie klasycznych równań Einsteina

$$R_{ab}^{(0)} - \frac{1}{2}R^{(0)}g_{ab}^{(0)} + \Lambda g_{ab}^{(0)} = 8\pi T_{ab}^{(0)}. \tag{192}$$

Rozwiązanie tych równań oznaczone jako $g_{ab}^{(0)}$ nazywane jest zerowym rzędem rozwiązania perturbacyjnego. Jest to najprostsze przybliżenie rozwiązań dla teorii wyższymi członami krzywiznowymi. Aby otrzymać dokładniejsze przybliżenie, jakim jest rozwiązanie pierwszego rzędu $g_{ab}^{(1)}$, należy rozwiązać równanie

$$R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2}R^{(1)}g_{ab}^{(1)} + \Lambda g_{ab}^{(1)} = 8\pi T_{ab}^{(1)} + \left\{J_{1ab}^{(0)} + J_{2ab}^{(0)} + J_{3ab}^{(0)} + ...\right\}. \tag{193}$$

Konsekwencją dokładności wyższej niż $g_{ab}^{(0)}$ jest bardziej skomplikowany układ równań różniczkowych wynikający z pojawienia się w równaniach członów $J_{1\ ab}^{(0)}$, $J_{2\ ab}^{(0)}$, $J_{3\ ab}^{(0)}$,... . Indeks zero w członach $J_{1\ ab}^{(0)}$, $J_{2\ ab}^{(0)}$, $J_{3\ ab}^{(0)}$,... wskazuje, że otrzymano je dla metryki $g_{ab}^{(0)}$. Równania (193) można uprościć zastępując część obiektów krzywiznowych tensorem energii-pędu stosując tożsamości typu: $R^{(0)} = -8\pi T^{(0)}$

oraz $R^{(0)}_{ab} = 8\pi\left(T^{(0)}_{ab} - \frac{1}{2}T^{(0)}g^{(0)}_{ab}\right)$. Wyrażenie (193) można uogólnić na dowolny rząd perturbacji co prowadzi do równania

$$R^{(n)}_{ab} - \frac{1}{2}R^{(n)}g^{(n)}_{ab} + \Lambda g^{(n)}_{ab} = 8\pi T^{(n)}_{ab} + \left\{J^{(n-1)}_{1ab} + J^{(n-1)}_{2ab} + J^{(n-1)}_{3ab} + ...\right\}. \tag{194}$$

Prawą stronę powyższego równania określa się mianem efektywnego tensora energii-pędu, który ma postać

$$T^{eff(n)}_{ab} = T^{(n)}_{ab} + \frac{1}{8\pi}\left\{J^{(n-1)}_{1ab} + J^{(n-1)}_{2ab} + J^{(n-1)}_{3ab} + ...\right\}. \tag{195}$$

Równania można wówczas zapisać jako $R^{(n)}_{ab} - \frac{1}{2}R^{(n)}g^{(n)}_{ab} + \Lambda g^{(n)}_{ab} = 8\pi T^{eff(n)}_{ab}$. Ogólne przybliżone rozwiązanie może być przedstawione jako suma elementów

$$g^{(n)}_{ab} = g^{(0)}_{ab} + \Delta g^{(1)}_{ab} + \Delta g^{(2)}_{ab} + ... + \ \Delta g^{(n)}_{ab}, \tag{196}$$

gdzie $\Delta g^{(k)}_{ab} = g^{(k)}_{ab} - g^{(k-1)}_{ab}$ oznaczają poprawkę do metryki pochodzącą od k-tej perturbacji. Należy zwrócić uwagę, że aby znaleźć $g^{(n)}_{ab}$, czyli rozwiązanie n-tego rzędu, należy rozwiązać n+1 układów równań różniczkowych, począwszy od klasycznych równań Einsteina, a skończywszy na równaniach n-tego rzędu.

Zastosowanie metody perturbacyjnej do teorii kwadratowej (186) prowadzi do otrzymania tensora efektywnego w postaci

$$T^{eff(n)}_{ab} = T^{(n)}_{ab} + \frac{1}{8\pi}J^{(n-1)}_{1ab}, \tag{197}$$

gdzie

$$J^{(n-1)}_{1ab} = \alpha^{(1)}H^{(n-1)}_{ab} + \beta^{(2)}H^{(n-1)}_{ab}. \tag{198}$$

Zerowy rząd perturbacji $g^{(0)}_{ab}$ opisywany jest przez klasyczne rozwiązanie Reissnera-Nordströma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2}{r}\left\{\frac{r_+}{2} + \frac{e^2}{2r_+} - \frac{e^2}{2r}\right\}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2}{r}\left\{\frac{r_+}{2} + \frac{e^2}{2r_+} - \frac{e^2}{2r}\right\}} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right). \tag{199}$$

Aby otrzymać rozwiązanie pierwszego rzędu $g^{(1)}_{ab}$ należy rozwiązać równanie

$$R^{(1)}_{ab} - \frac{1}{2}R^{(1)}g^{(1)}_{ab} = 8\pi T^{eff(1)}_{ab}. \tag{200}$$

Jednym ze składników tensora efektywnego $T^{eff(1)}_{ab}$ jest obiekt ${}^{(1)}H^{(0)}_{ab}$, który można przekształcić do postaci

$$\frac{1}{8\pi}{}^{(1)}H^{(0)}_{\mu\mu} = 2\left\{T_{,rr}\delta^r_\mu - \Gamma^{(0)r}_{\mu\mu}T_{,r} - g^{(0)}_{\mu\mu}\left[g^{(0)rr}T_{,rr} - g^{\alpha\alpha}\Gamma^{(0)r}_{\alpha\alpha}T_{,r} - 2\pi T^2 + 8\pi T T^\mu_\mu\right]\right\}, \tag{201}$$

gdzie T to ślad tensora energii-pędu, $T_{,r} = \frac{\partial T}{\partial r}$. Sumowanie występuje jedynie po indeksach α, ale nie po indeksach μ. Charakterystyczną cechą rozwiązań $g^{(1)}_{ab}$ jest fakt, że nie zależą one od parametru

α, a tym samym człon (187) w ogóle nie wpływa na rozwiązania. Dzieje się tak dlatego, że ślad tensora energii-pędu T wynosi zero, zatem człon (201) nie daje żadnego wkładu do równań pola. Rozwiązanie $g_{ab}^{(n)}$ obliczone w dowolnym rzędzie perturbacji również nie zależy od stałej α.

Ponieważ rozważana jest czasoprzestrzeń sferycznie symetryczna i statyczna należy znaleźć tylko dwie składowe metryki: $g_{tt}^{(n)}(r)$ oraz $g_{rr}^{(n)}(r)$. Ze względów rachunkowych wygodnie jest stosować funkcje $m^{(n)}(r)$ i $\psi^{(n)}(r)$ zamiast metryki, z którą funkcje te związane są relacją

$$\begin{aligned} g_{tt}(r) &= -\left(1-2m(r)/r\right)e^{2\psi(r)}, \\ g_{rr}(r) &= 1/\left(1-2m(r)/r\right). \end{aligned} \tag{202}$$

Związek reprezentacji $m^{(n)}(r)$, $\psi^{(n)}$ i reprezentacji metrycznej $g_{tt}^{(n)}(r)$, $g_{rr}^{(n)}(r)$ zadany jest przez tożsamość (202). Aby przejść z reprezentacji $m^{(n)}(r)$, $\psi^{(n)}$ do $g_{tt}^{(n)}(r)$, $g_{rr}^{(n)}(r)$ należy wstawić do równania (202) funkcje $m^{(n)}(r)$ i $\psi^{(n)}$ w postaci $m^{(n)} = m^{(0)} + \Delta m^{(1)} + \Delta m^{(2)} + ... + \Delta m^{(n)}$ i $\psi^{(n)} = \psi^{(0)} + \Delta\psi^{(1)} + \Delta\psi^{(2)} + ... + \Delta\psi^{(n)}$, gdzie $\Delta m^{(n)}$ i $\Delta\psi^{(n)}$ oznaczają poprawki pochodzące od n-tej perturbacji. Następnie należy wprowadzić bezwymiarowy parametr ε dokonując podstawienia $\Delta m^{(n)}(r) \to \varepsilon^n \Delta m^{(n)}(r)$, $\Delta\psi^{(n)} \to \varepsilon^n \Delta\psi^{(n)}$ i rozwinąć prawą stronę równania (202) w szereg Taylora względem ε do rzędu n. Parametr pomocniczy ε należy na końcu wyeliminować poprzez podstawienie $\varepsilon = 1$.

Zastosowanie nowej reprezentacji powoduje, że aby otrzymać poprawkę pierwszego rzędu do metryki Reissnera-Nordströma $\triangle m^{(1)}(r)$ i $\triangle\psi^{(1)}(r)$ należy rozwiązać dwa równania różniczkowe. Pierwsze z nich to

$$\triangle m^{(1)\prime} = S_t^t, \tag{203}$$

gdzie prim oznacza pochodną po r, a

$$\begin{aligned} S_t^t = \beta\Bigg(&\frac{2\,m^{(0)\prime}}{r^2} - \frac{8\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime}}{r^3} + \frac{2\left(m^{(0)\prime}\right)^2}{r^2} - \frac{2\,m^{(0)\prime\prime}}{r} + \frac{5\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime}}{r^2} - \frac{m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime}}{r} + \frac{\left(m^{(0)\prime\prime}\right)^2}{2} \\ &+ m^{(0)\prime\prime\prime} - \frac{m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime}}{r} - m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime\prime} + r\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime} - 2\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime}\Bigg). \end{aligned} \tag{204}$$

Natomiast drugie równanie ma postać

$$\Delta\psi^{(1)} = \beta m^{(0)\prime\prime\prime} - \frac{4}{r^2}\beta m^{(0)\prime} + C_1. \tag{205}$$

Po przyjęciu, że stała r_+ jest horyzontem zdarzeń czyli spełnia równanie

$$g_{tt}(r_+) = 0 \tag{206}$$

oraz warunku asymptotycznej płaskości $\psi^{(n)}(r \to \infty) = 0$, pierwszy rząd rozwiązania ma postać [93]

$m^{(1)}(r) = m^{(0)}(r) + \triangle m^{(1)}(r)$, $\psi^{(1)}(r) = \psi^{(0)}(r) + \triangle\psi^{(1)}(r)$ i wynosi

$$\begin{aligned} m^{(1)}(r) &= \frac{r_+}{2} + \frac{e^2}{2r_+} - \frac{e^2}{2r} + \beta\left(\frac{2\,e^2}{r^3} - \frac{3\,e^2 r_+}{2\,r^4} - \frac{3\,e^4}{2\,r_+\,r^4} + \frac{6\,e^4}{5\,r^5} - \frac{e^2}{2\,r_+^3} + \frac{3\,e^4}{10\,r_+^5}\right), \\ \psi^{(1)}(r) &= \beta\frac{e^2}{r^4}. \end{aligned} \tag{207}$$

Równania różniczkowe wraz ze wzrostem rzędu perturbacji stają coraz bardziej skomplikowane, a ich rozwiązania prowadzą do

$$\begin{aligned} \triangle m^{(2)} &= \beta^2\left(\frac{351}{4}\frac{e^4 r_+}{r^8} - \frac{36\,e^2}{r^5} - \frac{1156\,e^4}{7\,r^7} + \frac{76\,e^2 r_+}{r^6} + \frac{76\,e^4}{r^6 r_+} - \frac{704}{15}\frac{e^6}{r^9} - 40\frac{e^2 r_+^2}{r^7}\right. \\ &\quad \left. -40\frac{e^6}{r_+^2 r^7} + \frac{351}{4}\frac{e^6}{r_+\,r^8} + \frac{3}{2}\frac{e^4}{r_+^3 r^4} - \frac{9}{10}\frac{e^6}{r^4 r_+^5} + \frac{1}{12}\frac{e^6}{r_+^9} - \frac{3}{28}\frac{e^4}{r_+^7}\right), \end{aligned} \tag{208}$$

$$\triangle\psi^{(2)} = \beta^2\left(32\frac{e^2 r_+}{r^7} + 32\frac{e^4}{r^7 r_+} - 24\frac{e^2}{r^6} - 41\frac{e^4}{r^8}\right), \tag{209}$$

$$\begin{aligned} \triangle m^{(3)} &= \beta^3\left(1440\frac{e^2}{r^7} - 5508\frac{e^2 r_+}{r^8} + 21168\frac{e^4}{r^9} + \frac{12392664}{385}\frac{e^6}{r^{11}} + \frac{331624}{65}\frac{e^8}{r^{13}} + \frac{2229}{572}\frac{e^8}{r_+^{13}}\right. \\ &\quad -4\frac{e^2}{r_+^7} + \frac{652}{55}\frac{e^4}{r_+^9} - \frac{2587}{220}\frac{e^6}{r_+^{11}} + 6816\frac{e^6}{r^9 r_+^2} - 76\frac{e^4}{r^6 r_+^3} - 2744\frac{e^2 r_+^3}{r^{10}} + \frac{228}{5}\frac{e^6}{r^6 r_+^5} \\ &\quad -5508\frac{e^4}{r_+\,r^8} - \frac{130732}{5}\frac{e^4 r_+}{r^{10}} - \frac{130732}{5}\frac{e^6}{r^{10} r_+} + \frac{115176}{11}\frac{e^4 r_+^2}{r^{11}} - \frac{51347}{4}\frac{e^6 r_+}{r^{12}} \\ &\quad +\frac{115176}{11}\frac{e^8}{r_+^2 r^{11}} - \frac{51347}{4}\frac{e^8}{r_+\,r^{12}} - 2744\frac{e^8}{r_+^3 r^{10}} + 80\frac{e^4}{r_+^2 r^7} + 32\frac{e^6}{r_+^4 r^7} + 6816\frac{e^2 r_+^2}{r^9} \\ &\quad \left. -48\frac{e^8}{r_+^6 r^7} - \frac{351}{4}\frac{e^6}{r_+^3 r^8} + \frac{1053}{20}\frac{e^8}{r_+^5 r^8} - \frac{e^8}{4\,r^4 r_+^9} + \frac{9}{28}\frac{e^6}{r_+^7 r^4}\right), \end{aligned} \tag{210}$$

$$\begin{aligned} \triangle\psi^{(3)} &= \beta^3\left(\frac{96}{5}\frac{e^6}{r^7 r_+^5} - 3264\frac{e^2 r_+}{r^9} - 3264\frac{e^4}{r^9 r_+} - 32\frac{e^4}{r^7 r_+^3} - \frac{74560}{11}\frac{e^4 r_+}{r^{11}} - \frac{74560}{11}\frac{e^6}{r^{11} r_+}\right. \\ &\quad \left. +2352\frac{e^2 r_+^2}{r^{10}} + \frac{48384}{5}\frac{e^4}{r^{10}} + 2352\frac{e^6}{r^{10} r_+^2} + \frac{69572}{15}\frac{e^6}{r^{12}} + 1080\frac{e^2}{r^8}\right). \end{aligned} \tag{211}$$

W przypadku metryki Reissnera-Nordströma (rozwiązanie zerowego rzędu) istnieją dwa horyzonty: horyzont zdarzeń $r_H = r_+$ i horyzont wewnętrzny $r_- = \frac{e^2}{r_+}$. Horyzont zdarzeń w przypadku zmodyfikowanym przez kwadratową grawitację nadal wynosi $r_H = r_+$, natomiast horyzont wewnętrzny ulega modyfikacji ponieważ jego promień z dokładnością do drugiego rzędu obliczeń jest równy

$$\begin{aligned} r_- &= \frac{e^2}{r_+} + \frac{\beta}{5}\left(\frac{3e^4}{r_+^5} - \frac{2e^2}{r_+^3} - \frac{2}{r_+} - \frac{2r_+}{e^2} + \frac{3r_+^3}{e^4}\right) + \beta^2\left(\frac{e^6}{6r_+^9} - \frac{214}{525}\frac{e^4}{r_+^7} + \frac{38}{525}\frac{e^2}{r_+^5}\right. \\ &\quad \left. + \frac{206}{525r_+^3} - \frac{131}{105e^2 r_+} + \frac{58}{105}\frac{r}{_+}e^4 + \frac{374}{525}\frac{r_+^3}{e^6} + \frac{542}{525}\frac{r_+^5}{e^8} - \frac{191}{150}\frac{r_+^7}{e^{10}}\right) + \mathcal{O}(\beta^3). \end{aligned} \tag{212}$$

Metrykę można przedstawić w bardziej standardowej reprezentacji niż przy pomocy parametrów r_+ i e, wyrażając ją poprzez masę widzianą przez obserwatora odległego M_∞ oraz e. Masa M_∞ jest określona jako

$$\begin{aligned} M_\infty &= \lim_{r\to\infty} m(r) = \frac{r_+}{2} + \frac{e^2}{2r_+} + \beta\left(\frac{3e^4}{10r_+^5} - \frac{e^2}{2r_+^3}\right) + \beta^2\left(\frac{e^6}{12r_+^9} - \frac{3e^4}{28r_+^7}\right) \\ &\quad -\beta^3\left(\frac{4e^2}{r_+^7} - \frac{652e^4}{55r_+^9} + \frac{2587e^6}{220r_+^{11}} - \frac{2229e^8}{572r_+^{13}}\right) + \mathcal{O}(\beta^4). \end{aligned} \tag{213}$$

Metryka w reprezentacji M_∞, e liczona z dokładnością do członu $\mathcal{O}(\beta^4)$ policzona została przez Campanelli, Lousto i Audretscha [1]. Podstawienie do metryki Campanelli, Lousto i Audretscha masy (213) powinno doprowadzić do otrzymania metryki w reprezentacji r_+ i e, okazuje się jednak, że tak nie jest [93]. W celu sprawdzenia tych rozbieżności powtórzono obliczenia Campanelli, Lousto i Audretscha. Otrzymana poprawka pochodząca od trzeciego rzędu perturbacji okazała się być różna od przedstawionej w ich pracy i wynosi [93]

$$\begin{aligned} m^{(3)}(r) &= M_\infty - \frac{e^2}{2r} + \beta\left(2\frac{e^2}{r^3} - 3\frac{e^2M_\infty}{r^4} + \frac{6\,e^4}{5r^5}\right), \\ &+\beta^2\left(152\frac{e^2M_\infty}{r^6} - \frac{596}{7}\frac{e^4}{r^7} - \frac{704}{15}\frac{e^6}{r^9} - 160\frac{e^2{M_\infty}^2}{r^7} + \frac{351}{2}\frac{e^4M_\infty}{r^8} - 36\frac{e^2}{r^5}\right) \\ &+\beta^3\left(27264\frac{e^2{M_\infty}^2}{r^9} - 11016\frac{e^2M_\infty}{r^8} + 1440\frac{e^2}{r^7} + \frac{4330344}{385}\frac{e^6}{r^{11}} - \frac{179144}{5}\frac{e^4M_\infty}{r^{10}}\right. \\ &\left. +\frac{331624}{65}\frac{e^8}{r^{13}} + \frac{460704}{11}\frac{e^4{M_\infty}^2}{r^{11}} - \frac{51347}{2}\frac{e^6M_\infty}{r^{12}} - 21952\frac{e^2{M_\infty}^3}{r^{10}} + 7536\frac{e^4}{r^9}\right) + \mathcal{O}(\beta^4), \end{aligned} \tag{214}$$

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(r) &= \beta\frac{e^2}{r^4} - \beta^2\left(\frac{24e^2}{r^6} - \frac{64e^2M_\infty}{r^7} + \frac{41e^4}{r^8}\right) + \beta^3\left(\frac{24864e^4}{5r^{10}} + \frac{9408e^2M_\infty^2}{r^{10}}\right. \\ &\left. + \frac{69572e^6}{15r^{12}} + \frac{1080e^2}{r^7} - \frac{6528e^2M_\infty}{r^9} - \frac{149120e^4M_\infty}{11r^{11}}\right) + \mathcal{O}(\beta^4). \end{aligned} \tag{215}$$

Powyższe wyniki zostały sprawdzone poprzez wykorzystanie relacji (213) w obliczeniach wykonanych w reprezentacji M_∞, e. W wyniku tej operacji idealnie odtworzona została metryka w reprezentacji r_+, e co wykazuje poprawność obliczeń.

W reprezentacji M_∞, e promień horyzontu zdarzeń nie ma już trywialnej postaci, ale wynosi

$$\begin{aligned} r_+ &= r_0 + \beta\frac{e^2\left(5r_0^2 - 3e^2\right)}{5r_0^3\left(r_0^2 - e^2\right)} - \beta^2\frac{e^4\left(2925r_0^6 - 6515r_0^4e^2 + 5095r_0^2e^4 - 1337e^6\right)}{1050r_0^7\left(r_0^2 - e^2\right)^3} \\ &\quad -\beta^3\frac{e^2}{\left(r_0^2 - e^2\right)^5}\left(\frac{17268913}{75075}\frac{e^{10}}{r_0^7} - \frac{61234643}{750750}\frac{e^{12}}{r_0^9} - \frac{137993}{770}\frac{e^4}{r_0} + \frac{3265043}{10010}\frac{e^6}{r_0^3}\right. \\ &\quad \left. - \frac{26686967}{75075}\frac{e^8}{r_0^5} + \frac{436497}{35750}\frac{e^{14}}{r_0^{11}} - 8\,r_0^3 - \frac{3064}{55}e^2r_0\right) + \mathcal{O}(\beta^4), \end{aligned} \tag{216}$$

gdzie $r_0 = M_\infty + \left(M_\infty^2 - e^2\right)^{1/2}$.

Zmiana parametrów M_∞, e skutkuje zmianą położenia horyzontu zdarzeń co może doprowadzić do połączenia się horyzontów ($r_+ = r_-$) - taki przypadek nazywany jest horyzontem ekstremalnym. Wartość parametrów M_∞, e dla przypadku ekstremalnego wyznacza granicę przejścia pomiędzy rozwiązaniem opisującym czarną dziurę, a rozwiązaniem będącym nagą osobliwością[14]. Przypadek ekstremalny jest wyjątkowy również ze względu na swoje nietypowe własności termodynamiczne oraz pojawiające się kontrowersje na ich temat. Po obliczeniu temperatury Hawkinga dla rozwiązania nieekstremalnego Reissnera-Nordströma, a następnie po przejściu z parametrami M_∞, e do przypadku ekstremalnego, temperatura dążyć będzie do zera $T_H \to 0$. Jednak jak sugeruje Hawking, Ross i Horowitz temperatura ekstremalnej czarnej dziury nie jest przypadkiem granicznym rozwiązania nieekstremalnego, ale może być dowolna [152]. Propozycja ta jest motywowana tym, iż topologia nieekstremalnej i ekstremalnej czarnej dziury jest jakościowo odmienna. Jeśli chcemy otrzymać temperaturę Hawkinga przypadku nieekstremalnego, należy ustalić temperaturę tak, aby zapobiegała ona pojawieniu się osobliwości stożkowej w przestrzeni Euklidesowej. Inaczej jest z przypadkiem ekstremalnym, gdzie na pojawienie się osobliwości stożkowej nie ma wpływu zakres czasu urojonego τ, a tym samym wartość temperatury. Zatem w przypadku ekstremalnym temperatura nie jest związana w żaden sposób z geometrią czasoprzestrzeni. Kolejną konsekwencją odmienności topologii przypadku ekstremalnego jest zerowanie się entropii $S = 0$ [152, 153], co stoi w sprzeczności z regułą Bekensteina-Hawkinga $S = A/4$ (A to powierzchnia horyzontu zdarzeń). Możliwość odstępstwa temperatury ekstremalnej czarnej dziury T od wartości $T_H = 0$ niesie ze sobą jednak niepożądane konsekwencje fizyczne. Rozpatrując kwantowe pole skalarne będące w równowadze temperaturowej z ekstremalną czarną dziurą, można pokazać, że jeśli $T \neq T_H$, to tensor energii-pędu pola jest rozbieżny [154, 155]. Wersja w której entropia ekstremalnej czarnej dziury ma klasyczną wartość ($S = A/4$) wsparta jest również ze strony teorii strun [156].

Rozpatrując przypadek bez poprawek kwadratowych, można zauważyć, że horyzont zdarzeń i horyzont wewnętrzny $r_H = r_+$, $r_- = \frac{e^2}{r_+}$ łączą się, gdy $r_+ = |e|$ (tzw. przypadek ekstremalny). Analiza ekstremalności horyzontów z uwzględnieniem poprawek kwadratowych pokazuje, że dwa horyzonty $r_H = r_+$ i r_- łączą się dla tej samej wartości $r_+ = |e|$. Zachodzi podejrzenie, że wartość promienia $r_{ekstr} = |e|$ jest idealnym (nieperturbacyjnym) rozwiązaniem przypadku ekstremalnego dla kwadratowej grawitacji. Aby sprawdzić tę hipotezę wykorzystana będzie postać metryki $ds^2 = -f(r)\, e^{2\psi(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$. Funkcja $f(r)$ może być rozwinięta w szereg Taylora względem horyzontu zdarzeń

$$f(r) = f(r_+) + \frac{df}{dr}_{|r=r_+}(r - r_+) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dr^2}_{|r=r_+}(r - r_+)^2 + \ldots . \tag{217}$$

Warunek $g_{tt}(r_+) = f(r_+)\, e^{2\psi(r_+)} = 0$, który określa promień horyzontu zdarzeń jest równoważny równaniu $f(r_+) = 0$ (przy założeniu $|\psi(r_+)| < \infty$). Zatem, przy uwzględnieniu $f(r_+) = 0$ w

[14] Naga osobliwość (ang. „naked singularity") jest czasoprzestrzenią z osobliwością, która nie posiada horyzontu zdarzeń.

równaniu (217), można wywnioskować, że istnieje drugi horyzont r_- tylko wtedy, gdy $\frac{df}{dr}|_{r=r_+} \neq 0$. Podsumowując, horyzont zdarzeń jest ekstremalny, kiedy spełnione są równania $f\left(r_+\right) = \frac{df}{dr}|_{r=r_+} = 0$. Równania Einsteina na horyzoncie ekstremalnym mają postać

$$(\beta + 2\alpha)\left[\left(\frac{1}{2}f''(r_+)\right)^2 - \frac{1}{r_+^4}\right] - \frac{1}{r_+^2} = 8\pi T_r^r(r_+), \tag{218}$$

$$-(\beta + 2\alpha)\left[\left(\frac{1}{2}f''(r_+)\right)^2 - \frac{1}{r_+^4}\right] + \frac{1}{2}f''(r_+) = 8\pi T_\theta^\theta(r_+). \tag{219}$$

Równania pola oraz sferyczna symetria narzucają szczególną postać tensora energii-pędu na horyzoncie zdarzeń $T_\theta^\theta = T_\phi^\phi$, $T_t^t\left(r_+\right) = T_r^r\left(r_+\right)$. Wykorzystując równania (218) i (219) oraz uwzględniając postać tensora energii-pędu na horyzoncie, można pokazać, że $f''(r_+) - \frac{2}{r_+^2} = 8\pi T(r_+)$, gdzie T to ślad tensora energii-pędu. Jeśli ślad ten znika, a tak jest w rozważanym przypadku, z równania (218) oraz składowej $T_r^r(r_+) = -\frac{e^2}{8\pi\, r_+^4}$ można wywnioskować, że $r_{ekstr} = |e|$.

Ważną wielkością charakteryzującą czarną dziurę jest temperatura Hawkinga T_H i entropia S. Temperatura Hawkinga liczona z dokładnością do trzeciego rzędu przybliżenia ze względu na parametr β ma postać

$$\begin{aligned} T_H = {} & \frac{1}{4\pi r_+}\left(1 - \frac{e^2}{r_+^2}\right) + \frac{\beta e^2}{4\pi r_+^5}\left(1 - \frac{e^2}{r_+^2}\right) - \frac{\beta^2 e^4}{8\pi r_+^9}\left(1 - \frac{e^2}{r_+^2}\right) \\ & + \frac{\beta^3 e^2}{440\pi r_+^{13}}\left(1 - \frac{e^2}{r_+^2}\right)\left(880 r_+^4 - 3232 e^2 r_+^2 + 2455 e^4\right) + \mathcal{O}(\beta^4). \end{aligned} \tag{220}$$

Struktura wyniku pokazuje, że dla przypadku ekstremalnego $r_+ = |e|$ temperatura się zeruje. Jeśli zostanie uwzględniony warunek nontachyon $\beta < 0$, to pierwsze dwa człony pochodzące od teorii kwadratowej (stojące przy β i β^2) są zawsze dodatnie, trzeci natomiast ujemny. Można zatem stwierdzić, że w drugim rzędzie dokładności temperatura jest zawsze obniżana. Rozsądnym jest przypuszczać, że własność ta zostanie zachowana w dowolnym rzędzie dokładności ze względu na małą wartość parametru β. Entropia wynosi

$$S = \frac{A}{4} - \frac{8\pi^2\beta}{A}e^2 - \frac{1024\pi^4 e^2\beta^3}{A^5}\left(A - 4\pi e^2\right)^2 + \frac{16384\pi^5 e^2\beta^4}{A^7}\left(A - 4\pi e^2\right)^2\left(26\pi e^2 - 5A\right) + \mathcal{O}(\beta^5), \tag{221}$$

gdzie $A = 4\pi r_+^2$ to powierzchnia horyzontu zdarzeń. Analiza podobna, jak w przypadku temperatury pozwala stwierdzić, że pierwsze dwa człony pochodzące od teorii kwadratowej dają dodatni wkład do entropii, a znak trzeciego zależy od położenia horyzontu zdarzeń i ładunku. W przypadku ekstremalnym $r_+ = |e|$ entropia degeneruje się do przypadku

$$S = \frac{A}{4} - 2\pi\beta + \mathcal{O}(\beta^5), \tag{222}$$

co oznacza, że wkład do entropii pochodzący od teorii kwadratowej zależy jedynie od stałej sprzężenia β.

4.2 Regularna czarna dziura w kwadratowej grawitacji sprzężonej z nieliniową elektrodynamiką

Problem osobliwości czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma można rozwiązać modyfikując równania Maxwella poprzez wykorzystanie elektrodynamiki nieliniowej (NED) zamiast elektrodynamiki klasycznej. Dla klasycznego działania Einsteina sprzężonego z nieliniową elektrodynamiką

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - L\left(F\right) \right] \tag{223}$$

Ayon-Beato, Garcia i Bronnikov (ABGB) dokonała analizy rozwiązań pod kątem ich regularności [3, 4]. Analogicznie jak w przypadku czarnej dziury Reissnera-Nordströma poszukiwano rozwiązań statycznych sferycznie symetrycznych pochodzących od bezźródłowych równań pola elektromagnetycznego

$$\begin{aligned} \nabla_a \left(L_F F^{ab} \right) &= 0, \\ *F^{ab}{}_{;a} &= 0, \end{aligned} \tag{224}$$

gdzie $\mathcal{L}_F = d\mathcal{L}/dF$, a symbol $*$ oznacza operator Hodge'a[15]. Tensor energii-pędu dla rozważanego przypadku to

$$T^b_a = -\frac{1}{16\pi} diag\left(\mathcal{L} + 2f_e\mathcal{L}_F, \mathcal{L} + 2f_e\mathcal{L}_F, \mathcal{L} - 2f_m\mathcal{L}_F, \mathcal{L} - 2f_m\mathcal{L}_F \right), \tag{225}$$

gdzie $f_e = 2F_{01}F^{01} = 2e^2L_F^{-2}r^{-4}$, $f_m = 2F_{23}F^{23} = 2Q^2r^{-4}$. Stała e i Q interpretowane są odpowiednio jako ładunek elektryczny i magnetyczny. Analogonem rozwiązania Reissnera-Nordströma jest rozwiązanie z warunkami $e \neq 0$, $Q = 0$, nie jest ono jednak regularne. Dowód nieregularności polega na początkowym założeniu, że czasoprzestrzeń jest regularna. Takie założenie prowadzi jednak do niefizycznego zachowania funkcji $\mathcal{L}\left(F\right)$. Niefizyczność polega na niezgodności z elektrodynamiką klasyczną w granicy słabych pól. Funkcja $\mathcal{L}\left(F\right)$ powinna wtedy spełniać warunek

$$F \to 0 \text{ to } \begin{cases} \mathcal{L} \to F \\ \mathcal{L}_F \to 1 \end{cases}. \tag{226}$$

Rozszerzenie rozwiązań na przypadek $e \neq 0$, $Q \neq 0$ również nie dostarcza rozwiązań regularnych. Jedyne potencjalnie regularne rozwiązanie to $e = 0$, $Q \neq 0$. Wykorzystując charakterystyczną własność tensora energii-pędu $T^0_0 = T^1_1$ można pokazać, że rozwiązaniem równań Einsteina jest metryka

$$ds^2 = -f\left(r\right) dt^2 + \frac{dr^2}{f\left(r\right)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right), \tag{227}$$

[15] Operator Hodge'a oznaczony jako „*" zdefiniowany jest poprzez tożsamość $*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Tensor $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ jest całkowicie antysymetryczny oraz $\epsilon_{0123} = \sqrt{-g}$.

gdzie

$$f(r) = 1 - \frac{1}{2r}\int \mathcal{L}(F)\, r^2 dr. \tag{228}$$

Dalsze rozważania wymagają jawnej specyfikacji lagranżjanu $\mathcal{L}(F)$. Biorąc pod uwagę propozycję Ayon-Beato, Garcia, Bronnikova

$$\mathcal{L}(F) = F\left[1 - \tanh^2\left(s\sqrt[4]{F}\right)\right], \tag{229}$$

metryka ma postać

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left\{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1 - \tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right)\right\}dt^2 + dr^2 / \left\{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1 - \tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right)\right\} + r^2 d\Omega^2 \\ d\Omega^2 &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \tag{230}$$

Parametr s został ustalony tak, aby metryka nie była osobliwa ($\lim_{r\to 0} g_{ab} < \infty$). Czasoprzestrzeń ta jest regularna ponieważ wszystkie niezmienniki krzywiznowe utworzone z tensora Riemanna i jego pochodnych kowariantnych są skończone.

Czarna dziura ABGB posiada dwa horyzonty (horyzont zdarzeń i wewnętrzny), których promień wyraża się przy pomocy funkcji Lamberta[16] $W_\pm$ [85,98, 157, 158] w postaci

$$r_0^{(\pm)} = -\frac{4q^2\mathcal{M}}{4W_\pm\left(-\frac{q^2}{4}\exp\left(\frac{q^2}{4}\right)\right) - q^2}, \tag{231}$$

gdzie $q = Q/\mathcal{M}$. Przy odpowiednim doborze parametru $q = q_c = 2\sqrt{W_+(e^{-1})} \approx 1,0554$, horyzonty łączą się przyjmując wartość

$$r_c = \frac{4q_c^2}{4 - q_c^2}\mathcal{M} \approx 0,8712\mathcal{M}. \tag{232}$$

W zależności od wartości parametru q można wyróżnić trzy typy regularnych rozwiązań: czarnodziurowe z horyzontem zdarzeń i horyzontem wewnętrznym dla $q < q_c$, ekstremalne dla $q = q_c$, oraz pozbawione horyzontów dla $q > q_c$. Rozwiązanie ABGB wykazuje podobieństwa z rozwiązaniem Reissnera-Nordströma, ponieważ dla dużych wartości promienia r lub małych wartości q, upodabnia się do niego. Zasadnicze różnice polegają natomiast na osobliwym zachowaniu czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma w centrum symetrii oraz typie geometrii otoczenia ekstremalnego horyzontu zdarzeń. Geometria otoczenia horyzontu ekstremalnego czarnej dziury Reissnera-Nordströma jest typu Bertottiego-Robinsona, natomiast geometria otoczenia horyzontu ekstremalnego czarnej dziury ABGB jest ogólniejszego typu $AdS_2 \times S^2$ [158].

Czarna dziura ABGB (230) oparta o klasyczne działanie Einsteina sprzężone z nieliniową elektrodynamiką nie posiada osobliwości. Powstaje pytanie, czy uogólnienie rozwiązanie ABGB na przypadek kwadratowej grawitacji sprzężonej z nieliniową elektrodynamiką również nie będzie posiadać osobliwości. Teoria kwadratowa może generować rozwiązania różnego rodzaju, w tym i te nieosobliwe.

[16] Funkcja Lamberta spełnia równanie $W_\pm(z)\, e^{W_\pm(z)} = z$.

Analiza rozwiązań próżniowych kwadratowej grawitacji pokazuje, że istnieje rozwiązanie statyczne sferycznie symetryczne, które nie posiada osobliwości w centrum symetrii $r = 0$ [159, 160].

Aby wykazać nieosobliwość, należy najpierw znaleźć rozwiązanie równań pola dla sprzężonej z nieliniowym polem elektromagnetycznym kwadratowej grawitacji opisanej działaniem

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \alpha R^2 + \beta R_{ab} R^{ab} - L\left(F\right) \right]. \tag{233}$$

Następnie należy wykazać regularność czasoprzestrzeni czarnej dziury, czyli pokazać, iż wszystkie niezmienniki krzywiznowe mają wartość skończoną. Rozwiązanie będzie poszukiwane metodą perturbacyjną w pierwszym rzędzie dokładności. Regularność czasoprzestrzeni można zatem udowodnić jedynie z dokładnością tego rzędu.

Do dalszych rozważań wybrany został Lagranżjan zaproponowany przez Ayon-Beato, Garcię i Bronnikova $\mathcal{L}\left(F\right) = F\left[1 - \tanh^2\left(s\sqrt[4]{F}\right)\right]$. Tensor energii-pędu dla takiej teorii przedstawiony jest we wzorze (225). W rozważaniach ograniczono się do przypadku z niezerowym ładunkiem magnetycznym $e = 0$, $Q \neq 0$ ze względu na swoją potencjalną regularność. Parametr s można zapisać w równoważnej postaci $s = \frac{|Q|}{2(b_1+b_2)}$. Stała b_1 powinna być ustalona tak, aby gwarantowała regularność w zerowym rzędzie perturbacji (rozwiązanie klasyczne), stała b_2 natomiast odzwierciedla poprawkę do stałej b_1, a uwzględnienie jej powinno gwarantować regularność w pierwszym rzędzie perturbacji. Do dalszych obliczeń niezbędne są składowe rr i tt tensora energii-pędu mające postać

$$8\pi T_t^t = 8\pi T_r^r = -\frac{Q^2}{r^4}\left(1 - \tanh^2\left(\frac{Q^2}{2b_1 r}\right)\right) - \frac{b_2 Q^4}{b_1^2 r^5}\left(\cosh^{-2}\frac{Q^2}{2b_1 r}\tanh\frac{Q^2}{2b_1 r}\right). \tag{234}$$

Należy zwrócić uwagę, że tensor ten przedstawiony został w pierwszym rzędzie rozwinięcia ze względu na parametr b_2. W zerowym rzędzie obliczeń tensor efektywny wynosi

$$T_{ab}^{eff(0)} = -\frac{Q^2}{r^4}\left(1 - \tanh^2\left(\frac{Q^2}{2b_1 r}\right)\right), \tag{235}$$

zatem człon związany z b_2 został pominięty. W pierwszym rzędzie perturbacji $T_{ab}^{eff(1)}$ zawiera człon związany z b_2 oraz człony pochodzące od kwadratowej grawitacji. Rozwiązanie perturbacyjne 1-ego rzędu oznacza znalezienie funkcji $m^{(1)}\left(r\right) = m^{(0)}\left(r\right) + \Delta m^{(1)}(r)$ i $\psi^{(1)}\left(r\right) = \psi^{(0)}\left(r\right) + \Delta\psi^{(1)}(r)$, a tym samym otrzymanie $g_{tt}^{(n)}\left(r\right)$ i $g_{rr}^{(n)}\left(r\right)$ po uprzednim wykorzystaniu relacji (202).

Rozwiązanie zerowego rzędu to

$$\begin{aligned} m^{(0)}\left(r\right) &= C_2 - b_1 \tanh\frac{Q^2}{2b_1 r}, \\ \psi^{(0)}\left(r\right) &= 0. \end{aligned} \tag{236}$$

Korzystając z definicji masy widzianej przez obserwatora odległego $\lim\limits_{r\to\infty} m^{(0)}\left(r\right) = \mathcal{M}$ stałą C_2 można interpretować jako masa $\mathcal{M}$. Regularności elementu liniowego $\lim\limits_{r\to 0} g_{ab} < \infty$, gdy $r \to 0$ wymaga aby $b_1 = \mathcal{M}$. Ostatecznie funkcja $m^{(0)}\left(r\right)$ ma postać $m^{(0)}\left(r\right) = \mathcal{M} - \mathcal{M}\tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}$, a zatem metryka $g_{ab}^{(0)}$

jest identyczna z klasycznym rozwiązaniem ABGB (230).

Rozwiązanie pierwszego rzędu $m^{(1)}(r) = m^{(0)}(r) + \Delta m^{(1)}(r)$ i $\psi^{(1)}(r) = \psi^{(0)}(r) + \Delta\psi^{(1)}(r)$ wymaga obliczenia funkcji $\Delta m^{(1)}(r)$ i $\Delta\psi^{(1)}(r)$, z wykorzystaniem równań pola $R^{(1)}_{ab} - \frac{1}{2}R^{(1)}g^{(1)}_{ab} = 8\pi T^{eff(1)}_{ab}$. Tensor energii-pędu nieliniowej elektrodynamiki nie jest bezśladowy $T \neq 0$ tak, jak w przypadku elektrodynamiki klasycznej, zatem można przypuszczać, że równania pola będą zależały od stałej α. Można pokazać, że funkcja $\Delta\psi^{(1)}(r)$ spełnia zmodyfikowane równanie (205) postaci

$$\Delta\psi^{(1)}(r) = (2\alpha+\beta)m^{(0)\prime\prime\prime} - \frac{4}{r^2}(3\alpha+\beta)m^{(0)\prime} + C_1, \tag{237}$$

natomiast $\Delta m^{(1)}(r)$ spełnia równanie (203), gdzie funkcja S^t_t (204) ma postać

$$S^t_t = S^{(0)t}_t + S^{(1)t}_t, \tag{238}$$

gdzie

$$\begin{aligned} S^{(0)t}_t = \beta\Bigg(&\frac{2\,m^{(0)\prime}}{r^2} - \frac{8\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime}}{r^3} + \frac{2\,\left(m^{(0)\prime}\right)^2}{r^2} - \frac{2\,m^{(0)\prime\prime}}{r} + \frac{5\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime}}{r^2} - \frac{m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime}}{r} + \frac{\left(m^{(0)\prime\prime}\right)^2}{2} \\ &+m^{(0)\prime\prime\prime} - \frac{m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime}}{r} - m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime\prime} + r\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime} - 2\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime}\Bigg) - \alpha\Bigg(\frac{24\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime}}{r^3} - \frac{8m^{(0)\prime}}{r^2} \\ &- \frac{4\,\left(m^{(0)\prime}\right)^2}{r^2} + \frac{8\,m^{(0)\prime\prime}}{r} - \frac{18\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime}}{r^2} - \left(m^{(0)\prime\prime}\right)^2 + \frac{2\,m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime}}{r} - 4\,m^{(0)\prime\prime\prime} + 2\,m^{(0)\prime}\,m^{(0)\prime\prime\prime} \\ &+\frac{6\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime}}{r} - 2\,r\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime} + 4\,m^{(0)}\,m^{(0)\prime\prime\prime\prime}\Bigg), \end{aligned} \tag{239}$$

$$S^{(1)t}_t = \frac{b_2Q^4}{2b_1^2r^3}\left(\cosh^{-2}\frac{Q^2}{2b_1r}\tanh\frac{Q^2}{2b_1r}\right). \tag{240}$$

Uwzględniając warunek brzegowy $\psi_1(\infty) = 0$ oraz jawną postać $m^{(0)}$, można pokazać, że [161]

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{(1)}(r) &= \cosh^{-2}\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\left[\frac{\beta Q^2}{r^4} + \frac{(2\alpha+\beta)\,Q^6}{2\mathcal{M}^2r^6}\tanh^2\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r} - \frac{3\,(2\alpha+\beta)\,Q^4}{\mathcal{M}r^5}\tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right] \\ &\quad - \frac{(2\alpha+\beta)\,Q^6}{4\mathcal{M}^2r^6}\cosh^{-4}\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}. \end{aligned} \tag{241}$$

Cechą charakterystyczną funkcji $\Delta\psi^{(1)}(r)$ jest to, że jej pochodne nie są osobliwe w punkcie $r = 0$. Obliczenie $\Delta m^{(1)}$ polega na scałkowaniu równania $\triangle m^{(1)\prime} = S^t_t$. Policzenie całki $\int S^{(0)t}_t dr$ jest nietrywialne ponieważ sprowadza się do policzenia sumy całek typu $\int u^p(\tanh u)^s du$, gdzie p i s to liczby całkowite dodatnie. Całkę tę można zredukować do przypadku $s = 1$, a następnie wyrazić ją poprzez funkcje polilogarytm. Formuły (1.4.22.3) i (1.4.22.4) z tablic całek [162] pozwalają przed-

stawić wspomnianą całkę w postaci

$$\int u^p(\tanh u)^{2n}du = \frac{1}{p+1}u^{p+1}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\int\frac{u^p}{(\cosh u)^{2n-2k}}du, \tag{242}$$

$$\int u^p(\tanh u)^{2n+1}du = \int u^p\tanh u\,du+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+k}}{2n-2k}\binom{n}{k}\left[-\frac{u^p}{(\cosh u)^{2n-2k}}\right.$$
$$\left.+p\int\frac{u^{p-1}}{(\cosh u)^{2n-2k}}du\right]. \tag{243}$$

Poprzez wielokrotne zastosowanie tożsamości[17]

$$\int\frac{u^p}{(\cosh u)^q}du = \frac{pu^{p-1}}{(q-1)(q-2)(\cosh u)^{q-2}}+\frac{u^p\sinh u}{(q-1)(\cosh u)^{q-1}}$$
$$-\frac{p(p-1)}{(q-1)(q-2)}\int\frac{u^{p-2}}{(\cosh u)^{q-2}}du+\frac{q-2}{q-1}\int\frac{u^p}{(\cosh u)^{q-2}}du, \tag{244}$$

można obniżyć do potęgi drugiej rząd parzystych potęg funkcji $1/\cosh u$ występujących pod całką w (242-243). Korzystając następnie z całkowania przez części można pokazać, że

$$\int\frac{u^p}{(\cosh u)^2}du = u^p\tanh u-p\int u^{p-1}\tanh u\,du, \tag{245}$$

co doprowadza do konieczności obliczenia całki $\int u^p\tanh u\,du$. Całkę $\int u^p\tanh u\,du$ można wyrazić poprzez polilogarytmy $Li_n(z)$, $n=1,2,...,p+1$. Polilogarytm rzędu $m>1$ (m jest całkowite) posiada definicję [163, 164] $\mathrm{Li}_m(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^m}$, co prowadzi do własności

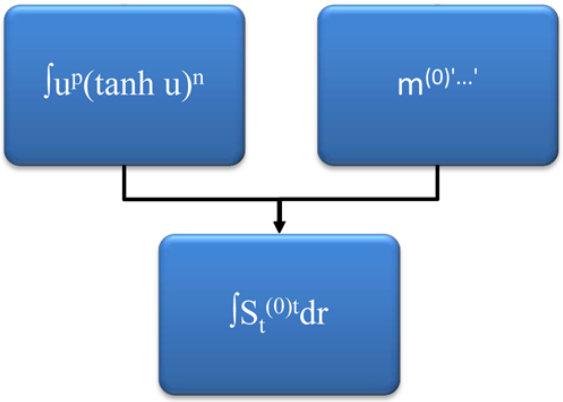
$$\mathrm{Li}_n(z) = \int\frac{\mathrm{Li}_{n-1}(z)}{z}dz+C, \tag{246}$$

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_n(z) = \frac{1}{z}\mathrm{Li}_{n-1}(z). \tag{247}$$

Wykorzystując całkową reprezentację $\mathrm{Li}_2(z)$ (dilogarytmu) [163] $\mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ i własność (247) można otrzymać polilogarytmy dwóch najniższych rzędów $\mathrm{Li}_1(z)=-\ln(1-z)$, $\mathrm{Li}_0(z)=\frac{z}{1-z}$. Wykorzystując wzór (247), który należy scałkować wielokrotnie przez części można przedstawić $\mathrm{Li}_n(z)$ w postaci

$$\mathrm{Li}_n(z) = C+\int(\ln z)'\,\mathrm{Li}_{n-1}(z)dz = ... = C+\ln z\,\mathrm{Li}_{n-1}(z)-\frac{1}{2}(\ln z)^2\,\mathrm{Li}_{n-2}(z)$$
$$+\frac{1}{2\cdot3}(\ln z)^3\,\mathrm{Li}_{n-3}(z)+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!}(\ln z)^{n-2}\,\mathrm{Li}_2(z)+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\ln z)^{n-1}\,\ln(1-z)$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int\frac{(\ln z)^{n-1}}{1-z}dz. \tag{248}$$

[17] Zob. tablice całek [162], formuła (1.4.24.1).



Rysunek 1: Grupa programów, których celem jest obliczenie $\int S_t^{(0)t} dr$. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

Podstawienie $z = -e^{-2u}$ wykonane w całce $\int \frac{(\ln z)^{n-1}}{1-z} dz$ prowadzi do tożsamości

$$(-1)^{n-1} \int \frac{(\ln z)^{n-1}}{1-z} dz = 2^n \int u^{n-1} \frac{e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du = 2^{n-1} \left[\frac{u^n}{n} - \int u^{n-1} \tanh u \, du \right]. \tag{249}$$

Wstawienie powyższego do wyrażnia (248) i zmiana sum $n-1 \to p$ pozwala otrzymać

$$\int u^p \tanh u \, du = C + \frac{u^{p+1}}{p+1} + u^p \ln(1+e^{-2u}) - \sum_{k=1}^{p} \frac{p!}{2^k (p-k)!} u^{p-k} \operatorname{Li}_{k+1}(-e^{-2u}) \tag{250}$$

i w konsekwencji obliczyć poszukiwaną całkę $\int u^p \tanh u \, du$. Obliczenia całki $\int S_t^{(0)t} dr$ z wykorzystaniem powyższych tożsamości wykonane zostały za pomocą grupy programów przedstawionych na rysunku 1. Program „$\int u^p (\tanh u)^n$" oblicza całki $\int u^p (\tanh u)^n$ dla określonych wartości całkowitych p, n wykorzystując tożsamości (242-245) oraz (250). Program „$m^{(0)\prime\ldots\prime}$" oblicza pochodną $\frac{d}{dr^p} m^{(0)}$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ korzystając z (236). Program „$\int S_t^{(0)t} dr$" oblicza całkę $\int S_t^{(0)t} dr$ wykorzystując definicję (239) obiektu $S_t^{(0)t}$ oraz wyniki dwóch poprzednich programów.

Po wykorzystaniu tożsamości całkowych funkcja $\Delta m^{(1)}$ wyraża się poprzez polilogarytmy $Li_i(s)$ i ma postać

$$\Delta m^{(1)}(r) = -\sum_{i=0}^{6} \left(\alpha f_i^{(\alpha)} + \beta f_i^{(\beta)} \right) \operatorname{Li}_i(-\xi) + b_2 \left[\frac{1-\xi}{\xi} - \frac{2Q^2}{\mathcal{M} r (1+\xi)} \right] \operatorname{Li}_0(-\xi) - \mu. \tag{251}$$

Stała μ określona jest poprzez definicję masy $\lim_{r\to\infty} m^{(1)}(r) = \mathcal{M}$ i wynosi

$$\mu = \frac{\pi^2 \mathcal{M}^5}{Q^6} \left[\alpha \left(8 - \frac{31}{315}\pi^4 \right) + \beta \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{45}\pi^2 - \frac{31}{630}\pi^4 \right) \right], \tag{252}$$

gdzie $\xi = \exp\left(-\frac{Q^2}{\mathcal{M} r}\right)$, natomiast jawna postać funkcji $f_i^{(\alpha)}$ i $f_i^{(\beta)}$ przedstawiona została w dodatku

„Funkcje $f_i^{(\alpha)}$ i $f_i^{(\beta)}$". Można pokazać, że $\lim_{r\to 0}\Delta m^{(1)}(r) = -\mu + b_2$. Aby w $r = 0$ czasoprzestrzeń była regularna w sensie metrycznym, należy założyć, że $\lim_{r\to 0}\Delta m^{(1)}(r) = 0$, zatem parametr b_2 należy przyjąć jako $b_2 = -\mu$.

Istotną cechą elementu liniowego klasycznej czarnej dziury typu ABGB jest to, że jeśli ładunek wynosi zero, to geometria ulega drastycznej zmianie i czasoprzestrzeń nie jest wtedy regularna. Aby czasoprzestrzeń była regularna, wystarczy jednak uwzględnić infinitezymalny ale niezerowy ładunek Q. O ile klasyczne rozwiązanie ABGB w granicy $Q \to 0$ redukuje się do czasoprzestrzeni Schwarzschilda, to rozwiązanie uwzględniające człony kwadratowe już takiej własności nie posiada. Można pokazać, że gdy $Q \to 0$, to element liniowy przechodzi w

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} - \frac{2\mathcal{M}^2}{r^4}k\right)dt^2 + \left[(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r})^{-1} + \left(1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\right)^{-2}\frac{2\mathcal{M}^2}{r^4}k\right]dr^2 \\ &\quad + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \end{aligned} \tag{253}$$

gdzie $k \approx (5.781\alpha - 0.486\beta) \sim b_2$. Jest to konsekwencją nałożenia warunku regularności na czasoprzestrzeń ($b_2 = -\mu$). W przypadku nałożenia innego warunku: $b_2 = 0$, a tym samym $k = 0$, element liniowy (253) przechodzi w metrykę Schwarzschilda, lecz czasoprzestrzeń nie jest wtedy regularna.

Promień horyzontu zdarzeń r_+ oraz temperatura Hawkinga T_H również nie redukują się do wielkości czasoprzestrzeni Schwarzschilda, ponieważ wynoszą wtedy

$$\begin{aligned} r_+ &= 2\mathcal{M}\left(1 + \frac{k}{8\mathcal{M}^2}\right), \\ T_H &= \frac{1}{8\pi\mathcal{M}}\left(1 + \frac{k}{4\mathcal{M}^2}\right). \end{aligned} \tag{254}$$

Jak można zauważyć, zarówno metryka, horyzont zdarzeń, jak i temperatura Hawkinga redukują się do odpowiedników czasoprzestrzeni Schwarzschilda w szczególnym przypadku $k = 0$, co oznacza, że α i β muszą spełniać warunek $\alpha = \frac{1680+98\pi^2-31\pi^4}{2(31\pi^4-2520)}\beta$.

W odniesieniu do problemu regularności czasoprzestrzeni obliczenia zostaną ograniczone do pierwszego rzędu perturbacji. Aby wykazać, że czasoprzestrzeń jest regularna, należy udowodnić, że wszystkie skalary krzywizny są nieosobliwe. Jako przykład można rozważyć zachowanie jednego ze skalarów - skalara Kretschmanna $K^{(1)} = R_{abcd}R^{abcd}$. Skalar ten można zapisać w postaci $K^{(1)} = K_0 + \Delta K$, gdzie człon K_0 pochodzący od teorii bez poprawek kwadratowych jest nieosobliwy [2]. Należy zatem dowieść regularności (nieosobliwości) obiektu ΔK, którego pojawienie się jest skutkiem

włączenia do teorii poprawek kwadratowych. Obliczenia pokazują, że ΔK wynosi

$$\begin{aligned}\Delta K &= \left(\frac{128m^{(0)}m^{(0)\prime}}{r^4}+\frac{16m^{(0)}}{r^4}-\frac{80m^{(0)2}}{r^5}-\frac{16m^{(0)\prime}}{r^3}-\frac{24m^{(0)}m^{(0)\prime\prime}}{r^3}+\frac{24m^{(0)}m^{(0)\prime\prime}}{r^2}\right.\\ &\left.-\frac{48m^{(0)\prime 2}}{r^3}\right)\Delta\psi^{(1)\prime}+\left(-\frac{8m^{(0)\prime\prime}}{r}+\frac{16m^{(0)}m^{(0)\prime\prime}}{r^2}+\frac{32m^{(0)2}}{r^4}+\frac{16m^{(0)\prime}}{r^2}\right.\\ &\left.-\frac{32m^{(0)}m^{(0)\prime}}{r^3}-\frac{16m^{(0)}}{r^3}\right)\Delta\psi^{(1)\prime\prime}+\left(-\frac{16m^{(0)\prime\prime}}{r^4}-\frac{96m^{(0)}}{r^6}+\frac{64m^{(0)\prime}}{r^5}\right)\Delta m^{(1)}\\ &+\left(\frac{16m^{(0)\prime}}{r^3}-\frac{16m^{(0)}}{r^4}-\frac{8m^{(0)\prime\prime}}{r^2}\right)\Delta m^{(1)\prime\prime}+\left(\frac{16m^{(0)\prime\prime}}{r^3}-\frac{64m^{(0)\prime}}{r^4}+\frac{64m^{(0)}}{r^5}\right)\Delta m^{(1)\prime}.\end{aligned} \tag{255}$$

Jedynym punktem, w którym można spodziewać się osobliwości jest $r=0$. Regularność ΔK wynika z własności $\lim_{r\to 0}\frac{d^k\Delta\psi^{(1)}}{dr^k}<\infty$ oraz z zachowania pochodnych $\frac{d^k m^{(0)}}{dr^k}$w pobliżu $r=0$ w postaci

$$\frac{d^k m^{(0)}}{dr^k}\sim\sum_{i=k+1}^{2k}c_i r^{-i}\exp(-Q^2/\mathcal{M}r). \tag{256}$$

Analogicznie do obliczeń przeprowadzonych dla skalara Kretschmana można udowodnić regularność innych niezmienników krzywiznowych.

5 Czarne dziury w teoriach wysokiego rzędu

Niniejszy rozdział składa się z dwóch podrozdziałów. Pierwszy z nich 5.1 dotyczy wpływu skalarnego masywnego pola kwantowego na geometrię czarnych dziur. W szczególności poruszane są problemy: konstrukcja działania efektywnego wysokiej dokładności (rzędu $1/m^4$) a więc również obliczanie współczynników HaMideW wysokiego rzędu, wpływ tej wysokiej dokładności na tensor energii-pędu w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma, zwrotne działanie pola na geometrię Schwarzschilda, wpływ wysokiej dokładności na geometrię otoczenia horyzontu zdarzeń ekstremalnej czarnej dziury Reissnera-Nordströma, której geometria jest zaburzona przez pole.

Podrozdział ten opiera się na wynikach sześciu publikacji:

- J. Matyjasek, D. Tryniecki and M. Klimek, *Regular black holes in an asymptotically de Sitter universe,* Mod. Phys. Lett. **A23**, 3377 (2009).
- J. Matyjasek and D. Tryniecki, *Next-to-leading term of the renormalized stress-energy tensor of the quantized massive scalar field in Schwarzschild spacetime. The back reaction*, Phys. Rev. **D79,** 084017 (2009).
- J. Matyjasek and D. Tryniecki, *$ADS_2 \times S^2$ geometries and the extreme quantum-corrected black holes,* Mod. Phys. Lett. **A24**, 2517 (2009).
- J. Matyjasek, D. Tryniecki and K. Zwierzchowska, *Vacuum polarization of the quantized massive scalar field in Reissner-Nordstrom spacetime,* Phys. Rev. **D81**, 124047 (2010).

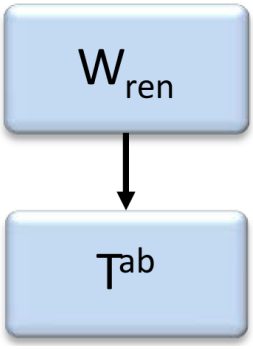
Podrozdział 5.3 dotyczy uogólnienia rozwiązań czarnodziurowych teorii Lovelocka.
Podrozdział ten opiera się na publikacji:

- J. Matyjasek, M. Telecka and D. Tryniecki, *Higher dimensional black holes with a generalized gravitational action,* Phys. Rev. **D73**, 124016 (2006).

5.1 Zwrotne działanie pola skalarnego na metrykę czarnych dziur

5.1.1 Współczynniki HaMiDeW - praktyczna realizacja obliczeń

Aby poznać zwrotne działanie pola skalarnego na metrykę czarnej dziury (wpływ polaryzacji próżni na geometrię czarnej dziury) należy rozwiązać półklasyczne równania Einsteina (112). W równaniach tych kluczowe znaczenie ma znajomość jawnej postaci zrenormalizowanego tensora energii-pędu $\langle T_{ab} \rangle_{ren}$. To z kolei wymaga znajomości wszystkich współczynników $[a_n]$ (n=3,...,∞). Współczynnik $[a_3]$ policzył Sakai [143] dla pola skalarnego propagującego się w zakrzywionej czasoprzestrzeni oraz Gilkey [165] w ogólnym przypadku dla pól tensorowych zdefiniowanych na rozmaitościach Riemanna. Współczynnik $[a_4]$ został policzony przez Amsterdamskiego, Berkina i O'Connora [9] dla pola skalarnego oraz przez Avramidiego [7, 8] dla pola skalarnego, wektorowego i spinorowego. Współczynnik $[a_5]$ obliczył Van de Ven dla pola skalarnego, wektorowego i spinorowego [166], a także Ottewill i



Rysunek 2: Dwa etapy obliczeń zrenormalizowanego tensora energii-pędu: obliczenie W_{ren} i obliczenie T^{ab}.

Wardell [167]. Znajomość kilku pierwszych współczynników HaMiDeW nie pozwala jednak obliczyć działania efektywnego W_{ren} (121). Jego niekompletna postać

$$W_{ren} = \frac{1}{32\pi^2}\left\{\frac{1}{m^2}\int d^4x\sqrt{-g}[a_3] + \frac{1}{m^4}\int d^4x\sqrt{-g}[a_4]\right\} + ... \tag{257}$$

może być jednak dobrym przybliżeniem, gdy masa pola m jest duża. Obliczenie przybliżonego działania W_{ren}, wymagające znajomości współczynników $[a_3]$ oraz $[a_4]$, jest pierwszym z dwóch etapów prowadzącym do otrzymania zrenormalizowanego tensora energii-pędu (rysunek 2). We wstępnej fazie tego etapu porównane zostały współczynniki $[a_4]$ występujące w różnych pracach [7, 8, 9] i zauważono, że nie są one identyczne. Do obliczeń współczynników HaMiDeW użyto czterech metod: jawnie kowariantnej, wykorzystującej współczynniki Hadamarda, poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych oraz jawnie kowariantnej bezindeksowej. W ramach tych metod wykorzystano różne sposoby obliczeń. Obliczenia współczynników $[a_n]$ wykonywane zostały przez projekt programistyczny, który ma kilka wersji w zależności od metody, sposobu ich obliczeń i użytych języków programowania[18] (rysunek 3). Współczynniki $[a_n]$ policzone zostały na 27-em sposobów. Każdemu sposobowi odpowiada jeden projekt programistyczny. Praktyczna realizacja obliczeń współczynników $[a_n]$ zostanie przedstawiona na przykładzie projektu napisanego w języku Form opartego na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy. Pozostałe projekty przedstawione zostały w podrozdziale 6.1.

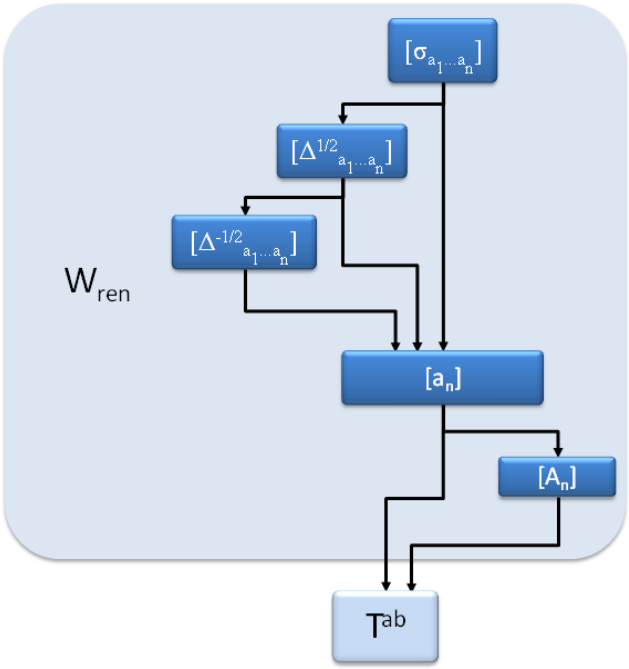
Struktura programistyczna projektu opartego na języku Form przedstawiona została na rysunku 4. Ciemnoniebieskie bloki oznaczają programy komputerowe napisane w języku Form. Nazwa bloku odpowiada wielkości, którą program ten oblicza, natomiast strzałki obrazują, gdzie przekazywany jest wynik obliczeń.

Pierwszym z programów jest „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$", którego zadaniem jest obliczenie granic koincydencji pochodnych funkcji σ. Do obliczeń tych wielkości wykorzystywana jest relacja $g^{\alpha\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = \sigma$. Na-

[18] W obliczeniach współczynników HaMideW wykorzystywano języki Form, Perl, Mathematica (w tym pakiety Invar i MathTensor), Maple (w tym pakiety GRTensor) oraz Lisp.

Metoda obliczeń	*Sposób*	*Język/Wersja W_{ren}*				
		Form	TForm	Mathematica	Maple	Lisp
rekurencyjna jawnie kowariantna	*sposób podstawowy*	+	+	+	+	+
	sposób zmodyfikowany I	+	+	+		
	sposób zmodyfikowany II	+		+	+	+
poprzez związek ze współczynnikami Hadamarda	*sposób podstawowy*	+	+	+	+	+
	sposób zmodyfikowany I	+	+	+		
	sposób zmodyfikowany II	+		+	+	+
poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych	*sposób podstawowy*	+		+		
rekurencyjna jawnie kowariantna bezindeksowa	*sposób podstawowy*	+				

Rysunek 3: Metody, sposoby oraz języki, którymi wykonane zostały obliczenia $[a_n]$, a tym samym obliczenia przybliżonej wartości W_{ren}. Plus oznacza, że dany projekt programistyczny został wykonany w oparciu o daną metodę, sposób oraz język.



Rysunek 4: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjna jawnie kowariantną - sposób podstawowy. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

jprostsze obiekty $[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$ wygenerowane przez program mają postać

$$[\sigma_{a_1a_2a_3a_4}] = -\frac{1}{3}\left(R_{a_1a_3a_2a_4} + R_{a_1a_4a_2a_3}\right), \tag{258}$$

$$\begin{aligned}[\sigma_{a_1a_2a_3a_4a_5}] &= -\frac{1}{4}\{R_{a_1a_3a_2a_4a_5} + R_{a_1a_3a_2a_5a_4} + R_{a_1a_4a_2a_3a_5} + R_{a_1a_4a_2a_5a_3} + R_{a_1a_5a_2a_3a_4} \\ &\quad + R_{a_1a_5a_2a_4a_3}\}. \end{aligned} \tag{259}$$

Jak można zauważyć, $[\sigma_{a_1a_2a_3a_4}]$ jest sumą dwóch obiektów krzywiznowych, a $[\sigma_{a_1a_2a_3a_4a_5}]$ sześciu. Obiekty wyższych rzędów są o wiele bardziej skomplikowane, ponieważ $[\sigma_{a_1\ldots a_6}]$ ma 92 elementy, $[\sigma_{a_1\ldots a_7}]$ ma 790 elementy, $[\sigma_{a_1\ldots a_8}]$ ma 13306 elementów, $[\sigma_{a_1\ldots a_9}]$ ma 196196 elementów, a $[\sigma_{a_1\ldots a_{10}}]$ ma 4 miliony elementów. Duża liczba członów dwóch ostatnich współczynników niesie konsekwencje w postaci dużego rozmiaru pliku zawierającego wynik - współczynnik $[\sigma_{a_1\ldots a_9}]$ zajmuje 5 MB, natomiast współczynnik $[\sigma_{a_1\ldots a_{10}}]$ - 100 MB. Wiedza na temat przyrostu wielkości danych pozwala oszacować, że rozmiar pliku zawierającego $[\sigma_{a_1\ldots a_{12}}]$ wynosiłby około kilkudziesięciu GB, a zatem można przypuszczać, że obliczenie współczynnika $[a_5]$ nie jest możliwe na niewyspecjalizowanych komputerach. Kolejny blok „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$" do obliczeń wykorzystuje równanie

$$4\triangle^{1/2} = 2\left(\triangle^{1/2}\right)_{;a}\sigma^{;a} + \triangle^{1/2}\sigma_{;a}{}^{a}, \tag{260}$$

a zatem w obliczeniach niezbędna jest również znajomość granic koincydencji funkcji σ. Najprostsze funkcje $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$ to

$$\left[\Delta^{1/2}_{a_1a_2}\right] = \frac{1}{6}R_{a_1a_2}, \tag{261}$$

$$\left[\Delta^{1/2}_{a_1a_2a_3}\right] = \frac{1}{12}\{R_{a_1a_2;a_3} + R_{a_1a_3;a_2} + R_{a_2a_3;a_1}\}. \tag{262}$$

Do obliczeń współczynnika $[a_4]$ wymagana jest znajomość współczynników $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$ do rzędu ósmego włącznie. Program „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$" wykorzystuje równanie $\triangle^{1/2}\triangle^{-1/2} = 1$, generując na przykład:

$$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1a_2}\right] = -\frac{1}{6}R_{a_1a_2}, \tag{263}$$

$$\left[\Delta^{1/2}_{a_1a_2a_3}\right] = -\frac{1}{12}\{R_{a_1a_2;a_3} + R_{a_1a_3;a_2} + R_{a_2a_3;a_1}\}. \tag{264}$$

Kluczowym programem jest „$[a_n]$" korzystający z równania rekurencyjnego

$$\sigma^{;a}a_{n+1;a} + (n+1)\,a_{n+1} - \triangle^{-1/2}\left(\triangle^{1/2}a_n\right)_{;a}{}^{a} = -R\xi a_n. \tag{265}$$

Z powyższego równania wynika, że obliczenia współczynnika $[a_4]$ wymagają uprzednich obliczeń granic koincydencji współczynników niższego rzędu. Tymi współczynnikami są $[a_{3;a_1a_2}]$, $[a_{3;a_1}]$, $[a_3]$,

$[a_{2;a_1\ldots a_4}]$, $[a_{2;a_1a_2a_3}]$, $[a_{2;a_1a_2}]$, $[a_{2;a_1}]$, $[a_2]$, $[a_{1;a_1\ldots a_6}]$, $[a_{1;a_1\ldots a_5}]$, $[a_{1;a_1\ldots a_4}]$, $[a_{1;a_1a_2a_3}]$, $[a_{1;a_1a_2}]$, $[a_{1;a_1}]$ i $[a_1]$. Po obliczeniach i uproszczeniach wykonanych za pomocą pakietu Invar[19] [168] współczynnik $[a_4]$ ma postać

$$[a_4] = a_4^{(0)} + \xi a_4^{(1)} + \xi^2 a_4^{(2)} + \xi^3 a_4^{(3)} + \xi^4 a_4^{(4)}, \tag{266}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_4^{(0)} \;=\;& \frac{1}{3780}R_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b}{}_{c}{}^{c} + \frac{229}{30240}RR_{;a}R^{;a} - \frac{241}{15120}RR_{ab;c}R^{ab;c} - \frac{1}{840}RR_{ab;c}R^{ac;b} \\
&+\frac{1}{672}RR_{abcd;e}R^{abcd;e} + \frac{1}{1800}R_{;a}{}^{a}R_{;b}{}^{b} + \frac{13}{25200}R_{;ab}R^{;ab} - \frac{1}{405}RR_{abcd}R_{ef}{}^{ab}R^{cdef} \\
&+\frac{13}{37800}R_{;ab}R^{ab}{}_{;c}{}^{c} - \frac{1}{8400}R_{ab;c}{}^{c}R^{ab}{}_{;d}{}^{d} + \frac{13}{12600}R_{ab;cd}R^{ab;cd} - \frac{1}{450}R_{ab;cd}R^{ac;bd} \\
&+\frac{13}{12600}R_{ab;cd}R^{cd;ab} + \frac{1}{3150}R_{abcd;ef}R^{abcd;ef} + \frac{11}{7560}R_{;a}R_{;b}{}^{ab} + \frac{1}{1890}R_{ab;c}R^{;abc} \\
&-\frac{1}{7560}R_{ab;c}R^{ab;c}{}_{d}{}^{d} - \frac{1}{3780}R_{ab;c}R^{ac;b}{}_{d}{}^{d} + \frac{1}{315}R_{abcd;e}R^{ac;bde} - \frac{13}{15120}R_{;a}R_{;b}R^{ab} \\
&+\frac{13}{9450}R_{abcd}R_{efg}{}^{b}R_{h}{}^{gcd}R^{ahef} + \frac{1}{4200}RR_{;ab}R^{ab} - \frac{5}{504}RR_{ab;c}{}^{c}R^{ab} + \frac{1}{1890}R_{;abc}{}^{c}R^{ab} \\
&+\frac{29}{75600}R_{abcd}R_{efgh}R^{abcd}R^{efgh} - \frac{1}{7560}R_{ab;c}{}^{c}{}_{d}{}^{d}R^{ab} + \frac{1}{630}R_{;a}R_{b}{}^{a}{}_{;c}R^{bc} \\
&-\frac{7253}{302400}R^2R_{ab}R^{ab} - \frac{271}{7560}R_{;a}R_{bc}{}^{;a}R^{bc} - \frac{17}{3150}R_{;a}{}^{a}R_{bc}R^{bc} + \frac{22}{675}RR_{ab}R_{c}{}^{a}R^{bc} \\
&+\frac{89}{1890}R_{ab;c}R_{d}{}^{a;c}R^{bd} + \frac{1}{378}R_{ab;c}R_{d}{}^{c;a}R^{bd} + \frac{83}{6300}R_{ab;c}{}^{c}R_{d}{}^{a}R^{bd} + \frac{4}{1575}R^2R_{;a}{}^{a} \\
&-\frac{29}{4725}R_{ab;cd}R^{ac}R^{bd} - \frac{341}{18900}R_{ab}R_{cd}R^{ac}R^{bd} - \frac{4}{945}R_{ab;c}R_{d}{}^{a;b}R^{cd} + \frac{5743}{1814400}R^4 \\
&+\frac{109}{18900}R_{ab;cd}R^{ab}R^{cd} + \frac{703}{151200}R_{ab}R_{cd}R^{ab}R^{cd} + \frac{71}{3780}R_{ab;c}R_{d}{}^{a}{}_{e}{}^{b;c}R^{de} \\
&+\frac{1}{126}R_{ab;c}R_{d}{}^{a}{}_{e}{}^{c;b}R^{de} - \frac{1}{140}R_{abcd;e}R_{f}{}^{ace;b}R^{df} - \frac{1}{945}R_{;a}R_{bc;d}R^{abcd} + \frac{1}{1680}RR_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b} \\
&+\frac{67}{33600}R^2R_{abcd}R^{abcd} + \frac{29}{6300}RR_{ab;cd}R^{acbd} + \frac{1}{945}R_{ab;cde}{}^{e}R^{acbd} + \frac{1}{1260}R_{ab;c}R^{ab}{}_{;d}R^{cd} \\
&+\frac{17}{18900}R_{;ab}R_{cd}R^{acbd} + \frac{83}{10800}RR_{ab}R_{cd}R^{acbd} + \frac{29}{1890}R_{ab;c}R_{de}{}^{;c}R^{adbe} \\
&+\frac{32}{4725}R_{ab;c}{}^{c}R_{de}R^{adbe} - \frac{22}{4725}R_{ab;cd}R_{e}{}^{b}R^{adce} + \frac{1}{4725}R_{ab;cd}R_{e}{}^{c}{}_{f}{}^{d}R^{aebf} \\
&-\frac{4}{945}R_{ab;c}R_{de}{}^{;b}R^{aecd} + \frac{2}{1575}R_{abcd;ef}R^{bd}R^{aecf} + \frac{103}{12600}R_{ab}R_{cd}R_{e}{}^{a}{}_{f}{}^{b}R^{cfde} \\
&-\frac{1}{945}R_{ab;c}R_{d}{}^{a}{}_{;e}R^{bcde} + \frac{29}{7560}R_{;a}R_{bcde}{}^{;a}R^{bcde} + \frac{1}{1400}R_{;a}{}^{a}R_{bcde}R^{bcde} \\
&-\frac{73}{9450}R_{ab;cd}R_{ef}{}^{ad}R^{bcef} + \frac{1}{10800}R_{ab}R_{cd}R_{ef}{}^{ac}R^{bdef} + \frac{1}{315}R_{ab;c}R_{def}{}^{c;a}R^{bfde} \\
&-\frac{547}{302400}R_{ab}R^{ab}R_{cdef}R^{cdef} - \frac{1}{168}R_{abcd;e}R_{fg}{}^{ab;e}R^{cdfg} + \frac{13}{18900}R_{abcd}R_{efgh}R^{abef}R^{cdgh} \\
&,
\end{aligned} \tag{267}$$

[19] Pakiet Invar opracowany został przez Renato Portugala i Leona R. U. Manssura.

$$
\begin{aligned}
a_4^{(1)} &= -\frac{11}{1680}R^4 - \frac{1}{112}RR_{;a}R^{;a} + \frac{1}{2520}RR_{ab;c}R^{ab;c} + \frac{1}{189}RR_{abcd}R_{ef}{}^{ab}R^{cdef} + \frac{1}{1260}RR_{ab;c}R^{ac;b} \\
&\quad -\frac{1}{560}RR_{abcd;e}R^{abcd;e} - \frac{41}{5040}R^2R_{;a}{}^{a} - \frac{1}{180}R_{;a}{}^{a}R_{;b}{}^{b} - \frac{1}{210}R_{;ab}R^{;ab} - \frac{1}{630}R_{;ab}R^{ab}{}_{;c}{}^{c} \\
&\quad -\frac{1}{72}R_{;a}R_{;b}{}^{ab} - \frac{1}{420}R_{ab;c}R^{;abc} - \frac{1}{840}R_{;a}{}^{a}R_{bcde}R^{bcde} - \frac{2}{315}RR_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b} - \frac{1}{840}R_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b}{}_{c}{}^{c} \\
&\quad +\frac{17}{2520}R_{;a}R_{;b}R^{ab} - \frac{1}{315}RR_{;ab}R^{ab} - \frac{1}{420}R_{;a}R_{bcde}{}^{;a}R^{bcde} + \frac{1}{630}RR_{ab;c}{}^{c}R^{ab} \\
&\quad -\frac{1}{420}R_{;abc}{}^{c}R^{ab} + \frac{109}{2520}R^2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{1260}R_{;a}R_{bc}{}^{;a}R^{bc} + \frac{1}{630}R_{;a}R_{b}{}^{a}{}_{;c}R^{bc} \\
&\quad +\frac{1}{504}R_{;a}{}^{a}R_{bc}R^{bc} - \frac{73}{1890}RR_{ab}R_{c}{}^{a}R^{bc} + \frac{1}{630}R_{;a}R_{bc;d}R^{abcd} - \frac{1}{210}R^2R_{abcd}R^{abcd} \\
&\quad -\frac{1}{105}RR_{ab;cd}R^{acbd} - \frac{1}{210}R_{;ab}R_{cd}R^{acbd} - \frac{19}{630}RR_{ab}R_{cd}R^{acbd}, \qquad (268) \\
a_4^{(2)} &= \frac{1}{144}R^4 + \frac{17}{360}RR_{;a}R^{;a} + \frac{2}{45}R^2R_{;a}{}^{a} + \frac{1}{72}R_{;a}{}^{a}R_{;b}{}^{b} + \frac{1}{90}R_{;ab}R^{;ab} + \frac{1}{30}R_{;a}R_{;b}{}^{ab} \\
&\quad +\frac{1}{60}RR_{;a}{}^{a}{}_{b}{}^{b} - \frac{1}{60}R_{;a}R_{;b}R^{ab} + \frac{1}{90}RR_{;ab}R^{ab} - \frac{1}{360}R^2R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{360}R^2R_{abcd}R^{abcd}, \qquad (269) \\
a_4^{(3)} &= -\frac{1}{36}R^4 - \frac{1}{12}RR_{;a}R^{;a} - \frac{1}{12}R^2R_{;a}{}^{a} \qquad (270) \\
a_4^{(4)} &= \frac{1}{24}R^4. \qquad (271)
\end{aligned}
$$

Porównanie otrzymanego wyniku współczynnika $[a_4]$ z obliczeniami Avramidiego [7, 8] wykazało ich identyczność. Ponadto wynik został poddany testom. Testem wstępnym było obliczenie granic koincydencji pochodnych bitensorów σ, $\triangle^{-1/2}$, $\triangle^{1/2}$ i porównanie ich z literaturą [5]. Wyniki okazały się takie same. W literaturze znane są ponadto wartości współczynnika $[a_4]$ dla niektórych geometrii czasoprzestrzeni. Dla czasoprzestrzeni de Sittera jest on opisany formułą Dowkera

$$
[a_4]^{dS} = -\frac{6}{(4a^2)^4}\sum_{k=0}^{4}\frac{|(2^{2k-1}-1)B_{2k}|}{k!(4-k)!} = -\frac{1}{105a^8}, \qquad (272)
$$

gdzie B_{2k} to liczby Bernoulliego, natomiast a to promień krzywizny [169]. Z kolei dla czasoprzestrzeni Nariai ma on postać

$$
[a_4] = 0. \qquad (273)
$$

Uzyskane wyniki $[a_4]$ wykazały zgodność z powyższymi. Testem głównym była zgodność z literaturą [135, 5] czterech pierwszych współczynników HaMiDeW ($[a_0]$, $[a_1]$, $[a_2]$ i $[a_3]$). Test ten potwierdził prawidłowość uzyskanych wyników.

Ostatni program „$[A_n]$" ma na celu uproszczenie pochodzącej od współczynnika $[a_n]$ części działania efektywnego w taki sposób, aby obliczenia tensora energii-pędu dla czasoprzestrzeni określonego typu były szybsze. Głównym czynnikiem mającym wpływ na szybkość otrzymania wyników są wysokie pochodne tensora Riemanna występujące w tensorze energii-pędu. Jedną ze strategii upraszczających, mających na celu obniżenie wysokich pochodnych, jest wykorzystanie twierdzenia

Gaussa oraz własności znikania wariacji na brzegach. Twierdzenie Gaussa ma postać

$$\int G^i_{;i}\sqrt{-g}dx = \oint G^i\sqrt{-g}dS_i. \tag{274}$$

Obliczenia wariacji powyższego obiektu po metryce $g_{\alpha b}$ przy wykorzystaniu faktu, że całka okrężna liczona jest na brzegach, a wariacja na brzegach znika, pozwalają wywnioskować, że

$$\delta \int G^i_{;i}\sqrt{-g}dx = 0. \tag{275}$$

Powyższa własność umożliwia pominięcie dowolnego wyrażenia o strukturze $\int G^i_{;i}\sqrt{-g}dx$ w działaniu efektywnym W_{ren}. Można również skonstruować bardziej zaawansowany algorytm upraszczania oparty na twierdzeniu (275). Algorytm ten został zaimplementowany w programie „$[A_n]$", a istotę jego działania najlepiej obrazuje przykład jednego z członów W_{ren}. Przykładowy człon ma postać

$$W_{ren} = ... + \int d^4x\sqrt{-g}R_{;ab}R^{ab} + ... \ . \tag{276}$$

W celu uproszczenia można dodać do niego element $-\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{;a}R^{ab}\right)_{;b}$, który nie wnosi żadnego wkładu do T^{ab}, co wynika ze wzoru (275). Otrzymano wówczas

$$W_{ren} = ... + \int d^4x\sqrt{-g}\left\{R_{;ab}R^{ab} - \left(R_{;a}R^{ab}\right)_{;b}\right\} + ... = ... - \int d^4x\sqrt{-g}R_{;a}R^{ab}{}_{;b} + ... \ . \tag{277}$$

Można zauważyć, że w efekcie tej operacji rząd maksymalnej pochodnej tensora Riemanna uległ obniżeniu o jeden, co było celem uproszczenia. Po zastosowaniu programu „$[A_n]$" na obiekcie $\int d^4x\sqrt{-g}[a_3]$, który jest częścią działania efektywnego W_{ren} (257) otrzymano wynik $\int d^4x\sqrt{-g}[A_3]$, gdzie

$$\begin{aligned}
[A_3] \ = \ & R^3/1296 - \frac{1}{72}\xi R^3 \ + \frac{1}{12}\xi^2 R^3 \ - \frac{1}{6}\xi^3 R^3 \ - \frac{169}{50400}\ R_{;a}\ R^{;a} + \frac{1}{30}\xi\ R_{;a}\ R^{;a} \\
& - \frac{1}{12}\xi^2\ R_{;a}\ R^{;a} - \frac{1}{1400}R_{ab;c}\ R^{ab;c} + \frac{13}{12600}\ R_{ab;c}\ R^{ac;b} - \frac{1}{16800}R_{abcd;e}\ R^{abcd;e} \\
& - \frac{1}{8400}R_{abcd;e}\ R^{abce;d} - \frac{1}{1080}R\ R_{ab}\ R^{ab} + \frac{1}{180}\xi R\ \ R_{ab}\ R^{ab} + \frac{11}{113400}\ R_{ab}\ R_c{}^a\ R^{bc} \\
& + \frac{1}{1080}R\ R_{abcd}\ R^{abcd} - \frac{1}{180}\xi R\ \ R_{abcd}\ R^{abcd} - \frac{17}{37800}\ R_{ab}\ R_{cd}\ R^{acbd} \\
& - \frac{2}{14175}\ R_{abcd}\ R_e{}^a{}_f{}^c\ R^{bedf} + \frac{1}{2025}R_{abcd}\ R_{ef}{}^{ab}\ R^{cdef} + \frac{1}{9450}R_{ab}\ R_{cde}{}^a\ R^{becd}.
\end{aligned} \tag{278}$$

Porównując powyższy wynik z $[a_3]$ (142), można zauważyć, że ilość członów z kłopotliwymi wysokimi pochodnymi tensora Riemanna zmalała.

5.1.2 Tensor energii-pędu i jego własności w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma

Fluktuacja kwadratowa

Fluktuacja kwadratowa jest jednym ze składników tensora energii-pędu. Jej zbadanie może być potraktowane jako pierwszy krok w analizie potencjalnych nieskończoności tego tensora. Fluktuacja kwadratowa jest związana z propagatorem Feynmana relacją

$$\left\langle \phi^2 \right\rangle = \lim_{x' \to x} \left\langle \phi\left(x\right) \phi\left(x'\right) \right\rangle = -i \lim_{x' \to x} G_F\left(x, x'\right). \tag{279}$$

Związek G_F ze współczynnikami a_n pozwala wykazać tożsamość

$$\left\langle \phi^2 \right\rangle_k = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{n=2}^{k} \frac{(n-2)!}{m^{2(n-1)}} \left[a_n\right], \tag{280}$$

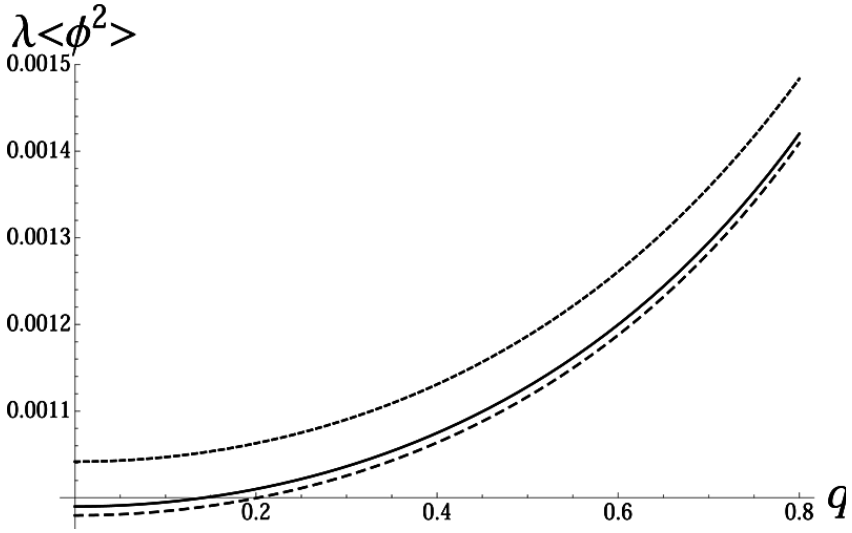
gdzie indeks k oznacza stopień dokładności obliczeń. Obliczenia $\left\langle \phi^2 \right\rangle_k$ wymagają znajomości współczynników $[a_2]$,..., $[a_{k-1}]$ i $[a_k]$. Ze względu na znajomość tylko niektórych współczynników HaMiDeW fluktuację kwadratową można policzyć z ograniczoną dokładnością. Wymagane do obliczenia $\left\langle \phi^2 \right\rangle_4$ współczynniki HaMiDeW w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma mają postać

$$[a_2] = \frac{1}{45r^6}\left(12M^2 - 24\frac{Me^2}{r} + 13\frac{e^4}{r^2}\right), \tag{281}$$

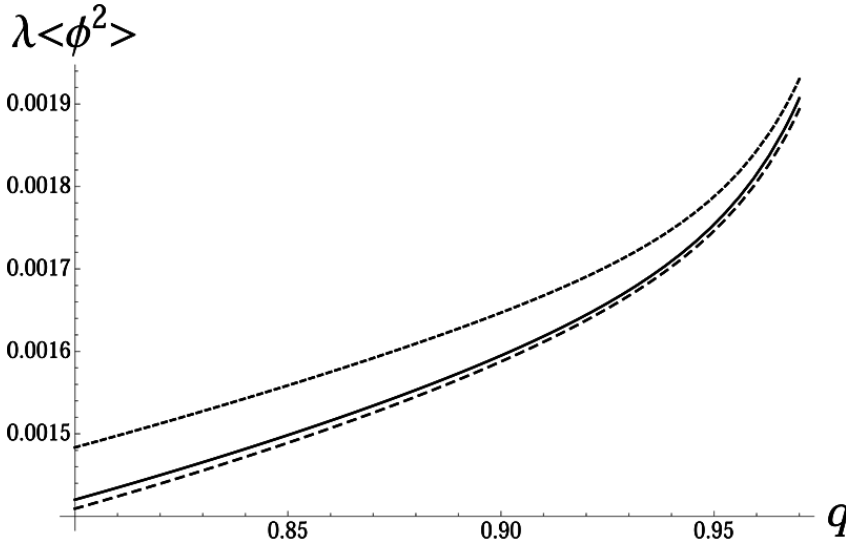
$$[a_3] = \frac{1}{r^8}\left(-\frac{194}{63}\frac{M^3}{r} + \frac{9}{7}M^2 + \frac{1111}{105}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{132}{35}\frac{Me^2}{r} - \frac{3644}{315}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{908}{315}\frac{e^4}{r^2} + \frac{1156}{315}\frac{e^6}{r^4}\right), \tag{282}$$

$$[a_4] = \frac{1}{r^{10}}\left(\frac{16549}{315}\frac{e^8}{r^6} + \frac{50132}{675}\frac{e^6}{r^4} - \frac{373652}{1575}\frac{e^6M}{r^5} + \frac{571027}{1575}\frac{e^4M^2}{r^4} + \frac{612}{25}\frac{e^4}{r^2} - \frac{318476}{1575}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{3757}{25}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{113522}{525}\frac{M^3e^2}{r^3} - \frac{4352}{175}\frac{Me^2}{r} + \frac{32}{5}M^2 + \frac{23264}{525}\frac{M^4}{r^2} - \frac{240}{7}\frac{M^3}{r}\right). \tag{283}$$

Rysunki 5 i 6 przedstawiają wykresy przeskalowanej ($\lambda = 16\pi^2M^2$) fluktuacji kwadratowej liczonej z różną dokładnością. Fluktuacja $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_2$, $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_3$, $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_4$ oznaczona jest odpowiednio linią kropkowaną, kreskowaną i ciągłą. Jest ona liczona na horyzoncie zdarzeń i zależy od parametru $q = e/M$. Wykresy pozwalają zaobserwować różnicę w obliczeniach przeprowadzonych z różną dokładnością. Można zauważyć, że $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_4$ tylko nieznacznie różni się od $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_3$, podczas gdy $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_3$ od $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_2$ już zauważalnie. Zatem wkład współczynnika $[a_3]$ do fluktuacji jest o wiele większy niż wkład współczynnika $[a_4]$. Zasadne jest więc założenie, że obliczenie przeskalowanej fluktuacji kwadratowej z dokładnością $\lambda\left\langle \phi^2 \right\rangle_3$ jest dobrym przybliżeniem. Analogiczną własność ma przeskalowana fluktuacją poza horyzontem zdarzeń.



Rysunek 5: Przeskalowana fluktuacja kwadratowa $\lambda\langle\phi^2\rangle$ ($\lambda = 16\pi^2M^2$) w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma liczona na horyzoncie zdarzeń dla $mM = 2$. Oś pozioma to $q = e/M$, zakres parametru to $q \in \langle 0, 0.8\rangle$. Linia kropkowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_2$, linia kreskowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_3$, linia ciągła odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_4$.



Rysunek 6: Przeskalowana fluktuacja kwadratowa $\lambda\langle\phi^2\rangle$ ($\lambda = 16\pi^2M^2$) w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma liczona na horyzoncie zdarzeń dla $mM = 2$. Oś pozioma to $q = e/M$, zakres parametru to $q \in \langle 0.8, 1\rangle$. Linia kropkowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_2$, linia kreskowana odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_3$, linia ciągła odpowiada $\lambda\langle\phi^2\rangle_4$.

Cechą charakterystyczną fluktuacji kwadratowej obliczonej w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma jest jej niezależność od stałej sprzężenia ξ. Jest to sytuacja wyjątkowa ponieważ analiza fluktuacji kwadratowej w innych typach czasoprzestrzeni ujawnia jej zależność od tego parametru. Przykładem może być czasoprzestrzeń ABGB-dS będąca modyfikacją czasoprzestrzeni ABGB poprzez uogólnienie jej na przypadek z niezerową stałą kosmologiczną Λ. Opisuje ją element liniowy

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left\{1-\frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1-\tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right)-\frac{\Lambda r^2}{3}\right\}dt^2+dr^2/\left\{1-\frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1-\tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right)-\frac{\Lambda r^2}{3}\right\} \\ &\quad +r^2d\Omega^2. \end{aligned} \tag{284}$$

Stała kosmologiczna Λ zmienia strukturę horyzontów ponieważ jej obecność może powodować pojawienie się oprócz horyzontu wewnętrznego r_- i zdarzeń r_+ także horyzontu kosmologicznego r_c. W zależności od położenia horyzontów rozwiązania można podzielić na cztery klasy: $r_- < r_+ < r_c$, $r_- = r_+ < r_c$ (degeneracja pierwszego rodzaju, tzw. czarna dziura „cold"), $r_- < r_+ = r_c$ (zdegenerowany horyzont drugiego rodzaju), $r_- = r_+ = r_c$ (tzw. konfiguracja „ultracold"). Przybliżona analiza, przy założeniu $\Lambda \simeq 0$ pokazuje, że dla rozwiązania typu „cold" ładunek Q i horyzont zdarzeń r_{cr} wynosi

$$\begin{aligned} Q_{cr}^2 &= \mathcal{M}^2\left[4w_0+\frac{64w_0^3}{3\left(1+w_0\right)^2}\lambda+\frac{1024w_0^5\left(5+3w_0\right)}{9\left(1+w_0\right)^5}\lambda^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{32768}{81\left(1+w_0\right)^8}\left(59+65w_0+18w_0^2\right)\lambda^3+O\left(\lambda^4\right)\right] \end{aligned} \tag{285}$$

$$\begin{aligned} r_{cr} &= \mathcal{M}\left[\frac{4w_0}{1+w_0}+\frac{64w_0^3\left(3+w_0\right)}{3\left(1+w_0\right)^4}\lambda+\frac{1024w_0^5\left(25+18w_0+3w_0^2\right)}{9\left(1+w_0\right)^7}\lambda^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{32768w_0^7}{81\left(1+w_0\right)10}\left(413+461w_0+162w_0^2+18w_0^3\right)\lambda^3+O\left(\lambda^4\right)\right], \end{aligned} \tag{286}$$

gdzie $w_0 = W_+\left(e^{-1}\right)$ [170]. Dokładne rozwiązanie równań określających horyzont zdarzeń jest niemożliwe jeśli λ jest dowolne, jednak dla poszczególnych wartości liczbowych λ można dokonać analizy numerycznej [170]. Analiza ta pokazuje, że:

1. gdy $\Lambda\mathcal{M}^2 < 1/9$, to nie istnieje taka wartość ładunku, dla którego $r_+ = r_c$,
2. gdy $1/9 < \Lambda\mathcal{M}^2 < 0,246019$, to istnieją wartości ładunku takie, że możliwa jest zarówno degeneracja horyzontów pierwszego jak i drugiego rodzaju,
3. gdy $\Lambda\mathcal{M}^2 > 0,246019$, to degeneracja nie jest możliwa.

Charakterystyczną wartością jest $\Lambda\mathcal{M}^2 = 0,246019$, kiedy to konfiguracja jest typu „ultracold", a wartości horyzontów i ładunku wynoszą $r_- = r_+ = r_c = 1,34657\mathcal{M}$ i $Q = 1,1082\mathcal{M}$. Przybliżona wartość fluktuacji kwadratowej $\left\langle\phi^2\right\rangle_2$ liczona na horyzoncie zdarzeń r_{cr} dla przypadku „cold" i po-

Metoda obliczeń T^{ab}	Języki		
	Form	Mathematica	Mieszane
z definicji		+	+
poprzez redukcję działania efektywnego	+		+

Rysunek 7: Metody i języki, którymi zostały wykonane obliczenia T^{ab}. Plus oznacza, że daną metodą, sposobem oraz językiem został wykonany projekt programistyczny.

dana w postaci szeregu Taylora względem Λ wynosi

$$\begin{aligned}\left\langle \phi^2 \right\rangle_2 &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{m^2\mathcal{M}^4}\left\{0,17-0,87\xi+0,69\xi^2+\left(-0,26+0,5\xi+1,65\xi^2\right)\Lambda\mathcal{M}^2\right.\\ &\left.+\left(-0,66+3,66\xi-0,86\xi^2\right)\Lambda^2\mathcal{M}^4+\left(-0,37+2,93\xi-5,66\xi^2\right)\Lambda^3\mathcal{M}^6+O\left(\Lambda^4\right)\right\}.\end{aligned} \tag{287}$$

Jest ona wartością dokładną, gdy $\Lambda = 0$ (dla czasoprzestrzeni typu ABGB). Konieczność obliczeń przybliżonych wynika z tego, że znane są jedynie przybliżone wartości horyzontu zdarzeń r_{cr} (286) oraz Q_{cr} (285) dla przypadku „cold".

Obliczenia ogólnej postaci tensora energii-pędu

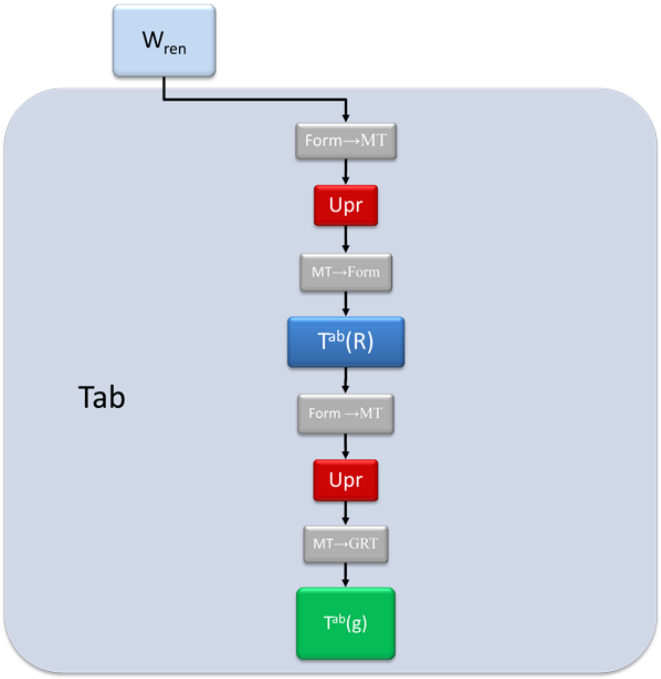
Obliczenia ogólnej postaci tensora energii-pędu[20] $\langle T_{ab}\rangle_{ren}$ przeprowadzone zostały dwiema metodami: z wykorzystaniem jego definicji oraz za pomocą metody redukcji działania efektywnego przy założeniu sferycznej symetrii czasoprzestrzeni. Obliczenia realizowano z wykorzystaniem projektu programistycznego reprezentowanego przez część „T^{ab}" przedstawioną na rysunku 2. Projekt ten ma kilka wersji w zależności od metody obliczeń i użytych języków programowania (rysunek 7).

Pierwsza z metod obliczeń tensora energii-pędu opiera się na definicji

$$\langle T_{ab}\rangle_{ren} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta W_{ren}}{\delta g^{ab}}. \tag{288}$$

Metoda ta przedstawiona zostanie na przykładzie projektu programistycznego relizującego te obliczenia z wykorzystaniem wielu języków programowania (rysunek 8). Projekt napisany w języku Mathematica i oparty na tej samej metodzie znajduje się w podrozdziale 6.3.

[20] Ogólna postać tensora energii-pędu oznacza, że jest on wyrażony poprzez tensory Riemanna, Ricciego, skalary krzywizny oraz ich pochodne kowariantne.



Rysunek 8: Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń tensora energii-pędu z definicji. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: szary - Perl, czerwony - Mathematica, zielony - Maple, niebieski - Form.

Zadaniem pierwszego z programów „Form→MT" jest dokonanie translacji działania efektywnego W_{ren} z języka Form do postaci zgodnej z pakietem MathTensor[21]. Na szczególną uwagę zasługują tutaj wyrażenia regularne będące integralną częścią języka Perl. To właśnie na nich oparta jest główna część programu.

Kolejny z programów - „Upr" ma za zadanie uproszczenie działania efektywnego przy wykorzystaniu własności tensora Riemanna. Do celów uproszczeń wykorzystywane były pakiety: MathTensor oraz pakiet Invar. Ponadto stosowane były wstępne uproszczenia bazujące na języku Form. Zasada upraszczania, na której opierają się pakiety polega na stworzeniu bazy składającej się z niezmienników krzywiznowych, a następnie wyrażenia dowolnego wielomianu składającego się ze skalarów w tej bazie [171, 172, 173, 174]. W praktyce pakiety najpierw grupują wszystkie jednomiany rzędu n (rząd oznacza liczbę tensorów Riemanna) w podzbiór $\mathcal{R}_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}}$, gdzie λ_i oznacza rząd pochodnej i-tego tensora Riemanna. Tensor jest sortowany według porządku $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$. Przykładem wyrażenia należącego do $\mathcal{R}_{\{0,1,5\}}$ jest jednomian

$$R^{abcd}R_{;acbgd}RR^{fg}{}_{;f}. \tag{289}$$

Grupa jednomianów $\mathcal{R}_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}}$ posiada $N = 4n + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ indeksów oraz jest rzędu $\Lambda = 2n + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$. Można zauważyć, że N i Λ jest zawsze liczbą parzystą ponieważ wyrażenie, które jest

[21] Pakiet MathTensor opracowany został przez Stevena M. Christensena.

upraszczane jest skalarem, a zatem liczba indeksów musi być parzysta. Każdy podzbiór $\mathcal{R}_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}}$ posiada indywidualną bazę jednomianów, której liczba jest tym mniejsza, im więcej tożsamości, które posiada tensor Riemanna zostanie uwzględnione w obliczeniach. Do uproszczeń może byc użytych pięć tożsamości:

1. Symetria i antysymetria tensora Riemanna

$$\begin{aligned} R_{cdab} &= R_{abcd} \\ R_{bacd} &= -R_{abcd}. \end{aligned} \tag{290}$$

   Zastosowanie tej tożsamości oraz doprowadzenie do postaci kanonicznej pozwala na zredukowanie bazy jednomianów klasy $\mathcal{R}_{\{0,1,5\}}$ z $1,1*10^{14}$ do 53160 elementów. Element bazy numerowany liczbą m i należący do klasy $\mathcal{R}_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}}$ oznacza się symbolem $I_{\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\},m}$.

2. Cykliczność tensora Riemanna

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0. \tag{291}$$

   Własność cykliczności redukuje liczbę elementów bazowych klasy $\mathcal{R}_{\{0,1,5\}}$ z 53160 elementów do 22330.

3. Tożsamość Bianchi

$$R_{abcd;e} + R_{abde;c} + R_{abec;d} = 0. \tag{292}$$

4. Symetrie pochodnych kowariantnych

$$\nabla_d\nabla_c T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} - \nabla_c\nabla_d T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} = \sum_{k=1}^{n} R_{cde}{}^{a_k} T^{a_1\ldots e\ldots a_n}{}_{b_1\ldots b_m} - \sum_{k=1}^{n} R_{cdb_k}{}^{e} T^{a_1\ldots a_n}{}_{b_1\ldots e\ldots b_m}. \tag{293}$$

5. Własności zależne od wymiaru (tzw. własności typu Lovelocka) opierające się na tym, że antysymetryzacja wszystkich indeksów tensora o liczbie indeksów d+1 w przestrzeni d-wymiarowej wynosi zero [175].

Zastosowanie wszystkich pięciu tożsamości do klasy $\mathcal{R}_{\{0,1,5\}}$ redukuje liczbę elementów bazowych do 44 (zakładając że czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa).

Przykładem uproszczeń jest zastosowanie wszystkich powyższych tożsamości do niezmiennika $R^{c}{}_{a}{}^{db}{}_{;d;c;b}{}^{;a}$ klasy $\mathcal{R}_{\{4\}}$, co powoduje jego transformację do postaci

$$R^{c}{}_{a}{}^{db}{}_{;d;c;b}{}^{;a} = -R^{bc}{}_{;a}R_{bc}{}^{;a} + R^{c}{}_{b;a}R_{c}{}^{a;b} - R^{abcd}R_{ac;b;d}. \tag{294}$$

Program „MT→Form” dokonuje translacji uproszczonego działania efektywnego ze składni pakietu MathTensor do składni języka Form.

Najważniejszym programem bloku „T^{ab}" jest program „$T^{ab}\left(R\right)$" wykonujący operację pochodnej funkcjonalnej $\frac{\delta W_{ren}}{\delta g_{ab}}$ występującej w definicji tensora energii-pędu (288). Ponieważ działanie efektywne składa się z sumy skalarów krzywizny takich jak m.in. $\sqrt{-g}$, R^2, $R_{ab;c}R^{ab;c}$, to fundamentalnym problemem jest znajomość pochodnej funkcjonalnej obiektów krzywiznowych. Aby ją otrzymać najważniejszym etapem pośrednim jest policzenie wariacji dowolnego obiektu $R_{abcd;e_1\ldots e_n}$. W tym celu skorzystano z następującej tożsamości

$$\begin{aligned}\delta\left(R_{abcd;e_1\ldots e_n}\right) &= \left(\delta R_{abcd,e_1\ldots e_{n-1}}\right)_{;e_n} - \delta\Gamma^s_{ae_n}R_{sbcd;e_1\ldots e_{n-1}} - \delta\Gamma^s_{be_n}R_{ascd;e_1\ldots e_{n-1}} - \ldots \\ &\quad -\delta\Gamma^s_{e_{n-1}e_n}R_{abcd;e_1\ldots e_{n-2}s}. \end{aligned} \tag{295}$$

Tożsamość ta pozwala znaleźć pochodną funkcjonalną $\delta R_{abcd,e_1\ldots e_n}$, jeśli znane są $\delta\Gamma^s_{ac}$ i $\delta\left(R_{abcd;e_1\ldots e_{n-1}}\right)$. Ma ona zatem charakter rekurencyjny w tym sensie, że znając pochodną funkcjonalną niższego rzędu $\delta\left(R_{abcd;e_1\ldots e_{n-1}}\right)$ można obliczyć pochodną funkcjonalną wyższego rzędu $\delta R_{abcd,e_1\ldots e_n}$. Tożsamość ta jest podstawą algorytmu zaimplementowanego w programie. Przykładem działania programu jest obliczenie pochodnej funkcjonalnej wyrażenia $\int d^4x\sqrt{-g}R_{ab;c}{}^{cba}$, którego wynikiem jest

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g_{xy}}\int d^4x\sqrt{-g}R_{ab;c}{}^{cba} &= -R_{ab}{}^{;xyba} + R_{ab}{}^{;yxab} - R_a{}^{x}{}_{;b}{}^{bya} + R_a{}^{x;y}{}_b{}^{ab} - R_a{}^{x;y}{}_b{}^{ba} + R_a{}^{y}{}_{;b}{}^{bxa} \\ -R_a{}^{y}{}_{;b}{}^{xab} + R_a{}^{y}{}_{;b}{}^{xba} - R^{xy}{}_{;ab}{}^{ab} + R^{xy}{}_{;ab}{}^{ba} - R_a{}^{x}{}_{;bc}\,R^{abcy} - 2\,R_a{}^{x}{}_b{}^{y}{}_{;cd}\,R^{acbd} + R_a{}^{x}{}_{;bc}\,R^{acby} \\ +2\,R_a{}^{x}{}_b{}^{y}{}_{;cd}\,R^{adbc} + R_{;ab}\,R^{axby} - R_{;ab}\,R^{aybx} + R_{ab}\,R_c{}^{a}{}_d{}^{y}\,R^{bdcx} - 2\,R_{ab}\,R_c{}^{a}{}_d{}^{x}\,R^{bdcy} \\ +2\,R_{abcd}\,R_e{}^{yac}\,R^{bedx} - 2\,R_{abcd}\,R_e{}^{xac}\,R^{bedy} - R_{ab}\,R_{cd}{}^{ay}\,R^{bxcd} + R_{ab}\,R_c{}^{a}\,R^{bxcy} \\ -4\,R_{abcd}\,R_e{}^{acy}\,R^{bxde} - \frac{1}{2}R_{ab}\,R_{cd}{}^{ax}\,R^{bycd} + 2\,R_{ab}\,R_c{}^{a}{}_d{}^{x}\,R^{bycd} + 2\,R_{abcd}\,R_e{}^{xac}\,R^{byde} \\ -R_{abcd}\,R_e{}^{yab}\,R^{cedx} + 2\,R_{abcd}\,R_e{}^{xab}\,R^{cedy} + 4\,R_{abcd}\,R_e{}^{acx}\,R^{byde}. \end{aligned} \tag{296}$$

Program „Form→MT" dokonuje translacji ze składni języka Form do składni pakietu MathTensor, natomiast „Upr" ponownie upraszcza, tym razem tensor energii-pędu. Następnie „MT→GRT" dokonuje translacji do składni pakietu GRTensor. Ostatni z programów $T^{ab}\left(g\right)$ umożliwia obliczenie tensora energii-pędu dla szczególnej postaci czasoprzestrzeni (np. Schwarzschilda).

Kolejną metodą, alternatywną do metody obliczania $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{ren}$ z definicji, jest metoda obliczania tensora energii-pędu opierająca się na wstępnej redukcji działania efektywnego W_{ren}. Warunkiem koniecznym do tego, aby można było stosować tę metodę jest wstępne założenie, że czasoprzestrzeń posiada pewną symetrię. Pierwszy wykorzystał tę metodę Hermann Weyl [52], który rozwiązał za jej pomocą próżniowe równania Einsteina otrzymując metrykę Schwarzschilda. Poszukując rozwiązania Schwarzschilda standardowo, najpierw dokonuje się wariacji działania Einsteina $\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\int d^4x\sqrt{-g}R$ ze względu na metrykę, co pozwala otrzymać próżniowe równania Einsteina. Następnie zakłada się rozwiązania o symetrii sferycznej i w takiej uproszczonej postaci poszukuje rozwiązań. Weyl postąpił niekonwencjonalnie ponieważ najpierw założył, że rozwiązanie ma symetrię sferyczną i nie zależy od

czasu. Wybrał też szczególne cechowanie (cechowanie Schwarzschilda) w postaci

$$ds^2 = -a\left(r\right)b\left(r\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{a\left(r\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{297}$$

a następnie uprościł za jego pomocą działanie Einsteina

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}R \rightarrow I_{red} = \int_0^\infty drr\left(a-1\right)\frac{d}{dr}b. \tag{298}$$

Końcowym etapem było otrzymanie dwóch równań Eulera-Lagarange'a dla dwóch zmiennych a i b, a następnie rozwiązanie ich, co doprowadziło do otrzymania metryki Schwarzschilda $a = 1 - c_1/r$, $b = c_2$. Mimo, że powyższa procedura jest niezgodna z konwencjonalną metodą rozwiązywania równań, pozwoliła ona otrzymać poprawny wynik. Należy zwrócić uwagę, że Weyl nie dowodził ani nawet pobieżnie nie uzasadniał motywów takiego sposobu rozwiązywania równań. Pełny matematyczny dowód przedstawiony został pół wieku później przez Palais'a [176] nie tylko w kontekście ogólnej teorii względności, ale i również pól dowolnych. Metoda zredukowanego działania była z powodzeniem stosowana w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi czwartego i szóstego rzędu dowolnego wymiaru do poszukiwania rozwiązań o wysokiej symetrii [177].

W obliczeniach tensora energii-pędu $\langle T_{\mu\nu}\rangle_{ren}$ za pomocą metody zredukowanego działania (analogicznie jak to zrobił Weyl) wstępnie założono postać metryki o symetrii sferycznej (5). Zredukowana postać działania efektywnego (257) ma wtedy postać

$$W_R^{reduced} = \frac{1}{32\pi^2 m^2}\int dr[a_3](f\left(r\right)h\left(r\right))^{1/2}r^2 + \frac{1}{32\pi^2 m^4}\int dr[a_4](f\left(r\right)h\left(r\right))^{1/2}r^2, \tag{299}$$

gdzie funkcje $f\left(r\right)$ i $h\left(r\right)$ wiążą się z metryką poprzez $f\left(r\right) = -e^{\psi(r)}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)$ oraz $h\left(r\right) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$. Symbolicznie powyższe działanie można zapisać w postaci

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \tag{300}$$

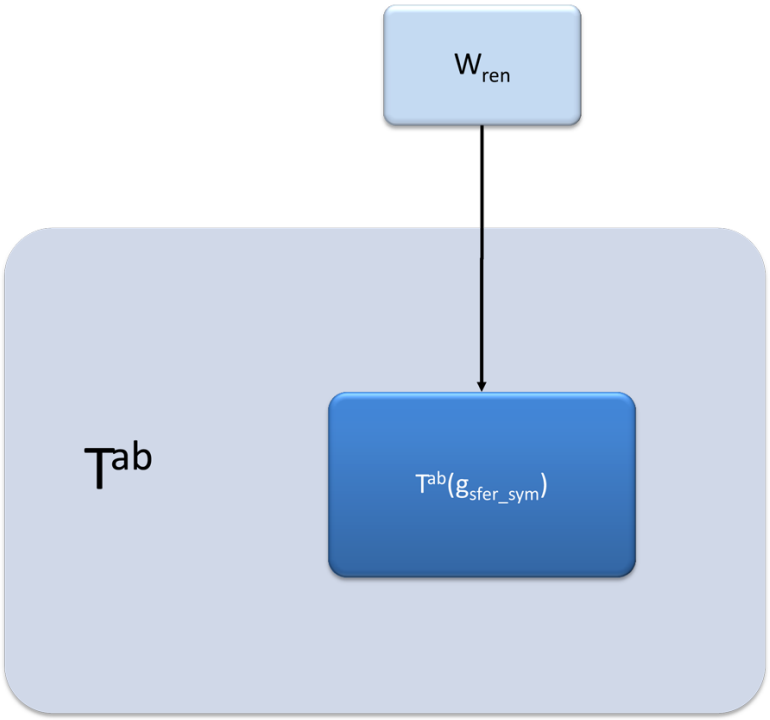
gdzie

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1\left(f^{(0)}(r), ..., f^{(6)}(r), h^{(0)}(r), ..., h^{(5)}(r), r\right), \tag{301}$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2\left(f^{(0)}(r), ..., f^{(8)}(r), h^{(0)}(r), ..., h^{(7)}(r), r\right), \tag{302}$$

a $f^{(k)} = \frac{df^k}{dr^k}$, $h^{(k)} = \frac{dh^k}{dr^k}$. Pełna postać członów $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ zawiera odpowiednio 531 oraz 2157 elementów. Aby otrzymać składowe T_t^t i T_r^r dla sferycznej symetrii należy skorzystać z dwóch równań Eulera-Lagrange'a

$$T_t^t = 2\left(\frac{f^{(0)}}{h^{(0)}}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial f^{(0)}}\mathcal{L} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dr^k}\left(\frac{\partial}{\partial f^{(k)}}\mathcal{L}\right)\right], \tag{303}$$



Rysunek 9: Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń metodą poprzez redukcję działania efektywnego. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

oraz

$$T_r^r = 2\left(\frac{h^{(0)}}{f^{(0)}}\right)^{1/2}\left[\frac{\partial}{\partial h^{(0)}}\mathcal{L} + \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dr^k}\left(\frac{\partial}{\partial h^{(k)}}\mathcal{L}\right)\right], \tag{304}$$

gdzie symbole n i s występujące w granicy sumowania oznaczają rząd maksymalnej pochodnej funkcji $f(r)$ i $h(r)$ występującej w $\mathcal{L}$. Metoda ta nie pozwala w sposób bezpośredni otrzymać składowych kątowych tensora energii-pędu, można je jednak otrzymać wykorzystując tożsamość $\nabla_a T^{ab} = 0$, która dla rozważanej metryki prowadzi do

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{r}{4f}\left(T_t^t - T_r^r\right)\frac{d}{dr}f + \frac{r}{2}\frac{d}{dr}T_r^r + T_r^r. \tag{305}$$

Obliczenia bloku „T^{ab}" oparte na metodzie poprzez redukcję działania wykonane zostały za pomocą programów napisanych w języku Form (rysunek 9). W skład bloku „T^{ab}" wchodzi program „$T^{ab}\left(g_{sfer_sym}\right)$", który oblicza zredukowane działanie efektywne oraz tensor energii-pędu wykorzystując równania Eulera-Lagrange'a.

Obliczenia tensora energii-pędu oparte na metodzie poprzez redukcję działania wykonywane zostały również poprzez inny projekt oparty na wielu językach programowania. Szczegółowe informacje na temat tego projektu znajdują się w podrozdziale 6.3.

Własności tensora energii-pędu w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma

Tensor energii-pędu, otrzymany z działania efektywnego W_{ren} (257), może być zapisany w postaci sumy

$$\left\langle T_a^b \right\rangle_{ren} = T_a^{(1)b} + T_a^{(2)b}, \tag{306}$$

gdzie $T_a^{(1)b}$ to wkład do tensora energii-pędu pochodzący od współczynnika $[a_3]$, z kolei $T_a^{(2)b}$ pochodzi od $[a_4]$. Dla przypadku czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej statycznej każda ze składowych tensora $T_a^{(2)b}$ posiada około 3000 członów. Jeśli rozpatrzeć szczególną postać tej czasoprzestrzeni opisanej metryką

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \tag{307}$$

w której zawiera się wiele interesujących z punktu widzenia fizyki przypadków, to liczba członów tensora energii-pędu $T_a^{(2)b}$ ulega redukcji do kilkudziesięciu (Dodatek: „Składowa $T_a^{(2)b}$"). W wyniku obliczeń można zauważyć, że elementy składowe $T_a^{(1)b}$ i $T_a^{(2)b}$ tensora energii-pędu w czasoprzestrzeni Reisnera-Nörsdstroma zależą w sposób liniowy od parametru ξ i mogą być zapisane w postaci

$$T_a^{(i)b} = \frac{1}{\pi^2 m^{2i} r^{2(3+i)}}\left(C_a^{(i)b} + \eta D_a^{(i)b}\right), \tag{308}$$

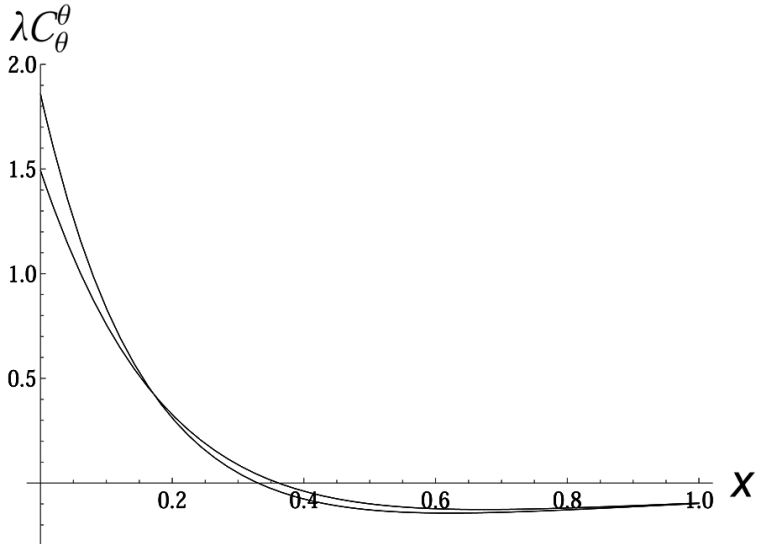
gdzie $\eta = \xi - 1/6$. Pełna postać funkcji $C_a^{(i)b}$ oraz $D_a^{(i)b}$ dla rozważanej czasoprzestrzeni przedstawiona jest w dodatku Funkcje $C_a^{(i)b}$ oraz $D_a^{(i)b}$. Należy zwrócić uwagę, że $T_a^{(1)b}$ był już wczesniej policzony [95, 64]. W pracy Andersona, Hiscocka i Samuela [64] policzono zrenormalizowany tensor energii-pędu metodami numerycznymi z dokładnością do kwadratu odwrotności masy pola. Przedstawiono w niej również wykresy konforemnej C_θ^θ i pozakonforemnej D_θ^θ części tensora energii-pędu

$$\left\langle T_\theta^\theta \right\rangle_{ren} = C_\theta^\theta + \eta D_\theta^\theta \tag{309}$$

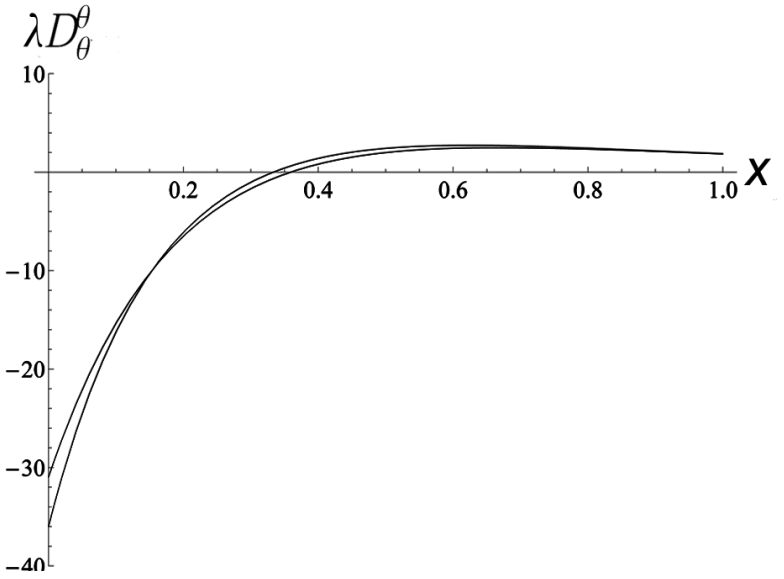
w czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Ponieważ znana jest wyższa dokładność obliczeń uwzględniająca w działaniu efektywnym człon pochodzący od $[a_4]$ [178] można dokonać porównania z wynikami Andersona, Hiscocka i Samuela.

Na rysunku 10 przedstawiono przeskalowane liczbą $\lambda = 90\pi^2(8M)^4$ dwie funkcję C_θ^θ w czasoprzestrzeni Schwarzschilda: obliczoną przez Andersona, Hiscocka i Samuela (wykres górny patrząc na punkt $x = 0$) oraz obliczoną z wyższą dokładnością (wykres dolny). Rysunek 11 przedstawia analogiczne porównanie, tym razem dla funkcji D_θ^θ. Funkcje te zależą od parametru $x = \frac{r-r_+}{M}$, a początek układu współrzędnych pokazuje ich zachowanie na horyzoncie zdarzeń. Oba wykresy pokrywają się, gdy $r \to \infty$, jednak w miarę jak r maleje coraz bardziej się różnią. Różnice te są znaczące na horyzoncie, co powoduje, że wkład poprawki wyższego rzędu może prowadzić do istotnej zmiany wyniku.

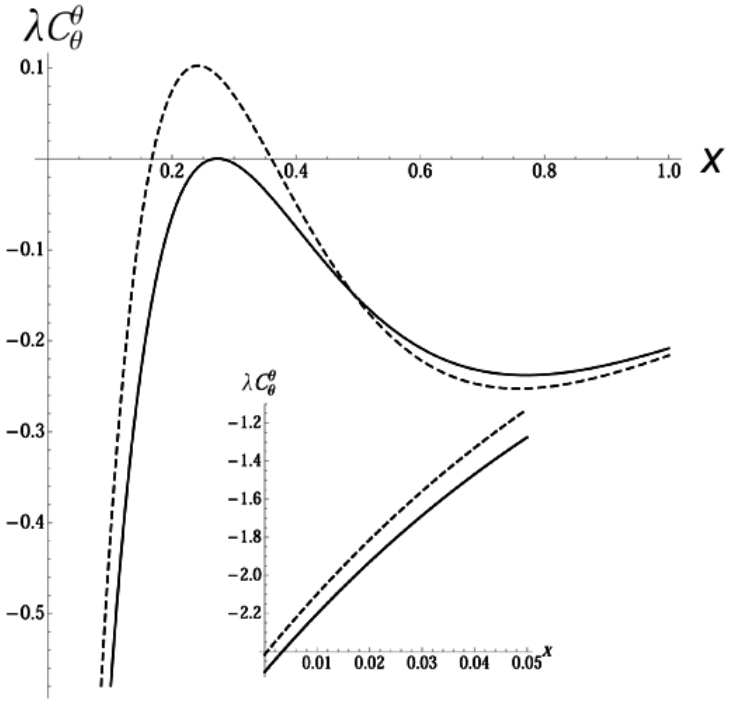
Analogiczne wykresy można narysować dla czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (rysunek 12 i 13) wybierając wartość ładunku różną od zera e=0,95M. Obserwacja obu funkcji C_θ^θ i D_θ^θ, również jak w przypadku czasoprzestrzeni Schwarzschilda, ujawnia różnice spowodowane obliczeniem ich z



Rysunek 10: Dwie przeskalowane funkcje ${C_\theta}^\theta$ ($\lambda = 90\pi^2 (8M)^4$) zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Schwarzschilda dla $mM = 2$: górna (patrząc na punkt $x = 0$) obliczona przez Andersona, Hiscocka i Samuela, dolna obliczona z wyższą dokładnością.



Rysunek 11: Dwie przeskalowane funkcje ${D_\theta}^\theta$ ($\lambda = 90\pi^2 (8M)^4$) zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Schwarzschilda dla $mM = 2$: dolna (patrząc na punkt $x = 0$) obliczona przez Andersona, Hiscocka i Samuela, górna obliczona z wyższą dokładnością.



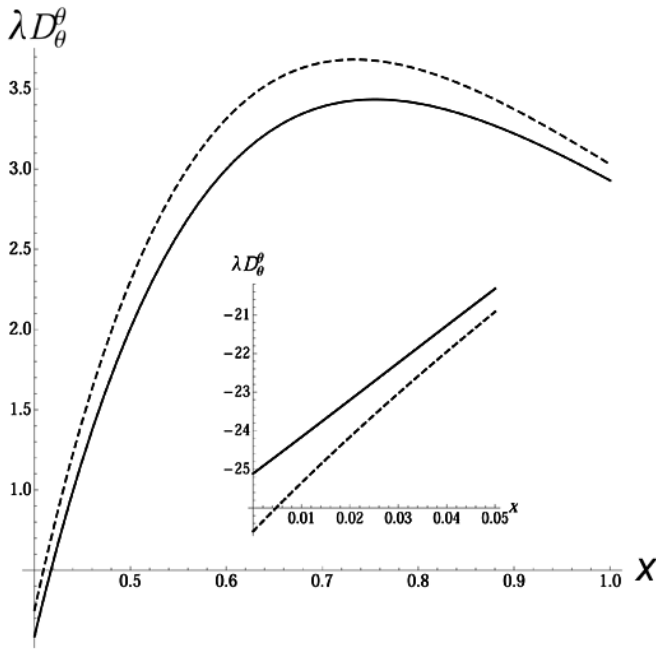
Rysunek 12: Dwie przeskalowane funkcje $C_{\theta}{}^{\theta}$ ($\lambda = 90\pi^2 (8M)^4$) zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (e=0,95M) dla $mM = 2$: linia przerywana odpowiada przybliżeniu pierwszego rzędu, linia ciągłą odpowiada wyższej dokładności obliczeń.

różną dokładnością. Różnice te są istotne i mogą być pominięte tylko po wnikliwej analizie.

Zrenormalizowany tensor energii-pędu jest regularny, jeśli można pokazać, że w nieosobliwym układzie współrzędnych ma skończoną wartość. Ponieważ metryka Reissnera-Nordströma jest osobliwa, gdy $r \to r_+$ nie można sprawdzić w tym punkcie regularności. Należy zatem przejść do nowego układu współrzędnych, w którym metryka na horyzoncie zdarzeń jest nieosobliwa. Takim układem współrzędnych jest układ związany ze swobodnie spadającą cząstką. Dokonując obliczeń tensora energii-pędu na horyzoncie zdarzeń w nowych współrzędnych można wykazać:

$$T_{(0)(0)}(r_+) = \frac{\langle T_r^r \rangle_{ren}(r_+) - \langle T_t^t \rangle_{ren}(r_+)}{f(r_+)} - \langle T_r^r \rangle_{ren}(r_+), \tag{310}$$

$$T_{(1)(1)}(r_+) = \frac{\langle T_r^r \rangle_{ren}(r_+) - \langle T_t^t \rangle_{ren}(r_+)}{f(r_+)} + \langle T_r^r \rangle_{ren}(r_+), \tag{311}$$



Rysunek 13: Dwie przeskalowane funkcje ${D_\theta}^\theta$ ($\lambda = 90\pi^2 (8M)^4$) zależne od parametru $x = (r - r_+)/M$ obliczone w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (e=0,95M) dla $mM = 2$: linia przerywana odpowiada przybliżeniu pierwszego rzędu, linia ciągłą odpowiada wyższej dokładności obliczeń.

$$T_{(0)(1)}(r_+) = -\frac{\sqrt{1-f}\left\{\langle T_r^r\rangle_{ren}(r_+) - \langle T_t^t\rangle_{ren}(r_+)\right\}}{f(r_+)}, \tag{312}$$

$$T_{(2)(2)}(r_+) = \left\langle T_\theta^\theta \right\rangle_{ren}, \tag{313}$$

$$T_{(3)(3)}(r_+) = \left\langle T_\phi^\phi \right\rangle_{ren}, \tag{314}$$

Można przypuszczać iż pierwsze trzy składowe są osobliwe ponieważ $\frac{1}{f(r_+)} \to \infty$. Przypuszczenie to nie potwierdza się jednak gdyż można pokazać, że $\langle T_t^t\rangle_{ren} - \langle T_r^r\rangle_{ren} = f(r)P(r)$, gdzie funkcja $P(r)$ jest regularna na horyzoncie zdarzeń.

5.1.3 Zwrotne działanie pola na metrykę Schwarzschilda

Zwrotne działanie pola na metrykę Schwarzschilda to inaczej wpływ polaryzacji próżni na tę geometrię. Obliczone działanie efektywne (257) pozwala rozpatrywać to zagadnienie jako poszukiwanie rozwiązania równań pola wynikających z działania

$$S = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{g}\left(R + \alpha R^2 + \beta R_{ab}R^{ab} + \Lambda + W_{ren}\right). \tag{315}$$

Rozważając przypadek uproszczony, w którym zarówno człony kwadratowe, jak i stała kosmologiczna są pominięte ($\alpha = \beta = \Lambda = 0$), wykorzystano do obliczeń metodę perturbacyjna (193), w której

człony wyższego rzędu reprezentowane są przez W_{ren} (257). Otrzymanym rozwiązaniem zerowego rzędu $g^{(0)}_{ab}$ jest metryka Schwarzschilda. Odwrotność rozwiązania pierwszego rzędu $g^{(1)}_{rr}(r)$ ma postać

$$\frac{1}{g^{(1)}_{rr}(r)} = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r} + \frac{\mathcal{M}^2}{5\pi m^2 r^6}\,\mathcal{P}^{(1)}_r(r) + \frac{\mathcal{M}^2}{\pi m^4 r^8}\,\mathcal{P}^{(2)}_r(r), \tag{316}$$

gdzie funkcje $\mathcal{P}^{(1)}_r(r)$ i $\mathcal{P}^{(2)}_r(r)$ to

$$\mathcal{P}^{(1)}_r(r) = \left(\frac{22\mathcal{M}}{3r} - 4\right)\eta - \frac{313\mathcal{M}}{756r} + \frac{19}{84}, \tag{317}$$

$$\mathcal{P}^{(2)}_r(r) = -\frac{2833\mathcal{M}}{2100r} + \frac{11}{35} + \frac{13583\mathcal{M}^2}{9450r^2} - \left(\frac{36}{7} + \frac{1649\mathcal{M}^2}{63r^2} - \frac{47\mathcal{M}}{2r}\right)\eta. \tag{318}$$

Wynik obliczeń $g^{(1)}_{tt}$ to

$$g^{(1)}_{tt}(r) = -\frac{1}{g_{rr}(r)}\exp\left(2\psi(r)\right), \tag{319}$$

gdzie

$$\psi(r) = \frac{\mathcal{M}^2}{\pi m^2 r^6}\left(\frac{7}{15}\eta - \frac{13}{504}\right) + \frac{\mathcal{M}^2}{\pi m^4 r^8}\left[\frac{2042\mathcal{M}}{4725r} - \frac{7}{40} - \left(\frac{485\mathcal{M}}{63r} - \frac{81}{28}\right)\eta\right] + C_2. \tag{320}$$

Stałą C_2 należy ustali tak, aby metryka pokrywała się z czasoprzestrzenią Minkowskiego, gdy $r \to \infty$.

W celu policzenia horyzontu zdarzeń należy rozwiązać równanie $g_{tt}(r_+) = 0$. Po rozwiązaniu równania z wykorzystaniem metody CLA uzyskano

$$r^{(1)}_+ = 2\mathcal{M} + \frac{1}{480\pi\mathcal{M}^3 m^2}\left(\eta - \frac{29}{504}\right) + \frac{1}{2016\pi\mathcal{M}^5 m^4}\left(\frac{17}{1200} - \eta\right). \tag{321}$$

Analogicznie obliczenia temperatury Hawkinga T_H prowadzą do

$$T_H = \frac{1}{4\pi}\left(-g_{tt}g_{rr}\right)^{-1/2}\left|\frac{dg_{tt}}{dr}\right|_{|r=r_+} = \frac{1}{8\pi\mathcal{M}} + \frac{1}{\pi^2 m^2 (4\mathcal{M})^5}\left(\frac{1}{1980} + \frac{11}{9450\mathcal{M}^2 m^2}\right). \tag{322}$$

Można zaobserwować, że temperatura Hawkinga nie zależy od stałej $\eta = \xi - 1/6$ mimo, że równania pola zależą od tej stałej oraz, że bez względu na wybór parametrów m i $\mathcal{M}$, człon pochodzący od pola skalarnego zawsze podwyższa wartość temperatury Hawkinga. O ile w przypadku dużej masy $\mathcal{M}$ modyfikację wynikająca z włączenia pola skalarnego można zaniedbać, to dla małej masy $\mathcal{M}$ jej wpływ jest już istotny.

5.1.4 Ekstremalna kwantowo zmodyfikowana czarna dziura Reissnera-Nordströma

Geometria w otoczeniu horyzontu zdarzeń kwantowo zmodyfikowanej ekstremalnej czarnej dziury Reissnera-Nordströma

Ekstremalne czarne dziury mają szczególną geometrię w bliskim otoczeniu horyzontu zdarzeń. Geome-

tria ta jest iloczynem prostym dwóch dwuwymiarowych przestrzeni, z których każda ma stałą krzywiznę. Dla ekstremalnej czarnej dziury Reissnera-Nordströma [155] bliskie otoczenie horyzontu zdarzeń jest geometrią Bertottiego-Robinsona [102, 103], z kolei dla ekstremalnej czarnej dziury Schwarzschilda-de Sittera bliskie otoczenie horyzontu zdarzeń jest geometrią Nariai [179, 180, 181].

Czasoprzestrzenie będące iloczynem prostym dwóch przestrzeni o stałej krzywiźnie mogą być sklasyfikowane na podstawie typu podprzestrzeni składających się na całą czasoprzestrzeń. Pierwszym i najprostszym typem jest geometria Minkowskiego $M_2 \times E^2$ będąca iloczynem dwuwymiarowej przestrzeni Minkowskiego i dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Kolejny typ to neutralna geometria Nariai

$$ds^2 = \Lambda^{-1}\left(-\sin^2\chi\, d\tau^2 + d\chi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{323}$$

będąca rozwiązaniem próżniowego równania Einsteina z dodatnią stałą kosmologiczną Λ. W powyższym równaniu zakres składowych χ i θ zmienia się od 0 do π, natomiast ϕ ma okres 2π. Jeśli do działania Einsteina wprowadzone zostanie dodatkowo pole elektromagnetyczne, powyższe rozwiązanie można rozszerzyć do

$$ds^2 = \frac{\mathcal{R}_0^2}{\mathcal{K}_0}\left(-\sin^2\chi\, d\tau^2 + d\chi^2\right) + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{324}$$

gdzie $\mathcal{R}_0$ jest stałą dodatnią a $\mathcal{K}_0$ jest stałą należącą do zakresu $0 < \mathcal{K}_0 \leq 1$ [182, 183, 184]. To uogólnione rozwiązanie Nariai można przedstawić w bardziej dogodnej reprezentacji poprzez zmianę współrzędnych $\sin^2\chi = 1 - \left(\mathcal{K}_0/\mathcal{R}_0^2\right)R^2$, $\tau = \sqrt{\mathcal{K}_0/\mathcal{R}_0^2}T$ otrzymując w wyniku metrykę

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{R}_0^2}R^2\right)dT^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{R}_0^2}R^2\right)}dR^2 + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{325}$$

Powyższa postać ujawnia, że przestrzeń jest typu $dS_2 \times S^2$, a zatem jest iloczynem (1+1)-wymiarowej przestrzeni de Sittera i dwuwymiarowej sfery o stałym promieniu $\mathcal{R}_0$. Geometria Bertottiego-Robinsona jest rozwiązaniem równań Einsteina-Maxwella dla $\Lambda = 0$ i wyrazić ją można poprzez

$$ds^2 = \mathcal{R}_0^2\left(-\sinh^2\chi\, d\tau^2 + d\chi^2\right) + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{326}$$

gdzie współrzędna χ jest nieograniczona, θ zmienia się od 0 do π, natomiast ϕ ma okres 2π. Zmiana współrzędnych $\sinh^2\chi = R^2/\mathcal{R}_0^2 - 1$, $\tau = T/\mathcal{R}_0$, prowadzi do

$$ds^2 = -\left(R^2/\mathcal{R}_0^2 - 1\right)dT^2 + \frac{1}{\left(R^2/\mathcal{R}_0^2 - 1\right)}dR^2 + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{327}$$

a zatem geometria ta jest typu $AdS_2 \times S^2$, czyli jest iloczynem dwuwymiarowej przestrzeni anty-de Sittera i dwuwymiarowej sfery o stałym promieniu $\mathcal{R}_0$. Przestrzeń anty-Nariai opisana jest przez

$$ds^2 = \frac{\mathcal{R}_0^2}{\mathcal{K}_0}\left(-\sinh^2\chi\, d\tau^2 + d\chi^2\right) + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sinh^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{328}$$

gdzie współrzędne χ i θ są nieograniczone a ϕ ma okres 2π [185, 186]. Przestrzeń ta jest rozwiązaniem

równania Einsteina-Maxwella z ujemną stałą kosmologiczną $\Lambda < 0$. Po zmianie współrzędnych $\sinh^2\chi = 1 - \left(\mathcal{K}_0/\mathcal{R}_0^2\right) R^2$, $\tau = \sqrt{\mathcal{K}_0/\mathcal{R}_0^2}T$ czasoprzestrzeń anty-Nariai ma postać

$$ds^2 = -\left(-1 + \frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{R}_0^2}R^2\right) dT^2 + \frac{1}{\left(-1 + \frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{R}_0^2}R^2\right)} dR^2 + \mathcal{R}_0^2\left(d\theta^2 + \sinh^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{329}$$

a zatem ma strukturę $AdS_2 \times H^2$ czyli iloczynu przestrzeni anty-de Sittera i hiperboloidy o promieniu $\mathcal{R}_0$. Ostatnim typem czasoprzestrzeni jest geometria Plebańskiego-Hacyana [187] będąca iloczynem przestrzeni $AdS_2 \times E^2$ lub $M_2 \times S^2$.

Można rozważyć czarną dziurę Reissnera-Nordströma, na której geometrię wpłynęło pole skalarne. Gdy działanie efektywne jest obliczone w najniższym rzędzie dokładności[22], to geometria otoczenia horyzontu ekstremalnego jest typu Bertottiego-Robinsona [102, 103, 188]. Policzenie działania efektywnego z wyższą dokładnością umożliwia zbadanie geometrii otoczenia horyzontu ekstremalnego również z wyższą dokładnością. W tym celu należy rozwiązać problem zwrotnego działania pola na geometrię Reissnera-Nordströma, a następnie zbadać, kiedy temperatura Hawkinga czarnej dziury się zeruje. Do znalezienia metryki wykorzystana została metoda perturbacyjna analogicznie, jak w przypadku czasoprzestrzeni Schwarzschilda. Rozwiązanie sparametryzowane zostało za pomocą ładunku e oraz dokładnego położenia horyzontu zdarzeń r_+, zamiast masy i ładunku czarnej dziury. Warunek na ekstremalność w przypadku rozwiązań opisanych metryką statyczną sferycznie symetryczną (5) to $\frac{df(r)}{dr}\Big|_{r\to r_+} = 0$, gdzie $f(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)$, lub równoważnie $r_- = r_+$ (horyzont wewnętrzny i horyzont zdarzeń łączą się). Aby go spełnić, należy wybrać szczególną wartość ładunku e [189]

$$e^2 = r_+^2 + \frac{4 - 21\eta}{1890\pi m^2 r_+^2} - \frac{11}{18900\pi m^4 r_+^4}. \tag{330}$$

W otoczeniu horyzontu ekstremalnego można dokonać przybliżenia funkcji $f(r)$ wyrażeniem $f(r) \simeq \alpha(r - r_+)(r - r_-)$, gdzie α jest stałą. Czarna dziura bliska konfiguracji ekstremalnej posiada ładunek

$$e^2 = r_+^2 + \frac{4 - 21\eta}{1890\pi m^2 r_+^2} - \frac{11}{18900\pi m^4 r_+^4} - \Delta, \tag{331}$$

gdzie parametr Δ określa odchylenie od ekstremalności. Położenie horyzontu wewnętrznego r_- wyraża się wtedy za pomocą dwóch parametrów r_+ i Δ poprzez wyrażenie

$$r_- = r_+ - \Delta\left[\frac{1}{r_+} + \left(\frac{2}{945\pi m^2 r_+^5} - \frac{\eta}{90\pi m^2 r_+^5} - \frac{11}{9450\pi m^4 r_+^7}\right)\right]. \tag{332}$$

Przybliżoną wartość parametru α funkcji $f(r) \simeq \alpha(r - r_+)(r - r_-)$ można obliczyć z równania

[22] Z najniższym rzędem dokładności działania efektywnego mamy do czynienia wtedy, gdy obliczone jest ono z dokładnością uwzględniającą tylko współczynnik $[a_3]$, a z wyższym gdy, $[a_3]$ i $[a_4]$.

$f(r_d) = -\alpha(r_+ - r_d)(r_d - r_-)$, gdzie $r_d = (r_+ + r_-)/2$. Obliczenia pokazują, że

$$\alpha = \frac{1}{r_+} - \frac{11}{9450\pi m^4 r_+^8} + \Delta\left(\frac{8}{945\pi m^2 r_+^8} - \frac{2}{45\pi m^2 r_+^8}\eta - \frac{22}{4725\pi m^4 r_+^{10}}\right). \tag{333}$$

Dokonując transformacji metryki poprzez zmianę współrzędnych

$$\begin{aligned} r &= r_d + \gamma\cosh\chi, \\ t &= \frac{\tau}{\Delta}e^{-\psi(r_+)}\left[2r_+^3 + \left(\frac{22}{4725\pi m^4 r_+^3} - \frac{4}{945\pi m^2 r_+^8} + \frac{1}{45\pi m^2 r_+^8}\eta\right)\right], \end{aligned} \tag{334}$$

gdzie $\gamma = r_+ - r_d$ i przechodząc z parametrem Δ do zera można otrzymać następującą postać metryki

$$ds^2 = \rho^2\left(-\sinh^2\chi\, d\tau^2 + d\chi^2\right) + r_+^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right), \tag{335}$$

gdzie

$$\rho^2 = r_+^2 + \frac{11}{9450\pi m^4 r_+^4}. \tag{336}$$

Metryka (335) odzwierciedla strukturę czasoprzestrzeni w pobliżu horyzontu ekstremalnego i jest ona typu $AdS^2 \times S^2$, ale nie Bertottiego-Robinsona, co miałoby miejsce, gdyby $\rho^2 = r_+^2$. Przyczyną zmiany jest dodatkowy człon w równaniu (336) wynoszący $11/9450\pi m^4 r_+^4$, który zmienia czasoprzestrzeń Bertottiego-Robinsona na $AdS^2 \times S^2$ i pochodzi od współczynnika $[a_4]$. Zwiększenie dokładności obliczeń działania efektywnego poprzez włączenie współczynnika $[a_4]$ zmieniło zatem geometrię otoczenia horyzontu zdarzeń.

Geometria Bertottiego-Robinsona jako rozwiązanie dokładne półklasycznego równania Einsteina

Czasoprzestrzeń Bertottiego-Robinsona jest dokładnym rozwiązaniem półklasycznych równań pola [95, 190, 191]

$$R_i^j - \frac{1}{2}R\delta_i^j = 8\pi T_i^{(1)j}. \tag{337}$$

Znajomość współczynnika $[a_4]$ pozwala zadać pytanie czy czasoprzestrzeń Bertottiego-Robinsona jest również rozwiązaniem półklasycznego równania Einsteina z tensorem energii-pędu

$$\left\langle T_a^b \right\rangle_{ren} = T_a^{(1)b} + T_a^{(2)b}. \tag{338}$$

Czasoprzestrzeń $AdS^2 \times S^2$ jest opisana metryką

$$ds^2 = \frac{1}{h}\left(-\sinh^2\chi dt^2 + d\chi^2\right) + r_0^2 d\Omega^2 \tag{339}$$

i jeśli parametr h wynosi $h = 1/r_0^2$, to przechodzi ona w czasoprzestrzeń Bertottiego-Robinsona. Charakterystyczną cechą tej czasoprzestrzeni jest jej jednorodność $R_{abcd;d} = 0$, zerowy tensor krzy-

wizny $R = 0$, zerowy tensor Weyla $C_{abcd} = 0$ oraz spełnianie tożsamości Rainicha

$$R_i^a R_a^j = \frac{1}{4} R_{ab} R^{ab} \delta_i^j. \tag{340}$$

Wspomniane cechy czasoprzestrzeni pozwalają przedstawić składowe tensora energii-pędu $T_a^{(1)b}$ i $T_a^{(2)b}$ w prostej postaci [189]

$$\begin{aligned} 32\pi^2 m^2 T^{(1)ij} &= -\frac{5-14\xi}{1260} R_{ab} R^{ab} R^{ij}, \\ 32\pi^2 m^4 T^{(2)ij} &= -\frac{11}{75600} R_{ab} R^{ab} R_{cd} R^{cd} g^{ij}. \end{aligned} \tag{341}$$

Tensory te dla metryki Bertottiego-Robinsona transformują się do

$$\begin{aligned} 8\pi T_i^{(1)j} &= -\frac{5-14\xi}{1260\pi m^2 r_0^6} \mathrm{diag}[-1,-1,1,1], \\ 8\pi T_i^{(2)j} &= -\frac{11}{18900\pi m^4 r_0^8} \mathrm{diag}[1,1,1,1]. \end{aligned} \tag{342}$$

Mimo, że nie są znane wszystkie współczynniki HaMiDeW, można przewidzieć ogólną strukturę matematyczną każdej poprawki $T_i^{(n)j}$na podstawie własności czasoprzestrzeni Bertottiego-Robinsona oraz analizy wymiarowej obiektów $T_i^{(n)j}$. Z analizy tej wynika, że poprawki podzielić można na dwie grupy: o indeksie nieparzystym

$$T_i^{(2n-1)j} = \frac{A^{(2n-1)}}{\pi^2 \left(m^2\right)^{2n-1} r_0^{4n+2}} \mathrm{diag}[-1,-1,1,1] \tag{343}$$

oraz o indeksie parzystym

$$T_i^{(2n)j} = \frac{A^{(2n)}}{\pi^2 \left(m^2\right)^{2n} r_0^{4n+2}} \mathrm{diag}[1,1,1,1], \tag{344}$$

gdzie $A^{(n)}$ jest współczynnikiem stałym, a tensor n-tego rzędu $T_i^{(n)j}$ skonstruowany jest ze współczynnika $[a_{n+2}]$.

Znajomość (342) pozwala sprawdzić czy rozwiązanie równań Einsteina dla takiej dokładności tensora energii-pędu istnieje. Aby rozszerzyć zakres rozważań, włączona zostanie stała kosmologiczna Λ, a także odziaływanie elektromagnetyczne reprezentowane przez tensor $T_b^{(em)a} = \frac{e}{r_0^4} diag\left[-1,-1,1,1\right]$. Półklasyczne równania Einsteina to

$$R_i^j - \frac{1}{2} R \delta_i^j + \Lambda \delta_i^j = 8\pi \left(T_i^{(em)j} + T_i^{(1)j} + T_i^{(2)j} \right), \tag{345}$$

które prowadzą do

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{r_0^4}+\frac{5-14\xi}{1260\pi m^2 r_0^6}-\frac{11}{18900\pi m^4 r_0^8}+\frac{1}{r_0^2}-\Lambda &= 0 \\ \frac{e^2}{r_0^4}-\frac{5-14\xi}{1260\pi m^2 r_0^6}-\frac{11}{18900\pi m^4 r_0^8}-\frac{1}{r_0^2}-\Lambda &= 0. \end{aligned} \tag{346}$$

Sumując oba równania i zakładając że stała kosmologiczna Λ się zeruje, można pokazać, że nie sposób znaleźć takiej wartości r_0, dla której równanie to jest spełnione, co dowodzi, że czasoprzestrzeń Bertottiego-Robinsona nigdy nie może być rozwiązaniem. Przyczyną jest włączenie do rozważań współczynnika $[a_4]$ (człon proporcjonalny do $\frac{1}{m^4}$ w równaniach (346)). Aby rozwiązanie istniało, należy przywrócić niezerową stałą kosmologiczną. Po rozwiązaniu równań (346) ze względu na r_0 i Λ, można otrzymać wynik

$$r_0=\sqrt{\frac{e^2-\sqrt{e^4-4\beta}}{2}}, \qquad \Lambda=\frac{-16\gamma}{\left(e^2-\sqrt{e^4-4\beta}\right)^4} \tag{347}$$

oraz

$$r_0=\sqrt{\frac{e^2+\sqrt{e^4-4\beta}}{2}}, \qquad \Lambda=\frac{-16\gamma}{\left(e^2+\sqrt{e^4-4\beta}\right)^4}, \tag{348}$$

gdzie

$$\beta=\frac{5-14\xi}{1260\pi m^2}, \qquad \gamma=\frac{11}{18900\pi m^4}. \tag{349}$$

Przypadek szczególny rozwiązań, gdy pole elektromagnetyczne znika ($e=0$) to

$$r_0=\left(\frac{14\xi-5}{1260\pi m^2}\right)^{1/4}, \qquad \Lambda=-\frac{11}{18900\pi m^4 r_0^8}=-\frac{924\pi}{(5-14\xi)^2}. \tag{350}$$

Można również zauważyć, że powyższe rozwiązanie jest możliwe tylko wtedy, gdy $\xi>5/14$. Wartość tego parametru nie zawiera ani minimalnego $\xi=0$, ani konforemnego $\xi=1/6$ przypadku pola.

Poszukiwanie rozwiązania równań pola dla zerowej stałej kosmologicznej $\Lambda=0$ jest możliwe dla ogólniejszej klasy czasoprzestrzeni $AdS^2\times S^2$ opisanej metryką (339). Można rozważyć przybliżenie, opierające się na założeniu, że czasoprzestrzeń ta jest małą deformacją czasoprzestrzeni Bertottiego-Robinsona. Parametr $\frac{1}{h}=\rho^2$ występujący w (339) można zapisać jako $\rho^2=r_0^2+\kappa$, gdzie κ określa wspomnianą deformację. Półklasyczne równania Einsteina prowadzą do dwóch równań. Jedno z nich jest identyczne z pierwszym z równań (346), drugie natomiast ma postać

$$\frac{\kappa}{r_0^4}+\frac{e^2}{r_0^4}-\frac{5-14\xi}{1260\pi m^2 r_0^6}-\frac{11}{18900\pi m^4 r_0^8}-\frac{1}{r_0^2}=0. \tag{351}$$

Rozwiązując ten układ równań można obliczyć, że

$$\kappa = \frac{11}{9450\pi m^4 r_0^4}. \tag{352}$$

Równanie wiążące e i r_0 ma wtedy postać

$$r_0^2 = e^2 - \frac{4-21\eta}{1890\pi m^2 e^2} + \frac{11}{18900\pi m^4 e^4}. \tag{353}$$

Można zauważyć identyczność $\rho^2 = r_0^2 + \kappa = r_0^2 + \frac{11}{9450\pi m^4 r_0^4}$ oraz (353) z wynikami (336) i (330) z poprzedniego rozdziału. Powyższe obliczenia można potraktować jako alternatywną drogę do otrzymania horyzontu zdarzeń dla przypadku ekstremalnej czarnej dziury.

5.2 Tensor energii-pędu w czasoprzestrzeni ABGB-(AdS)dS w przypadku pól o ogólnym spinie

Rozważania dotyczące czarnych dziur ABGB można rozszerzyć na przypadek kwantowo zmodyfikowawych czarnych dziur ABGB z niezerową stałą kosmologiczną. Najważniejszym krokiem jest analiza tensora energii-pędu pola w tego typu czasoprzestrzeniach pod kątem jego zachowania w otoczeniu centrum czarnej dziury (regularność), zachowanie w otoczeniu horyzontu ektremalnego.

Pole skalarne $\phi^{(0)}$, spinorowe $\phi^{(1/2)}$ oraz wektorowe $\phi^{(1)}$ spełniają odpowiednio równania

$$\left(-\Box + \xi R + m^2\right)\phi^{(0)} = 0 \tag{354}$$

$$\left(-\gamma^\mu \nabla_\mu + m^2\right)\phi^{(1/2)} = 0 \tag{355}$$

$$\left(\delta^\mu_\nu \Box - \nabla_\nu \nabla^\mu - R^\mu_\nu + \delta^\mu_\nu m^2\right)\phi^{(1)} = 0, \tag{356}$$

gdzie γ^μ oznacza macierze Diraca. Analogicznie tak jak w przypadku pola skalarnego z polem spinorowym i wektorowym związane jest zrenormalizowane działanie efektywne W_{ren}, które w swoim najniższym przybliżeniu $W^{(1)}_{ren}$ można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} W^{(1)}_{ren} &= \frac{1}{192\pi m^2}\sum_{i=1}^{10}\alpha_i^{(s)} W_i \\ &= \frac{1}{192\pi m^2}\int d^4x g^{1/2}\Big(\alpha_1^{(s)} R\Box R + \alpha_2^{(s)} R_{\mu\nu}\Box R^{\mu\nu} + \alpha_3^{(s)} R^3 + \alpha_4^{(s)} R R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \\ &\quad + \alpha_5^{(s)} R R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + \alpha_6^{(s)} R^\mu_\nu R^\nu_\rho R^\rho_\mu + \alpha_7^{(s)} R^{\mu\nu} R_{\rho\sigma} R^\rho{}_\mu{}^\sigma{}_\nu \\ &\quad + \alpha_8^{(s)} R_{\mu\nu} R^\mu{}_{\lambda\rho\sigma} R^{\nu\lambda\rho\sigma} + \alpha_9^{(s)} R_{\rho\sigma}{}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\lambda\gamma} R_{\lambda\gamma}{}^{\rho\sigma} + \alpha_{10}^{(s)} R^\rho{}_\mu{}^\sigma{}_\nu R^\mu{}_\lambda{}^\nu{}_\gamma R^\lambda{}_\rho{}^\gamma{}_\sigma, \end{aligned} \tag{357}$$

gdzie $\alpha_i^{(s)}$ zależą od spinu i przedstawione są w tabeli (14).

W otoczeniu zdegenerowanego horyzontu zdarzeń r_d ($r_+ = r_-$) metrykę (5) przedstawioną w postaci

$$ds^2 = -e^{2\psi(r)} f(r)\, dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2 \tag{358}$$

	$s=0$	$s=1/2$	$s=1$
$\alpha_1^{(s)}$	$\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{5}\xi+\frac{1}{56}$	$-\frac{3}{280}$	$-\frac{27}{280}$
$\alpha_2^{(s)}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{9}{28}$
$\alpha_3^{(s)}$	$\left(\frac{1}{6}-\xi\right)^3$	$\frac{1}{864}$	$-\frac{5}{72}$
$\alpha_4^{(s)}$	$-\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)$	$-\frac{1}{180}$	$\frac{31}{60}$
$\alpha_5^{(s)}$	$\frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}-\xi\right)$	$-\frac{7}{1440}$	$-\frac{1}{10}$
$\alpha_6^{(s)}$	$-\frac{8}{945}$	$-\frac{25}{756}$	$-\frac{52}{63}$
$\alpha_7^{(s)}$	$\frac{2}{315}$	$\frac{47}{1260}$	$-\frac{19}{105}$
$\alpha_8^{(s)}$	$\frac{1}{1260}$	$\frac{19}{1260}$	$\frac{61}{140}$
$\alpha_9^{(s)}$	$\frac{17}{7560}$	$\frac{29}{7560}$	$-\frac{67}{2520}$
$\alpha_{10}^{(s)}$	$-\frac{1}{270}$	$-\frac{1}{108}$	$\frac{1}{18}$

Rysunek 14: Współczynniki $\alpha_i^{(s)}$ dla skalarnych, spinorowych i wektorowych pól masywnych.

dla przypadku $\psi(r)=0$ można przybliżyć poprzez wybór funkcji $f(r)$ w postaci $f(r)=\frac{1}{2}f''(r_d)(r-r_-)(r-r_+)$. Natomiast tensor energii pędu redukuje się do postaci

$$\overline{T}_t^{(q)t}=\overline{T}_r^{(q)r}=s_1^{(i)}\frac{\left(f''(r_d)\right)^2}{2r_+^2}+s_2^{(i)}\left(f''(r_d)\right)^3+4s_2^{(i)}\frac{1}{r_+^6} \tag{359}$$

$$\overline{T}_\theta^{(q)\theta}=\overline{T}_\phi^{(q)\phi}=-s_1^{(i)}\frac{f''(r_d)}{r_+^4}-\frac{1}{2}s_2^{(i)}\left(f''(r_d)\right)^3-8s_2^{(i)}\frac{1}{r_+^6} \tag{360}$$

gdzie $\overline{T}_a^{(q)b}=96\pi^2m^2\ T_a^{(q)b}$ a współczynniki $s_i^{(j)}$ dla pola skalarnego, spinorowego i wektorowego przedstawiono w tabeli

$s_i^{(j)}$	$j=0$	$j=\frac{1}{2}$	$j=1$
$j=1$	$-\frac{1}{30}+\frac{8}{15}\xi-3\xi^2+6\xi^3$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{10}$
$j=2$	$\frac{1}{105}-\frac{1}{10}\xi+\frac{1}{2}\xi^2-\xi^3$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{35}$

Otoczenie czasoprzestrzeni bliskie ekstremelanemu ma geometrię mogącą być opisaną elementem liniowym

$$ds^2=-\frac{2dudv}{\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon_1uva^{-2}\right)^2}+\frac{2d\zeta d\bar{\zeta}}{\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_2\zeta\bar{\zeta}b^{-2}\right)^2}, \tag{361}$$

gdzie a i b są związane z krzywizną Gausa podprzestrzeni poprzez $K_1=\varepsilon_1a^{-2}$, $K_2=\varepsilon_2b^{-2}$, a ε_1 i ε_2 mogą przyjmować wartości -1, 0, 1. Sześć fizycznych geometrii opisanych tą metryką przedstawione

są w tabeli

rozmaitość	topologia	ε_1	ε_2
Minkowski	$M_2 \times E^2$	0	0
Plebański-Hacyan	$M_2 \times S^2$	0	1
Plebański-Hacyan	$AdS_2 \times E^2$	-1	0
Nariai	$dS_2 \times S^2$	1	1
Bertotti-Robinson	$AdS_2 \times S^2$	-1	1
anty-Nariai	$AdS_2 \times H^2$	-1	-1

Niezerowe elementy tensora energii-pędu dla tych sześciu geometrii można napisać w zwartej postaci

$$\overline{T}^u_u = \overline{T}^v_v = -8\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{b^2a^4} - 2\frac{\left(2\varepsilon_1 b^6 + \varepsilon_1^2 b^4 \varepsilon_2 a^2 - \varepsilon_2 a^6\right)(2c_3 + c_4 + 2c_5)}{b^6a^6} - \frac{\left(2\varepsilon_1 b^6 - \varepsilon_2 a^6\right)(c_6 + c_7 + 2c_8 + 4c_9)}{b^6a^6} \tag{362}$$

$$\overline{T}^\theta_\theta = \overline{T}^\phi_\phi = -8\frac{\varepsilon_2^2\varepsilon_1 c_3}{a^2b^4} + 2\frac{\left(\varepsilon_1 b^6 - \varepsilon_2^2 \varepsilon_1 b^2 a^4 - \varepsilon_2 a^6\right)(2c_3 + c_4 + 2c_5)}{b^6a^6} + \frac{\left(\varepsilon_1 b^6 - 2\varepsilon_2 a^6\right)(c_6 + c_7 + 2c_8 + 4c_9)}{b^6a^6} \tag{363}$$

gdzie $c_i = \alpha_i^{(s)}$. Można pokazać, że tensor (359) i (360) obliczony dla geometrii Bertottiego-Robinsona, Nariai oraz Plebański-Hacyana ($M_2 \times S^2$) redukuje się do (362) i (363) poprzez związek

$$a^2 = \frac{2\varepsilon_3}{|f''(r_+)|} \text{ oraz } b = r_+, \tag{364}$$

gdzie $\varepsilon_3 = -1$ dla geometrii Nariai oraz $\varepsilon_3 = 1$ dla geometrii Bertottiego-Robinsona.

Dalsze rozważania wymagają konkretnej specyfikacji metryki. Metryka czasoprzestrzeni ABGB-(AdS)ds ma postać

$$ds^2 = -\left\{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1 - \tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right) - \frac{\varepsilon l^2 r^2}{3}\right\}dt^2 + dr^2 / \left\{1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}\left(1 - \tanh\frac{Q^2}{2\mathcal{M}r}\right) - \frac{\varepsilon l^2 r^2}{3}\right\} + r^2 d\Omega^2, \tag{365}$$

gdzie stała kosmologiczna Λ jest wyrażona poprzez $\Lambda = \varepsilon l^2$ a ε przyjmuje odpowiednio -1 i 1 dla dodatniej lub ujemnej stałej kosmologicznej. W otoczeniu centrum czarnej dziury tensor energii-pędu dąży do skończonej i opisanej prostą formułą wartości

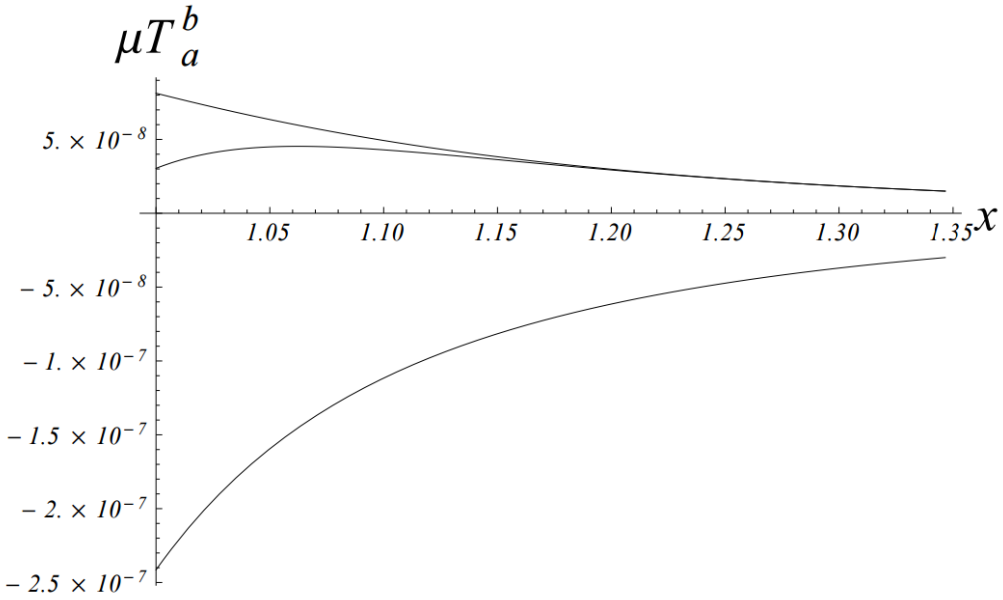
$$\check{T}^{(i)b}_a = -\frac{1}{9}\varepsilon l^6 \left(144c_3 + 36c_4 + 24c_5 + 9c_6 + 9c_7 + 6c_8 + 4c_9 + 2c_{10}\right) diag[1,1,1,1]^b_a, \tag{366}$$

gdzie wyrażenie w nawiasach redukuje się do

$$\frac{1}{315}\left(185 - 3654\xi + 22680\xi^2 - 45360\xi^3\right) \tag{367}$$

dla pola skalarnego

$$\frac{-31}{1260} \tag{368}$$



Rysunek 15: Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego pola skalarnego w pobliżu horyzontu ultraextremalnego regularnej czarnej dziury. Krzywe od góry do dołu reprezentują odpowiednio radialną, czasową i kontową składową. $[\mu = M^6 m^2/10^2]$

dla spinorowego oraz

$$-\frac{5}{21} \tag{369}$$

dla wektorowego.

Aby przeanalizowac tensor energii-pędu wewnątrz czarnej dziury wprowadzmy dwie funkcje $\beta(r) = 1 - \tanh\left(Q^2/2\mathcal{M}r\right)$, $\omega(r) = 1 + \tanh\left(Q^2/2\mathcal{M}r\right)$ oraz dwa parametry $q = |Q|/\mathcal{M}$, $= l\mathcal{M}$. Wtedy tensor energii-pędu można wyrazić w postaci

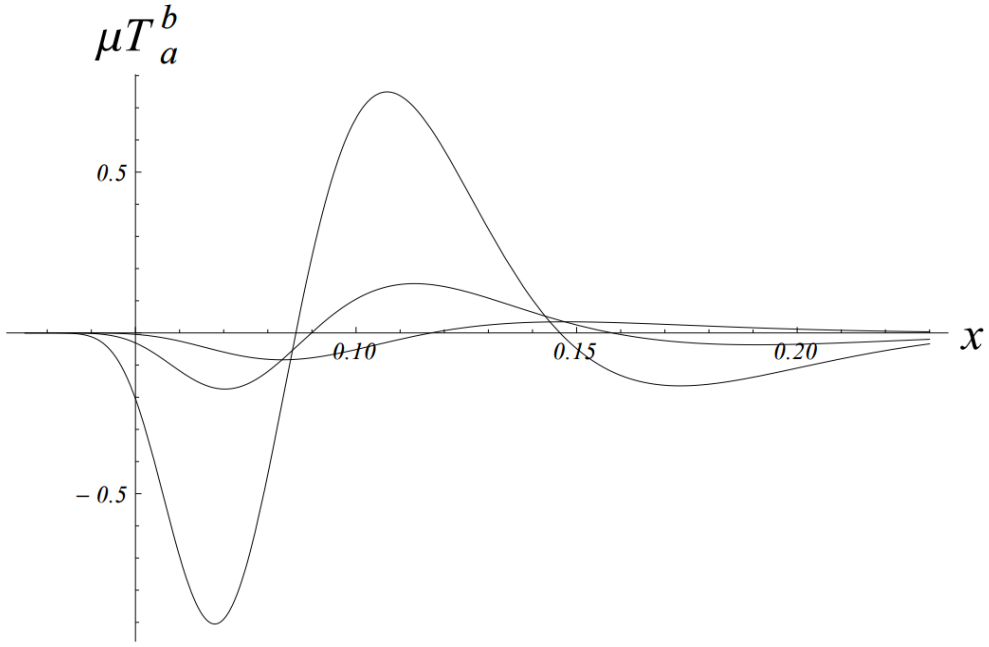
$$\overline{T}^{(i)b}_{a} = \frac{1}{\mathcal{M}^6}\sum_{n=1}^{15}\sum_{p=1}^{6}\sum_{s=1}^{6}\sum_{t=0}^{2}\sum_{u=1}^{8}[\alpha^{(i)}_{npstu}]^{b}_{a}\frac{q^{2s}l^{2t}}{x^n}\omega^p(x)\beta^u(x) + \check{T}^{(i)b}_{a}, \tag{370}$$

gdzie pierwszy człon znika gdy $r \to 0$. Różnica pomiędzy radialną i czasowną składową tensora energii pędu wynosi

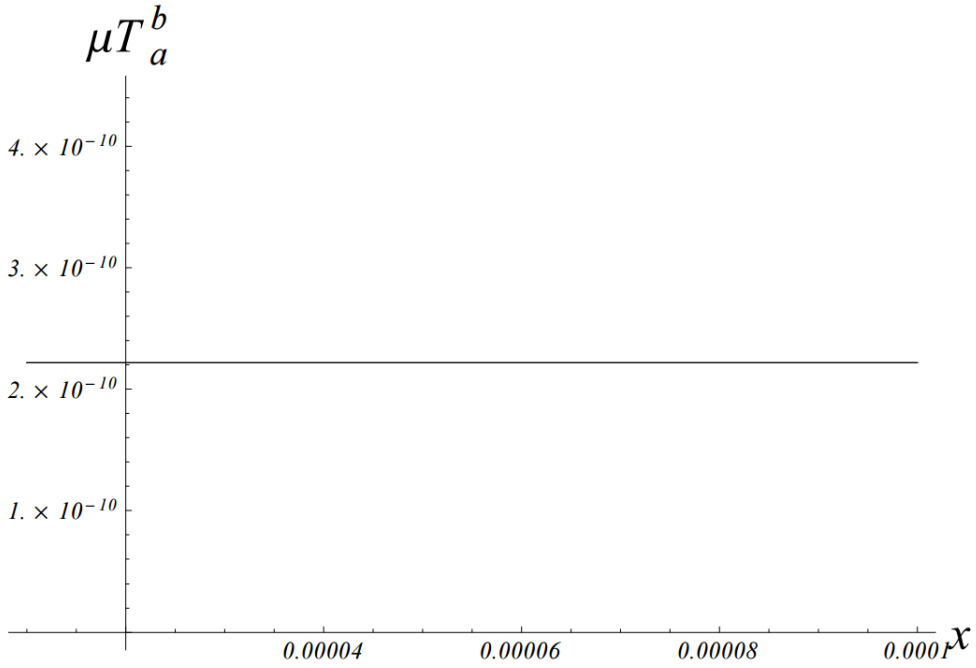
$$\overline{T}^{r}_{r} - \overline{T}^{t}_{t} = g_{tt}F(r) \tag{371}$$

gdzie funkcja $F(r)$ jest regularna z wartością $F(0) = 0$ zatem tensor energii-pędu jest regularny w sensie fizycznym. Tensor (370) ma bardzo skomplikowaną postać dlatego wygodniej jest przedstawić jego analizę numeryczną.

Skupmy się na przypadku ultraextremalnym i regularnym dla pola skalarnego (dla pól spinorowego i wektorowego zachowanie tensora energii-pędu jest podobne). Analiza zachowania tensora energii-pędu pokazuje (rysunek 15 - 17), że chociaż w okolicy centrum symetrii oraz zdegenerowanego horyzontu tensor energii-pędu jest mały to jest całkiem duży w rejonie $0.003 < x < 0.25$. Stosunek



Rysunek 16: Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego pola skalarnego w pobliżu horyzontu ultraextremalnego regularnej czarnej dziury. Krzywe od góry do dołu w punkcie x= 0.1 reprezentują odpowiednio radialną, czasową i kontową składową. [$\mu = M^6 m^2/10^2$]



Rysunek 17: Przeskalowane składowe tensora energii-pędu konforemnie sprzężonego masywnego skalarnego pola kwantowego w otoczeniu centrum czarnej dziury. Tensor w centrum jest identyczny z odpowiednikiem dla geometrii de Sittera. [$\mu = M^6 m^2/10^2$]

maksymalnej wartości tensora do jego wartości w otoczeniu horyzontu ekstremalnego (x_{crit}) i centrum symetrii $x = 0$ wynosi $\left|T_a^b\right|_{\max} / \left|T_a^b\right|_{x_{crit}} \sim 10^7$ i $\left|T_a^b\right|_{\max} / \left|T_a^b\right|_{x=0} \sim 10^9$. Rysunek 16 ujawnia, że znajduje się obszar w którym tensor energii-pędu jest ujemny. Zachowanie tensora stwarza dwa pytania. Pierwsze to pytanie czy półklasyczne przybliżenie jest dozwolone w tym obszarze. Odpowiedź brzmi tak bo długość Comptona związana z polem jest znacznie mniejsza od charakterystycznej krzywizny geometrii. Drugie pytanie dotyczy asymptotycznych szeregów i pytania czy kolejne poprawki do działania efektywnego mają bardzo niewielki wkład w stosunku do pierwszego przybliżenia ($W_{ren}^{(2)}/W_{ren}^{(1)} < 1$). Obliczenia wykonane przy pomocy algebry symbolicznej mówią, że tak ale wymagane jest określenie dla danej masy czarnej dziury minimalnej dozwolonej masy pola.

Tensor energii-pędu można porównać do przypadku czarnej dziury Reissnera-Nordströma-de Sittera. Konfiguracja ultraextremalna scharakteryzowana jest poprzez dobór parametrów rozwiązania

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3} r_+, \quad e^2 = \frac{1}{2} r_+^2, \quad l^2 = \frac{1}{2} r_+^{-2}, \tag{372}$$

dla elementu liniowego (358) z $\psi(r) = 0$ oraz

$$f(r) = -\frac{r^2}{6 r_+^2} \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^3 \left(1 + \frac{3 r_+}{r}\right). \tag{373}$$

Tensor energii-pędu ma dla tego przypadku postać

$$\overline{T}_a^{(i)b} = \sum_{n=4}^{12} [\beta_n^{(i)}]_a^b \frac{r_+^{n-6}}{r^n} + \check{T}_a^{(i)b}, \tag{374}$$

gdzie $\left[\beta_5^i\right]_a^b = 0$, oraz β zależą od spinu pola oraz ξ. Tensor $\check{T}_a^{(i)b}$ ma postać (366) z wartością l (372).

5.3 Wielowymiarowa sferycznie symetryczna czarna dziura w teoriach wysokiego rzędu

Analogonem rozwiązania Schwarzschilda dla przestrzeni D-wymiarowej jest rozwiązanie Tangherliniego [192, 193]. Rozszerzenie klasycznej teorii do teorii z wyższymi członami krzywiznowymi może zmodyfikować rozwiązanie Tangherliniego. W dalszej części pracy rozpatrywana będzie teoria zawierająca człony krzywiznowe drugiego, czwartego i szóstego rzędu bez pól materii z pominięciem stałej kosmologicznej. Teoria taka jest reprezentowana przez działanie

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \tag{375}$$

będące sumą wyrazów

$$I_1 = a \int d^D x (-g)^{1/2} R, \tag{376}$$

$$I_2 = \int d^D x (-g)^{1/2} \left(b_1 R^2 + b_2 R_{ab} R^{ab} + b_3 R_{abcd} R^{abcd} \right), \tag{377}$$

$$I_3 = \int d^D x (-g)^{1/2} \Big(c_1 R^3 + c_2 R R^b_a R^a_b + c_3 R R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ab} + c_4 R^b_a R^d_c R_{bd}{}^{ac} + c_5 R^b_a R^c_b R^a_c$$
$$+ c_6 R^b_a R_{bc}{}^{de} R_{de}{}^{ac} + c_7 R_{ab}{}^{cd} R_{cd}{}^{ef} R_{ef}{}^{ab} + c_8 R_{ce}{}^{ab} R_{af}{}^{cd} R_{bd}{}^{ef} \Big), \tag{378}$$

gdzie $a = (16\pi G_D)^{-1}$. Geometrię takiej czasoprzestrzeni można znaleźć rozwiązując równania pola $\frac{1}{(-g)^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} I = 0$, lub równania skonstruowane przy użyciu metody zredukowanego działania [177, 194, 195]. Stosowanie metody zredukowanego działania jest zasadne, ponieważ rozważany będzie przypadek czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej. Element liniowy statyczny i sferycznie symetryczny dla $D = d+2$ wymiarowej czasoprzestrzeni ma postać $ds^2 = -f^2(r)dt^2 + h^{-2}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2}$, gdzie $d\Omega^2_{D-2}$ oznacza element liniowy $D-2$ wymiarowej sfery jednostkowej. Podstawowym składnikiem działania I jest tensor Riemanna, którego postać dla rozważanej metryki wynosi

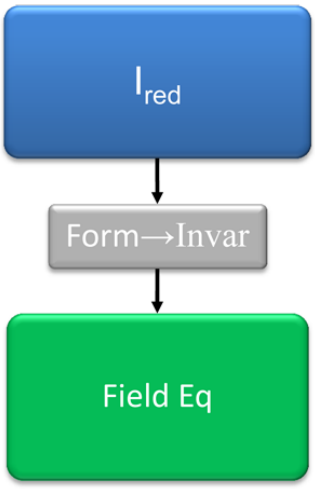
$$R_{ij}{}^{km} = r^{-2}(1-h^2)\left(\delta^k_i \delta^m_j - \delta^m_i \delta^k_j \right), \quad R_{ir}{}^{jr} = -r^{-1} h h' \delta^j_i, \tag{379}$$

$$R_{tr}{}^{tr} = -f^{-1} h (f'h)', \quad R_{ti}{}^{tj} = -r^{-1} f^{-1} h^2 f' \delta^j_i, \tag{380}$$

gdzie prim oznacza pochodną po r. Po wstawieniu powyższych tensorów do działania I i wyliczeniu pochodnej funkcjonalnej ze względu na funkcje f i h otrzymuje się układ równań pola.

Na potrzeby tej pracy równania pola obliczone zostały przy pomocy grupy programów przedstawionych na rysunku 18. Pierwszy z programów „I_{red}" (język Form) oblicza jawną postać działania zredukowanego dla przypadku sferycznej symetrii. W obliczeniach wykorzystywane są tożsamości (379-380). Drugi program „Form→Maple" (język Perl) dokonuje translacji zredukowanego działania ze składni języka Form do składni języka Maple. Ostatni z programów „Field Eq" generuje dwa równania pola wykonując pochodną funkcjonalną po funkcjach f i h. Układ tych równań można uprościć po podstawieniu $f^2(r) = e^{2\psi(r)} \left(1 - \frac{2m(r)}{r^{d-1}} \right)$, $h^2(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r^{d-1}}$. Pozostaje on jednak nadal zbyt skomplikowany, aby otrzymać dokładne rozwiązanie. Należy zatem poszukać rozwiązania przybliżonego przy wykorzystaniu metody perturbacyjnej. Aby użyć metody perturbacyjnej należy założyć, że człony wyższego rzędu mają nieporównywalnie mniejszy wkład niż człony niższych rzędów. Pociąga to za sobą założenia, że współczynniki b_i i c_k spełniają warunki $|b_i|/a << 1$ i $|c_k/b_i| << 1$ dla $i = 1, .., 3$ i $k = 1, ..., 8$. Rozwiązanie można przedstawić przy pomocy funkcji $m^{(n)}(r)$ i $\psi^{(n)}(r)$, gdzie n oznacza rząd perturbacji. Równania pola zerowego rzędu dla $m^{(0)}(r)$ i $\psi^{(0)}(r)$ dają klasyczne rozwiązania Tangherliniego [192]

$$m^{(0)}(r) = M_0(r) = C, \tag{381}$$
$$\psi^{(0)}(r) = \psi_0(r) = B,$$



Rysunek 18: Realizacja programistyczna obliczeń równań pola przy wykorzystaniu metody działania zredukowanego. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: niebieski - Form, szary - Perl, zielony - Maple.

jeśli zastosowane zostaną naturalne warunki asymptotycznej płaskości $\psi^{(0)}(\infty) = 0$. Rozwiązanie Tangherliniego jest D-wymiarowym uogólnieniem rozwiązania Schwarzschilda i jest ono opisane metryką

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2C}{r^{D-3}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2C}{r^{D-3}}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2}. \tag{382}$$

W czterech wymiarach rozwiązanie to jest też rozwiązaniem równań w przybliżeniu słabego pola, gdzie $-g_{tt} = g_{rr}^{-1} = 1 + 2\phi$ a $\phi = \mathcal{M}/r$, a więc $C = \mathcal{M}$. Analogicznie, rozszerzając rozważania do teorii D-wymiarowej, można znaleźć relację pomiędzy stałą C, a masą czarnej dziury $\mathcal{M}$, która wynosi [196, 197, 198, 199]

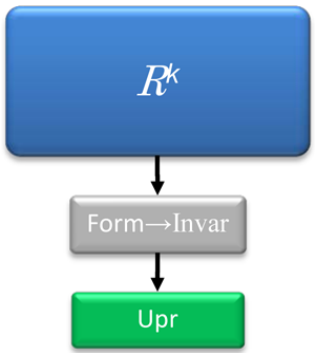
$$C = \frac{8\pi G_D}{d\omega_d}\mathcal{M}, \tag{383}$$

gdzie parametr ω_d to powierzchnia sfery jednostkowej wynosząca

$$\omega_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma\left((d+1)/2\right)}. \tag{384}$$

Funkcje $\Delta m^{(n)} = m^{(n)} - m^{(n-1)}$ i $\Delta\psi^{(n)} = \psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}$ oznaczają poprawki do rozwiązania rzędu $(n-1)$. Pierwsze z nich wynoszą

$$\begin{aligned} \Delta m^{(1)} &= -\frac{2C^2 b_3}{a\, r^{d+1}}(d-2)(d-1), \\ \Delta\psi^{(1)} &= 0. \end{aligned} \tag{385}$$



Rysunek 19: Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: niebieski - Form, szary - Perl, zielony - Maple.

Drugi rząd obliczeń daje bardziej skomplikowany wynik [200] w postaci

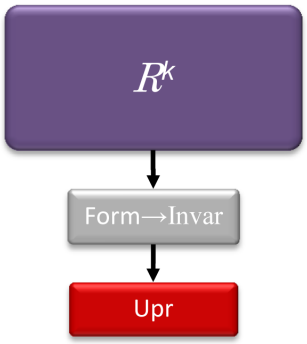
$$\begin{aligned}\Delta m^{(2)} = \frac{C^3(d-1)}{a r^{2+2d}} \Big[& 4c_3 d(5+8d+3d^2) - 2c_6(3-5d^2-2d^3) - 2c_7(10+16d-21d^2-7d^3) \\ & + \frac{1}{2}c_8(2+25d-24d^2-7d^3) - \frac{8b_1b_3}{a}(d-2)(d+1)(3d+5) - \frac{8b_3^2}{a}(d-2)(4d^2+19d+9) \\ & - \frac{16b_2b_3}{a}(d-2)(d+1)(d+2)\Big] - \frac{C^2(d^2-1)\,(d+1)}{a\,r^{d+3}}\,[8c_3 d - c_6(2-3d) + 12c_7(d-1) \\ & - 3c_8(d-1) - \frac{16b_1b_3}{a}(d-2) - \frac{12b_2b_3}{a}(d-2) - \frac{32b_3^2}{a}(d-2)], \end{aligned} \tag{386}$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi^{(2)} = -\frac{C^2(d^2-1)}{a\,r^{2d+2}} \Big[& 4c_3 d(3+2d) - 2c_6(1-2d-d^2) - 6c_7(2-2d-d^2) + \frac{3}{2}c_8(2-3d-d^2) \\ & - \frac{8b_1b_3}{a}(d-2)(2d+3) - \frac{8b_2b_3}{a}(d-2)(d+2) - \frac{8b_3^2}{a}(d-2)(2d+5)]. \end{aligned} \tag{387}$$

Powyższe rozwiązanie jest uogólnieniem rozwiązań już istniejących. Otrzymana metryka dla $D = 4$ redukuje się do wyników pracy Lu i Wise'a [84]. Jeśli natomiast w równaniu (378) jedynie stała c_7 (spośród c_i) jest niezerowa to odtworzony zostanie wynik pracy Dobado i Lopeza [94]. Metrykę można zdegenerować do przypadku grawitacji Lovelocka wybierając szczególne wartości parametrów a, b_i, c_k. Aby odnaleźć wartości tych parametrów, należy obliczyć jawną postać lagranżjanu Lövelocka, co prowadzi do konieczności obliczeń obiektów $\mathcal{R}^k$. Obliczenia te realizowane są przez trzy programy przedstawione na rysunku 19. Pierwszy z programów o nazwie „$\mathcal{R}^k$" oparty jest na języku Form i oblicza obiekty $\mathcal{R}^k$ korzystając z definicji (21). Drugi z programów - „Form → Invar" oparty na języku Perl dokonuje translacji wygenerowanego wyniku do składni odpowiedniej dla pakietu Invar. Trzeci z programów - „Upr" dokonuje uproszczeń $\mathcal{R}^k$ przy pomocy pakietu Invar (język Maple).

Obliczenia $\mathcal{R}^k$ wykonuje również program oparty na języku programowania Mathematica (rysunek 20).

Rysunek 20: Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.



Rysunek 21: Realizacja programistyczna obliczeń jawnej postaci obiektów $\mathcal{R}^k$. Obliczenia oparte na pakiecie GiNaC. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: fioletowy - pakiet GiNaC, szary - Perl, czerwony - Mathematica.

Kolejny sposób obliczania „$\mathcal{R}^k$" oparty jest na pakiecie GiNaC (kolor fioletowy bloków), który rozszerza funkcjonalność języka C++ (rysunek 21).

Wygenerowane przez programy obiekty $\mathcal{R}^1$, $\mathcal{R}^2$, i $\mathcal{R}^3$ to

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^1 &= R, \\
\mathcal{R}^2 &= -4R_{ab}R^{ab} + R^2 + R_{abcd}R^{abcd}, \\
\mathcal{R}^3 &= 16R_a{}^cR^{ab}R_{bc} - 12R_{ab}R^{ab}R + R^3 + 24R^{ab}R^{cd}\ R_{acbd} + 3RR_{abcd}R^{abcd} - 24R^{ab}R_a{}^{cde}R_{bcde} \\
&\quad -8\ R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}R_{bfde} + 2R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cdef}.
\end{aligned} \tag{388}$$

Na podstawie powyższych wyników można wywnioskować, że $a = \alpha_1$, $b_i = \alpha_2\tilde{b}_i$ i $c_i = \alpha_3\tilde{c}_i$, gdzie $\tilde{b}_1 = \tilde{b}_3 = -\tilde{b}_2/4 = 1$, $\tilde{c}_1 = 1$, $\tilde{c}_2 = -12$, $\tilde{c}_3 = 3$, $\tilde{c}_4 = 24$, $\tilde{c}_5 = 16$, $\tilde{c}_6 = -24$, $\tilde{c}_7 = 2$, $\tilde{c}_8 = -8$. Po uproszczeniu i wyrażeniu C przez masę $\mathcal{M}$ można otrzymać wyrażenie $f^2(r) = h^2(r)$, gdzie

$$\begin{aligned}
h^2(r) = 1 - \frac{16\pi\mathcal{M}}{d\,\omega_d r^{d-1}} + 4096\frac{\pi^3\mathcal{M}^2}{d^2\omega_d^2 r^{2d}}\alpha_2\left[1 - 512\frac{\pi^2\mathcal{M}}{d\omega_d r^{d+1}}(d-2)(d-1)\right](d-2)(d-1) \\
+ \alpha_3 65536\frac{\pi^4\mathcal{M}^3}{d^3\,\omega_d^3 r^{3d+1}}(d-4)(d-3)(d-2)(d-1).
\end{aligned} \tag{389}$$

Powyższe równanie poprawnie odtwarza typową własność teorii Lovelocka, jaką jest przejście w rozwiązania klasyczne, gdy $D = 4$ ($d = 2$). Rozwiązanie staje się wtedy metryką Schwarzschilda (dwa ostatnie człony wynoszą zero).

Entropia wielowymiarowej czarnej dziury może być obliczona przy użyciu różnych metod. Jedną z nich jest uogólnienie tożsamości (8) z czterech do D-wymiarów. Entropię można przedstawić w postaci całki powierzchniowej

$$S = \frac{A_H}{4G_D} + 4\pi \int\limits_H \frac{\partial L}{\partial R_{abcd}} g^{\perp}_{ac} g^{\perp}_{bd} \sqrt{{}_d g} d^d x, \tag{390}$$

gdzie $g^{\perp}_{\mu\lambda}$ to metryka podprzestrzeni ortogonalnej do horyzontu zdarzeń [51,106,47]. Obliczenie entropii można wykonać w trzech krokach. Pierwszym jest parametryzacja metryki poprzez położenie horyzontu zdarzeń r_+, a nie poprzez stałą całkowania C. Wymaga to obliczenia położenia horyzontu zdarzeń

$$\begin{aligned} r_+ = {} & (2C)^{1/(d-1)} - \frac{d-2}{a} b_3 (2C)^{-1/(d-1)} - \frac{1}{a}(2C)^{-3/(d-1)} \big\{ c_3 (d^2-1)d + \frac{1}{2} c_6 (d^2-1)(d-1) \\ & - \frac{1}{2} c_7 [2 - (d-1)(5d-4)d] + \frac{1}{8} c_8 (10 - 13d + 12d^2 - 5d^3) - \frac{2}{a}(b_1 b_3 + b_2 b_3)(d^2-1)(d-2) \\ & + \frac{1}{2a} b_3^2 (d-2)(4 + 6d - 13d) \big\}, \end{aligned} \tag{391}$$

a następnie wyrażeniu stałej C poprzez r_+ za pomocą powyższej relacji. Można zauważyć, że dla $D = 4$ ($d = 2$) położenie horyzontu zdarzeń odtwarza wynik pracy Lu i Wise'a [84]

$$r_+ = 2GM \left[1 - \frac{\pi}{G^3 M^4} \left(6c_3 + 5c_7 + \frac{3}{2} c_6 - c_8 \right) \right]. \tag{392}$$

Po całkowaniu równania (390) entropia przyjmuje postać

$$\begin{aligned} S = {} & \frac{A_H}{4G_d} + 4\pi \omega_d r_+^d \varepsilon \left(-2b_1 R + 2b_2 \delta_p{}^q \, R_q{}^p + 4b_3 R_{tr}{}^{tr} \right)_{|H} + 4\pi \omega_d r_+^d \varepsilon^2 \big\{ c_3 \mathrm{Riem}^2 \\ & + c_6 \left[2 (R_{tr}{}^{tr})^2 + R_{pi}{}^{qj} R_{qj}{}^{pi} \right] + 12 c_7 (R_{tr}{}^{tr})^2 + 3 c_8 \left[R_{ti}{}^{tj} R_{rj}{}^{ri} - (R_{tr}{}^{tr})^2 \right] \big\}_{|H}, \end{aligned} \tag{393}$$

gdzie $\mathrm{Riem}^2 = R_{abcd} R^{abcd}$. Wszystkie wielkości obliczane są na horyzoncie zdarzeń, a sposób sumowania zależny jest od rodzaju indeksów: $p, q = 0, 1$ (czas, współrzędna r), a $i, j = 2, ..., d+1$. Parametr ε ma charakter informacyjny: potęga przy parametrze ε informuje o rzędzie dokładności obliczeń (im wyższa potęga w rozwiązaniu tym stopień dokładności wyższy). Z równania (393) wynika, że aby obliczyć entropię w drugim rzędzie wystarczy znać obiekty krzywiznowe w pierwszym rzędzie dokładności (Dodatek: „D-wymiarowe obiekty krzywiznowe w pierwszym rzędzie przybliżenia"). Po

wyrażeniu w jawny sposób obiektów krzywiznowych entropia (393) wynosi

$$S = \frac{r_+^d \omega_d}{4G_D} + \frac{1}{2aG_D} b_3 (d-1) d r_+^{d-2} \omega_d - \frac{\omega_d r_+^{d-4}}{2a^2 G_D} (d-2)(d-1)d(d+1)\left(b_1 b_3 + b_2 b_3 + 3b_3^2\right) + \frac{d\,(d-1)}{4aG_D} \omega_d r_+^{d-4} \left[d(d+1)c_3 + \frac{1}{2}(d^2-1)c_6 + 3d(d-1)c_7 - \frac{3}{4}(d-1)^2 c_8 \right]. \tag{394}$$

Można zauważyć, że zasada „entropia=1/4 powierzchni horyzontu zdarzeń" została złamana.

Entropia może być również obliczona przy wykorzystaniu tożsamości $dM = TdS$, która po całkowaniu przybiera postać $S = \int T^{-1} d\mathcal{M} + S_0$. Stałą całkowania S_0 można wyznaczyć poprzez fizycznie umotywowany warunek, że entropia znika kiedy promień horyzontu zdarzeń dąży do zera [129,201]. Entropia policzona tą metodą jest identyczna z (394).

Do uproszczeń entropii prowadzi przekształcenie jej w taki sposób, aby zależała nie od położenia horyzontu zdarzeń r_+, ale stałej C (lub masy $\mathcal{M}$). Takie przekształcenie powoduje, że ma ona postać

$$\begin{aligned} S &= \frac{\omega_d}{4G_D}(2C)^{d/(d-1)} + \frac{\varepsilon\omega_d}{4aG_D}(2C)^{(d-2)/(d-1)} d^2 b_3 + \frac{\varepsilon^2 \omega_d}{8aG_D}(2C)^{(d-4)/(d-1)} \left[c_7 \left(2 + 2d - 3d^2 + d^3\right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{4} c_8 \left(4 + 5d - 6d^2 + d^3\right) - \frac{1}{a} b_3^2 (d-2)^2 (1+2d) \right]. \end{aligned} \tag{395}$$

Uproszczenie polega na zmniejszeniu liczby stałych b_i i c_i, ponieważ wynik zależy już tylko od parametrów b_3, c_7 i c_8. Brak niektórych stałych b_i i c_i w entropii można zauważyć już po obliczeniu temperatury Hawkinga

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{d-1}{4\pi}(2C)^{-1/(d-1)} - \frac{(d-2)(d-1)d}{4\pi a} b_3 (2C)^{-3/(d-1)} \\ & + \frac{d-1}{4\pi a}(2C)^{-5/(d-1)} \{ -\frac{c_7}{2}(d-4)[2 + (d-2)(d-1)d] + \frac{c_8}{8}(d-4)[4 + (d-5)(d-1)d] \\ & - \frac{b_3^2}{2a}(d-2)^2(4 + 7d - 4d^2) \}. \end{aligned} \tag{396}$$

Ograniczając do przypadku czasoprzestrzeni czterowymiarowej $D = 4$ $(d = 2)$ można otrzymać

$$S = 4\pi G M^2 + 64\pi^2 \varepsilon b_3 + \frac{2\pi^2}{G^2 M^2}\left(4c_4 + c_8\right)\varepsilon^2. \tag{397}$$

Wynik różni się od obliczeń Lu i Wise'a [84], ponieważ w swoich obliczeniach zaniedbali oni człon Gaussa-Bonetta.

Sprowadzenie wyniku do przypadku grawitacji Lovelocka redukuje entropię do

$$S = \frac{r_+^d \omega_d}{4G_D \alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{r_+^2} d(d-1) + \frac{3\alpha_3}{r_+^4} d(d-3)(d-2)(d-1) \right]. \tag{398}$$

Identyczny wynik można otrzymać z formuły

$$S = \frac{\omega_d r_+^d}{4G_D} \sum_{n=1}^{m} \frac{nd}{d+2-2n} \hat{c}_n (r_+^{-2})^{n-1} \text{ dla } m = 3,$$

określającej dokładną postać entropii dla grawitacji Lovelocka [129], co może byc potraktowane jako kolejny test poprawności obliczeń.

Znając temperaturę Hawkinga (396), poprzez analizę pojemności cieplnej $C_{BH} = \partial \mathcal{M}/\partial T$, można stwierdzić czy czarna dziura jest termodynamicznie stabilna. Dla czarnej dziury Tangherliniego pojemność cieplna ma postać

$$C_{BH}^T = -\frac{d\omega_d}{4G_D} \left(\frac{d-1}{4\pi T} \right)^d, \tag{399}$$

zatem jest ciągle ujemna. Oznacza to, że dla $d > 1$ czarna dziura jest niestabilna. Po uwzględnieniu w teorii wyższych członów krzywiznowych metryka Tangherliniego nie jest już rozwiązaniem i pojemność cieplna ulega modyfikacji

$$C_{BH} = C_{BH}^T + \Delta C_{BH}, \tag{400}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta C_{BH} &= \frac{\omega_d}{4aG_D}(d-3)(d-2)d^2 \left(\frac{d-1}{4\pi T} \right)^{d-2} b_3 + \frac{d\omega_d}{8aG_D}(d-5)(d-4) \left(\frac{d-1}{4\pi T} \right)^{d-4} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{a}(d-2)^2(d+1)^2 b_3^2 + \frac{1}{4}\left[8 + 4(d-a)(d-1)d\right] c_7 \; - \frac{1}{4}\left[4 - (d-5)(d-1)d\right] c_8 \right\}. \end{aligned} \tag{401}$$

Powyższa poprawka ΔC_{BH} sprawia, że istnieje możliwość zmiany znaku C_{BH} ze względu na wybór określonej wartości stałych sprzężenia. Należy pamiętać, że powyższe wyrażenie jest przybliżeniem, które załamuje się dla czarnych dziur o bardzo małej masie.

6 Metody komputerowe w kwantowej teorii pola w zakrzywionej czasoprzestrzeni: szczegóły obliczeniowe

W tym rozdziale przedstawiona jest struktura projektów komputerowych. W podrozdziale 6.1 znajduje się opis projektów dotyczących obliczeń współczynników HaMiDeW. W podrozdziale 6.2 przedstawiona jest analiza efektywności metod obliczeń współczynników HaMiDeW $[a_n]$ oraz samych języków komputerowych. W podrozdziale 6.3 znajduje się opis projektów dotyczących obliczeń tensora energii-pędu. Wyniki generowane przez te programy prezentowane były w rozdziale 5.

6.1 Współczynniki HaMiDeW - projekty programistyczne

6.1.1 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy

Projekt ten opiera się na języku TForm[23] i jest zmodyfikowanym projektem opartym na języku Form prezentowanym w podrozdziale 5.1.1. Modyfikacja polega na dostosowaniu go do obliczeń równoległych (wykorzystujących wiele procesorów na raz). Sumaryczny czas obliczeń wykonanych na komputerze z procesorem czterordzeniowym trwa wtedy około 2,5 raza krócej.

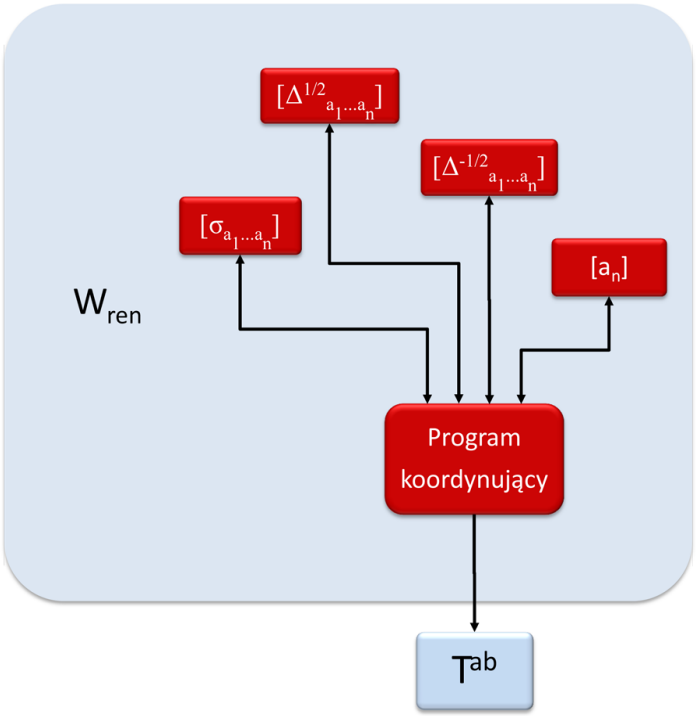
6.1.2 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy

Obliczenia metodą rekurencyjną jawnie kowariantną - sposób podstawowy zostały wykonane również za pomocą projektu programistycznego opartego na języku Mathematica (rysunek 22, czerwony kolor bloków oznacza program napisany w języku Mathematica). To, co odróżnia projekt napisany w języku Mathematica od projektu opartego na języku Form i przedstawionego na rysunku 4, to warstwa programistyczna wynikająca z odmiennej struktury każdego z języków. Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$”, „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$” oraz „$[a_n]$” spełniają tę samą funkcję, co bliźniacze odpowiedniki programów języka Form. Nową cechą jest pojawienie się dodatkowego programu „Program koordynujący”. Program „Program koordynujący” ma za zadanie zautomatyzowanie uruchamiania każdego z pozostałych programów. Powyższa grupa programów umożliwiła obliczenie współczynnika $[a_3]$.

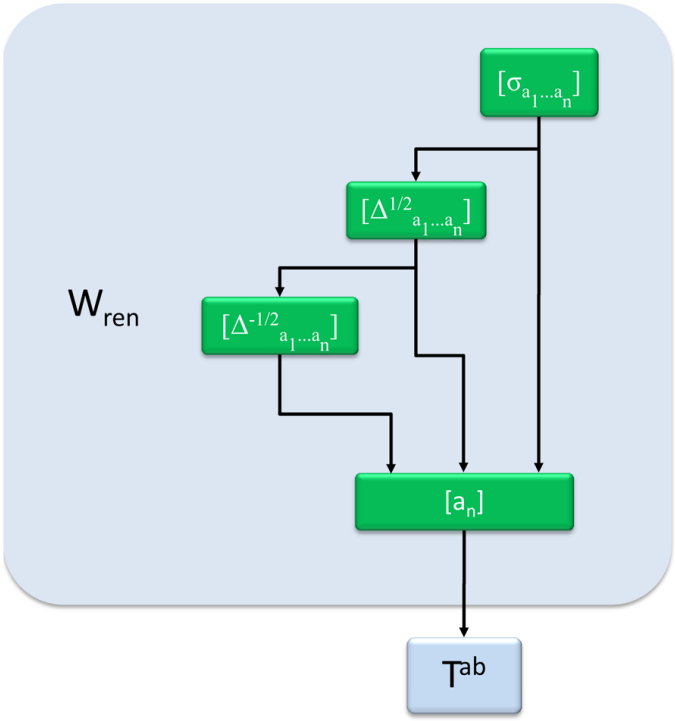
6.1.3 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy

Obliczenia zostały wykonane również za pomocą projektu opartego na języku Maple (rysunek 23, kolor bloków zielony oznacza, że program jest napisany w języku Maple). Użyte programy odróżniają się od analogicznych napisanych w języku Form (rysunek 4) i Mathematica (rysunek 22) warstwą programistyczną. Język Maple pozwala manipulować wyrażeniami matematycznymi podobnie jak Form

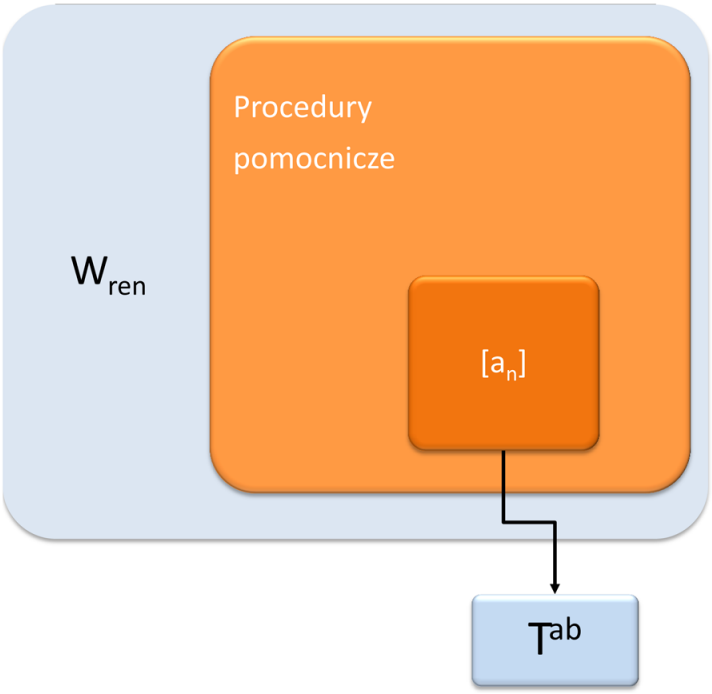
[23] TForm jest to wersja języka Form umożliwiająca wykorzystywanie wielu procesorów jednocześnie.



Rysunek 22: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.



Rysunek 23: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple.

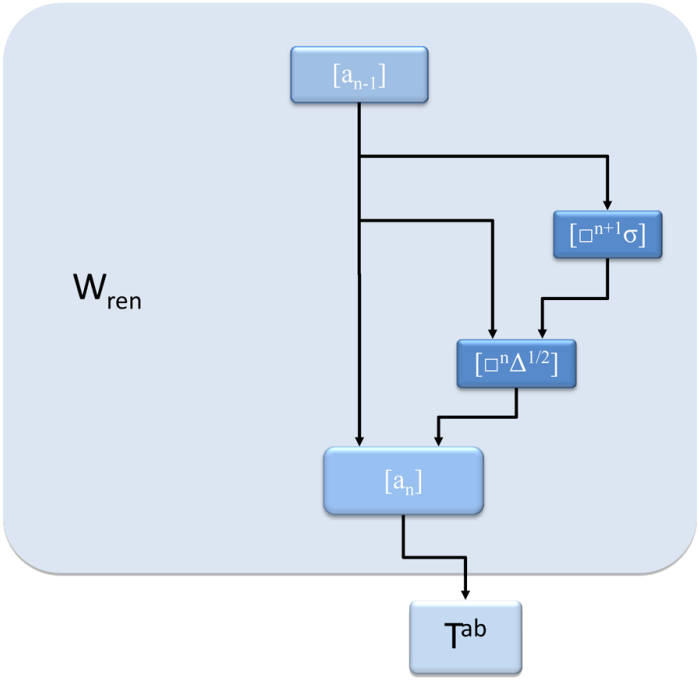


Rysunek 24: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp.

i Mathematica w sposób symboliczny, jednak w języku tym manipulacje te są o wiele bardziej skomplikowane. Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$”, „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$” oraz „$[a_n]$” spełniają tą samą funkcję, co bliźniacze odpowiedniki programów języka Form i Mathematica. Grupa tych programów umożliwiła obliczenie współczynnika $[a_3]$.

6.1.4 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - sposób podstawowy

Obliczenia zostały wykonane również za pomocą projektu opartego na języku Lisp (rysunek 24, kolor pomarańczowy bloku oznacza, że program jest napisany w języku Lisp). Programowanie przy użyciu języka Lisp różni się od programowania w języku Form, Maple i Mathematica tym, że jest to język niższego poziomu, który jest nieprzystosowany do obliczeń symbolicznych. Struktura języka Lisp nie pozwala wykonywać automatycznie upraszczania równań na sposób symboliczny (np. $3ab + 2ab = 5ab$), dlatego należy takie operacje samodzielnie zaimplementować do języka. Celem bloku „Procedury pomocnicze” jest stworzenie operacji, które emulują polecenia podobne do tych, które posiada język Form, Mathematica i Maple, a tym samym stworzenie struktury języka wysokopoziomowego przystosowanego do matematycznych obliczeń symbolicznych. Część „$[a_n]$” wykonuje wszystkie operacje wykonywane przez programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$”, „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$[a_n]$” w języku Form (rysunek 4), Mathematica (rysunek 22) i Maple (rysunek 23). W oparciu

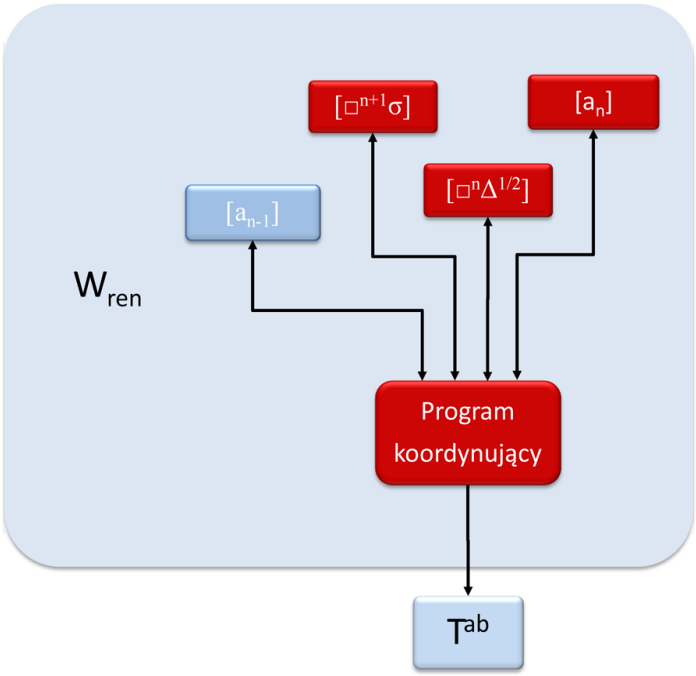


Rysunek 25: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

o tę metodę obliczono współczynnik $[a_3]$.

6.1.5 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I

Metoda rekurencyjna jawnie kowariantna - sposób podstawowy nie pozwala obliczyć współczynnika $[a_5]$, możliwa jest jednak taka jej modyfikacja (modyfikacja I), która będzie to umożliwiała (rysunek 25). Celem modyfikacji I jest zmniejszenie objętości wyników pośrednich. Pierwszy blok „$[a_{n-1}]$" oznacza grupę programów liczącą współczynnik $[a_{n-1}]$ metodą rekurencyjnie jawnie kowariantną-sposób podstawowy. Grupa ta generuje odpowiednie granice koincydencji pochodnych σ, $\Delta^{1/2}$, $\Delta^{-1/2}$ i a_i niezbędne do obliczeń $[a_{n-1}]$. Próba obliczeń $[a_5]$ przy pomocy programów sposobu podstawowego nie jest możliwa ponieważ wymagałoby to obliczeń obiektu $[\sigma_{a_1\ldots a_{12}}]$, którego wielkość wynosiłaby aż kilkadziesiąt gigabajtów. Jednym z rozwiązań, pozwalającym uniknąć problemu obliczenia obiektów o tak dużej wielkości, jest użycie do obliczeń $[a_5]$ nie $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_{10}}\right]$, a zatem również nie $[\sigma_{a_1\ldots a_{12}}]$, ale $\left[\Box^5\Delta^{1/2}\right]$ i w konsekwencji $\left[\Box^6\sigma\right]$. Zabieg ten jest istotą sposobu zmodyfikowanego I. Objętość wyników $\left[\Box^5\Delta^{1/2}\right]$ i $\left[\Box^6\sigma\right]$ jest kilkadziesiąt razy mniejsza, przez co operowanie nimi za pomocą języka Form jest nieporównywalnie prostsze. Obliczenia $\left[\Box^5\Delta^{1/2}\right]$ i $\left[\Box^6\sigma\right]$ realizowane są przez program „$\left[\Box^n\Delta^{1/2}\right]$" i „$\left[\Box^{n+1}\sigma\right]$". Grupa programów „$[a_n]$" oblicza współczynnik $[a_n]$, wykorzystując wyniki grupy programów „$[a_{n-1}]$" oraz „$\left[\Box^n\Delta^{1/2}\right]$".



Rysunek 26: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.

6.1.6 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I

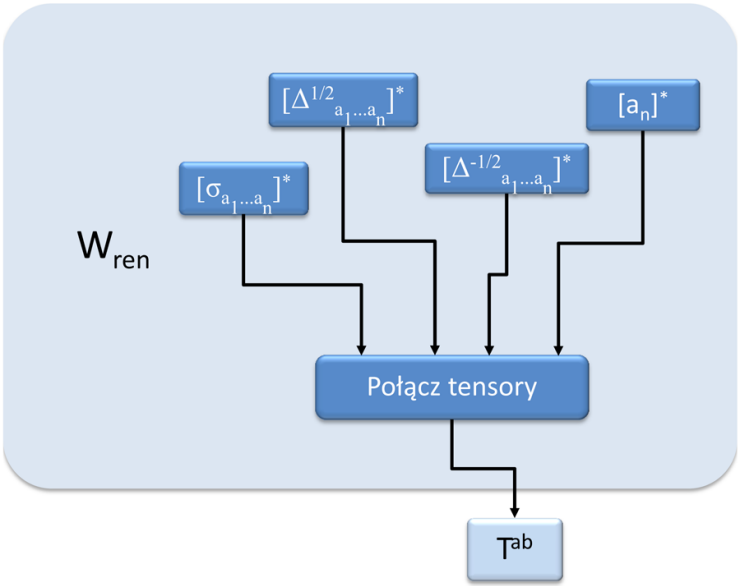
Zoptymalizowanie powyższych programów pod kątem obliczeń równoległych (język TForm) powoduje przyspieszenie obliczeń na komputerze z procesorem czterordzeniowym około 2,5 raza.

6.1.7 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja I

Zasada działania projektu opartego na języku Mathematica (rysunek 26) jest podobna do zasady działania projektu opartego na języku Form (rysunek 25). Programy „$[a_{n-1}]$", „$[a_n]$", „$\left[\Box^n\Delta^{1/2}\right]$" i „$\left[\Box^{n+1}\sigma\right]$" spełniają tę samą funkcję, co ich odpowiedniki w języku Form (rysunek 25). W projekcie wykorzystywany jest również program „Program koordynujący", który automatycznie uruchamia programy. Metoda ta pozwala obliczyć współczynnik $[a_4]$.

6.1.8 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II

Kolejna modyfikacja metody rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II również ma za zadanie zmniejszenie objętości wyników pośrednich (rysunek 27). Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]^*$", „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]^*$",

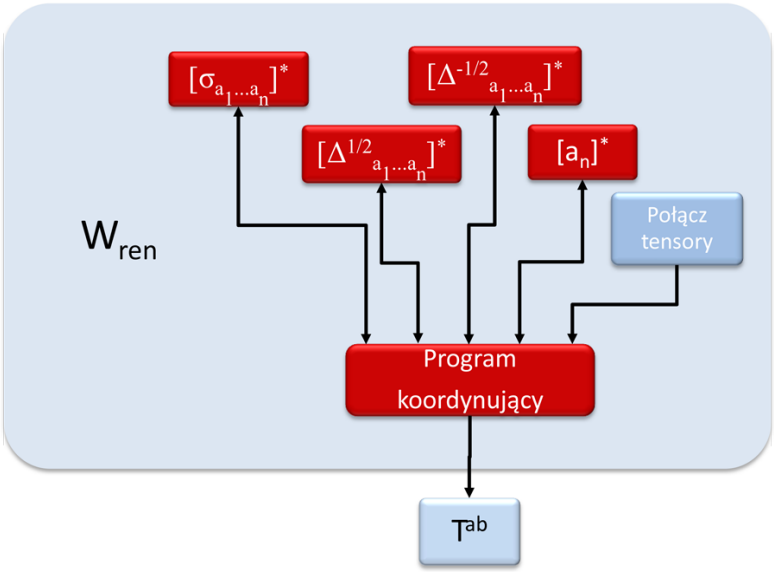


Rysunek 27: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

„$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]^*$”, „$[a_n]^*$” to odpowiedniki programów „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$”, „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$”, „$[a_n]$” metody podstawowej (rysunek 4). Różnią się one od swoich odpowiedników tym, że wyniki ich działania nie zależą tylko i wyłącznie od tensorów krzywiznowych. Programy te generują obiekty, które zależą od granic koincydencji pochodnych samych bitensorów σ, $\Delta^{1/2}$, $\Delta^{-1/2}$, a_n. Bitensory te nie są wyrażone w jawnej postaci zależnej tylko od tensorów Riemanna, w odróżnieniu od bitensorów wyrażonych przy użyciu sposobu podstawowego i zmodyfikowanego I. Sposób zmodyfikowany II pozwala zmniejszyć objętość wyników, jednak odbywa się to kosztem ich niepełnego obliczenia. Kluczowym programem, dzięki któremu ze wspomnianych niepełnych obliczeń można otrzymać dowolny współczynnik $[a_n]$ obliczony w sposób pełny, jest program „Połącz tensory”. Program ten, aby obliczyć współczynnik $[a_n]$ w sposób pełny początkowo pobiera współczynnik $[a_n]$ (obliczony w sposób niepełny) i stopniowo podstawia do niego wszystkie współczynnik niższego rzędu $[a_{n-1;ab}]$, $[a_{n-1;a}]$, $[a_{n-1}]$, $[a_{n-2;abcd}]$, $[a_{n-2;abc}]$, $[a_{n-2;ab}]$, $[a_{n-2;a}]$, $[a_{n-2}]$,..., $[a_1]$. W następnym kroku podstawiane są współczynniki $\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_{2n}}\right]$, $\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_{2n-1}}\right]$, $\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_{2n-2}}\right]$,..., $\left[\Delta^{-1/2}_{a_1a_2}\right]$ oraz $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_{2n}}\right]$, $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_{2n-1}}\right]$, $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_{2n-2}}\right]$,..., $\left[\Delta^{1/2}_{a_1a_2}\right]$. Końcowym etapem jest podstawienie $\left[\sigma_{a_1\ldots a_{2n+2}}\right]$, $\left[\sigma_{a_1\ldots a_{2n+1}}\right]$, $[\sigma_{a_1\ldots a_{2n}}]$,..., $[\sigma_{a_1a_2a_3a_4}]$. Metoda ta pozwala obliczyć współczynnik $[a_5]$.

6.1.9 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II

Programy realizujące obliczenia w języku Mathematica przedstawione są na rysunku 28. Są to programy analogiczne do napisanych w języku Form (rysunek 27). Jedyna różnica to dodatkowy



Rysunek 28: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.

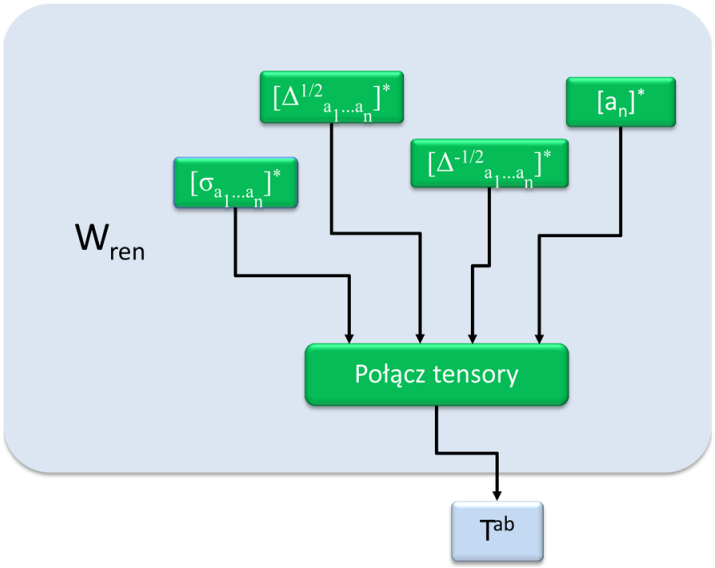
program „Program koordynujący" automatyzujący uruchamianie wszystkich programów. Metoda ta pozwala obliczyć współczynnik $[a_4]$.

6.1.10 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II

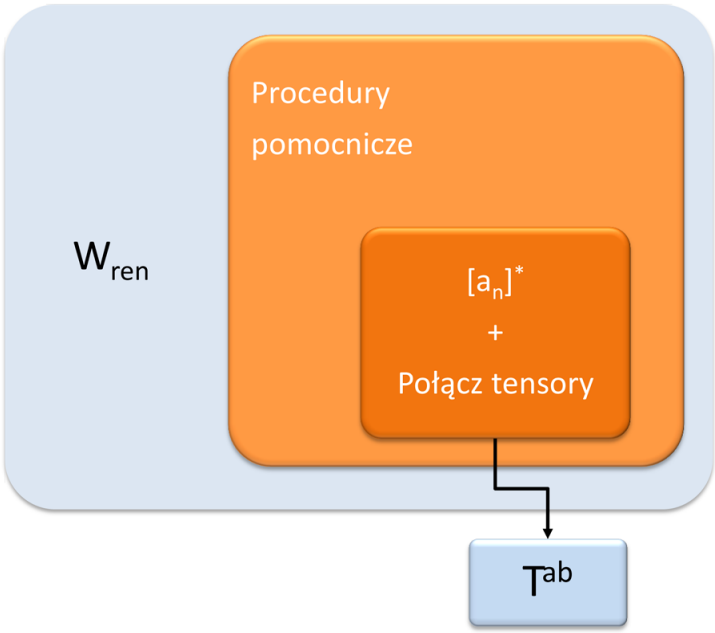
Programy realizujące obliczenia w języku Maple są przedstawione na rysunku 29. Są to programy analogiczne, do tych napisanych w języku Form (rysunek 27) i Mathematica (28). Programy te umożliwiają obliczenie współczynnika $[a_4]$.

6.1.11 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie rekurencyjnej jawnie kowariantnej - modyfikacja II

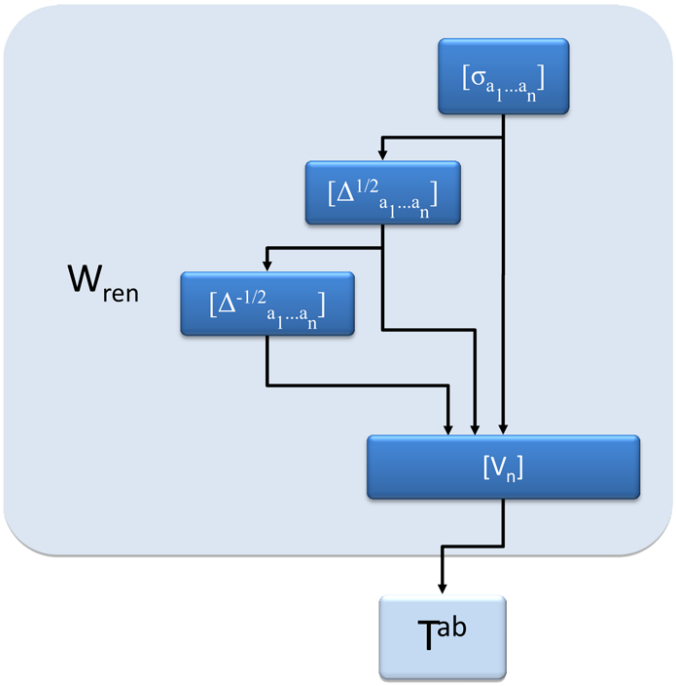
Projekt realizujący obliczenia w języku Lisp przedstawiony został na rysunku 30. Głównym programem jest „$[a_n]^*$ +Połącz tensory" składający się z dwóch części. Część „$[a_n]^*$" wykonuje te same operacje, co programy „$[\sigma_{a_1...a_n}]^*$", „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1...a_n}\right]^*$", „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1...a_n}\right]^*$", „$[a_n]^*$" w języku Form (rysunek 27), Mathematica (rysunek 28) i Maple (rysunek 29). Część „Połącz tensory" spełnia tę samą funkcję, co analogiczny program w pozostałych językach. Blok „Procedury pomocnicze" pełni tę samą funkcję, co odpowiednik dla języka Lisp w metodzie podstawowej. W oparciu o tę metodę obliczony został współczynnik $[a_3]$.



Rysunek 29: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple.



Rysunek 30: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantna zmodyfikowana typu II. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp.



Rysunek 31: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

6.1.12 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy

Projekt programistyczny oparty na języku Form przedstawiony jest na rysunku 31. Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$", „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$" i „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$" są identyczne z programami projektu programistycznego opartego na języku Form wykorzystującego metodę rekurencyjną jawnie kowariantną (rysunek 4). Program „$[V_n]$" służy do obliczeń granic koincydencji współczynników Hadamarda V_n bazując na trzech równaniach (150-152). Ograniczając wynik do przypadku czasoprzestrzeni czterowymiarowej $d = 4$ oraz wykorzystując związek (154) można obliczyć współczynniki $[a_n]$. Z relacji (154) wynika, że aby obliczyć współczynnik $[a_n]$ należy posiadać współczynnik $[V_{n-1}]$, a zatem w przypadku $[a_4]$ będzie to $[V_3]$. Obliczenia $[V_3]$ wymagają uprzednich obliczeń granic koincydencji współczynników niższych rzędów, takich jak: $[V_{2a_1a_2}]$, $[V_{2a_1}]$, $[V_2]$, $[V_{1a_1\ldots a_4}]$, $[V_{1a_1a_2a_3}]$, $[V_{1a_1a_2}]$, $[V_{1a_1}]$, $[V_1]$, $[V_{0a_1\ldots a_6}]$, $[V_{0a_1\ldots a_5}]$, $[V_{0a_1\ldots a_4}]$, $[V_{0a_1a_2a_3}]$, $[V_{0a_1a_2}]$, $[V_{0a_1}]$ i $[V_0]$. Najprostsze z wygenerowanych przez programy współczynników to

$$[V_0] = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \xi\right)R, \tag{402}$$

$$[V_{0;a_1}] = -\frac{R_{;a_1}}{24} + \xi\frac{R_{;a_1}}{4}, \tag{403}$$

$$[V_{0;a_1a_2}] = -\frac{R_{;a_1a_2}}{40} + \xi\frac{R_{;a_1a_2}}{6} - \frac{R_{a_1a_2;p}{}^{p}}{120} + m^2\frac{R_{;a_1a_2}}{12} - \frac{RR_{;a_1a_2}}{72} + \xi\frac{RR_{;a_1a_2}}{12} + \frac{R_{pa_1}R_{a_2}{}^{p}}{90}$$
$$-\frac{R_{pq}R_{a_1}{}^{p}{}_{a_2}{}^{q}}{180} + \frac{R_{pqra_1}R_{a_2}{}^{rpq}}{180}, \quad (404)$$

$$[V_1] = \frac{m^4}{8} - \frac{m^2R}{24} + \frac{R^2}{288} + \xi\frac{m^2R}{4} - \xi\frac{R^2}{24} + \xi^2\frac{R^2}{8} + \frac{R_{;p}{}^{p}}{120} - \xi\frac{R_{;p}{}^{p}}{24} - \frac{R_{pq}R^{pq}}{720} \quad (405)$$
$$+\frac{R_{pqrs}R^{pqrs}}{720}. \quad (406)$$

Dla współczynników $[V_0]$, $[V_1]$ relacja (154) prowadzi do dwóch związków $[a_1] = -2\lim_{m\to 0}[V_0]$ oraz $[a_2] = 4\lim_{m\to 0}[V_1]$, co pozwala potwierdzić zgodność tak otrzymanych współczynników $[a_1]$ i $[a_2]$ z wynikami już znanymi: (140) oraz (141). W analogiczny sposób wykorzystując związki (154), otrzymano współczynniki $[a_3]$ oraz $[a_4]$.

6.1.13 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy

Zoptymalizowanie powyższych programów pod kątem obliczeń równoległych (język TForm) umożliwia przyspieszenie obliczeń na komputerze z procesorem czterordzeniowym około 2,5 raza.

6.1.14 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy

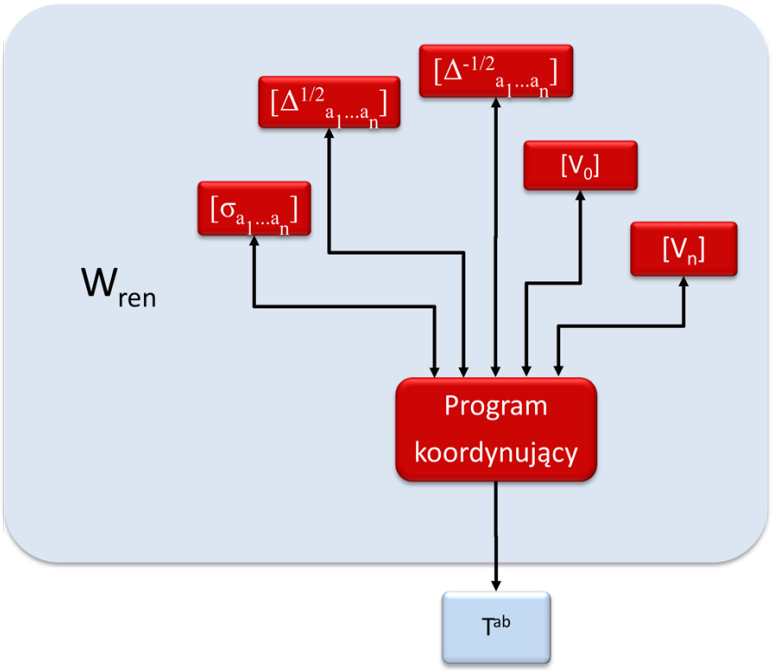
Programy realizujące obliczenia w języku Mathematica przedstawione są na rysunku 32). Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$", „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$", „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$" są bliźniacze do tych wykorzystywanych do obliczeń współczynników HaMiDeW bazujących na języku Mathematica (rysunek 22). Programy „$[V_0]$" i „$[V_n]$" wykorzystują w obliczeniach odpowiednio własności (152) i (151). Wszystkimi programami kieruje główny program „Program koordynujący". Projekt ten umożliwia obliczenie współczynników $[V_2]$ (a tym samym $[a_3]$).

6.1.15 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy

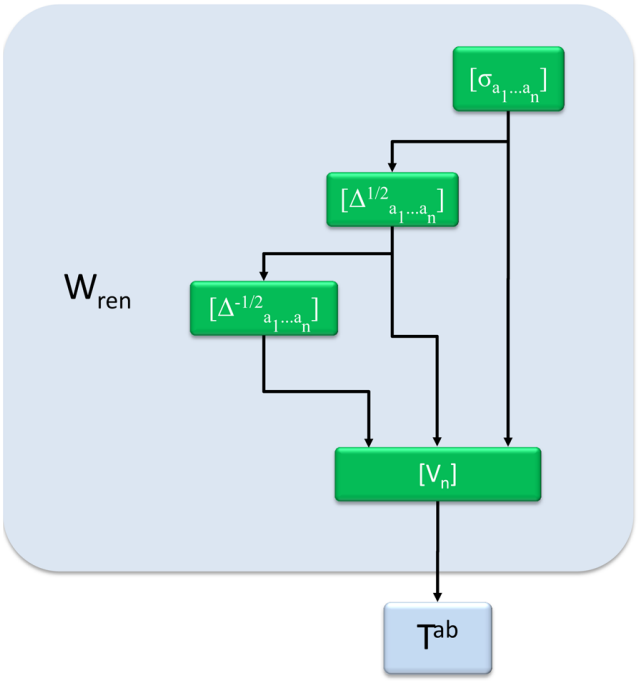
Projekt programistyczny napisany w języku Maple przedstawia rysunek 33 (zielony kolor bloków oznacza, że program jest napisany w języku Maple). Każdy z programów spełnia te same funkcje co ich odpowiedniki w języku Form (rysunek 31). Grupa programów umożliwiła obliczenie współczynnika $[V_2]$ (a tym samym $[a_3]$).

6.1.16 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - sposób podstawowy

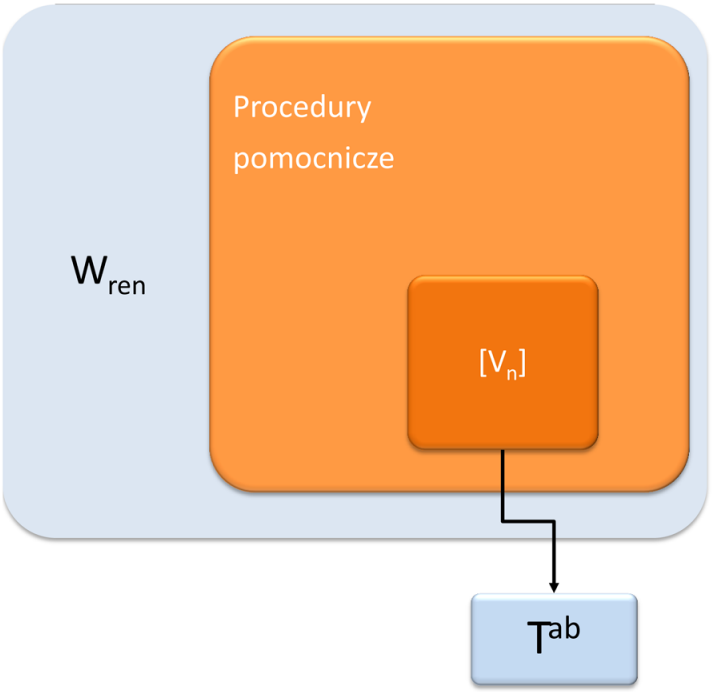
Projekt programistyczny napisany w języku Lisp przedstawia rysunek 34 (pomarańczowy kolor bloków oznacza, że program jest napisany w języku Lisp). Część projektu „Procedury pomocnicze" jest bliźniacza z tą zastosowaną w projekcie obliczeń współczynników HaMiDeW za pomocą metody



Rysunek 32: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.



Rysunek 33: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple.

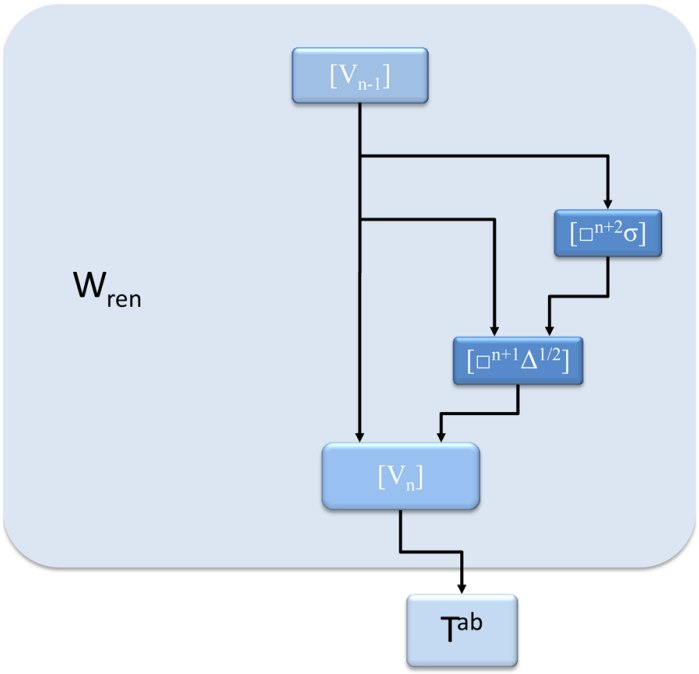


Rysunek 34: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp.

jawnie kowariantnej - podstawowej w języku Lisp (24). Główna część „$[V_n]$" wykonuje wszystkie operacje wykonywane przez programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$", „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$", „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$", „$[V_0]$", „$[V_n]$" w języku Form (rysunek 31), Mathematica (rysunek 32) i Maple (rysunek 33). Programy umożliwiają obliczenie współczynnika $[V_2]$ (a tym samym $[a_3]$).

6.1.17 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I

Aby obliczyć współczynnik $[a_5]$ należy posiadać współczynnik $[V_4]$. Metoda podstawowa nie umożliwia obliczeń tego współczynnika bez uprzedniej jej modyfikacji (rysunek 35). Modyfikacja ma ten sam charakter, co w przypadku obliczeń współczynnika $[a_5]$ metodą rekurencyjną jawnie kowariantną - modyfikacja I. Pierwszy blok „$[V_{n-1}]$" oznacza grupę programów liczącą współczynnik $[V_{n-1}]$ metodą podstawową. Grupa ta generuje odpowiednie granice koincydencji pochodnych σ, $\Delta^{1/2}$, $\Delta^{-1/2}$ i V_i niezbędne do obliczeń $[V_{n-1}]$. Obliczenia $\left[\Box^5\Delta^{1/2}\right]$ i $\left[\Box^6\sigma\right]$ (wymagane do obliczeń $[V_4]$) realizowane są przez programy „$\left[\Box^n\Delta^{1/2}\right]$" i „$\left[\Box^{n+1}\sigma\right]$". Ostatnia grupa programów „$[V_n]$" oblicza współczynnik $[V_n]$ wykorzystując wyniki grupy programów „$[V_{n-1}]$" oraz „$\left[\Box^n\Delta^{1/2}\right]$".



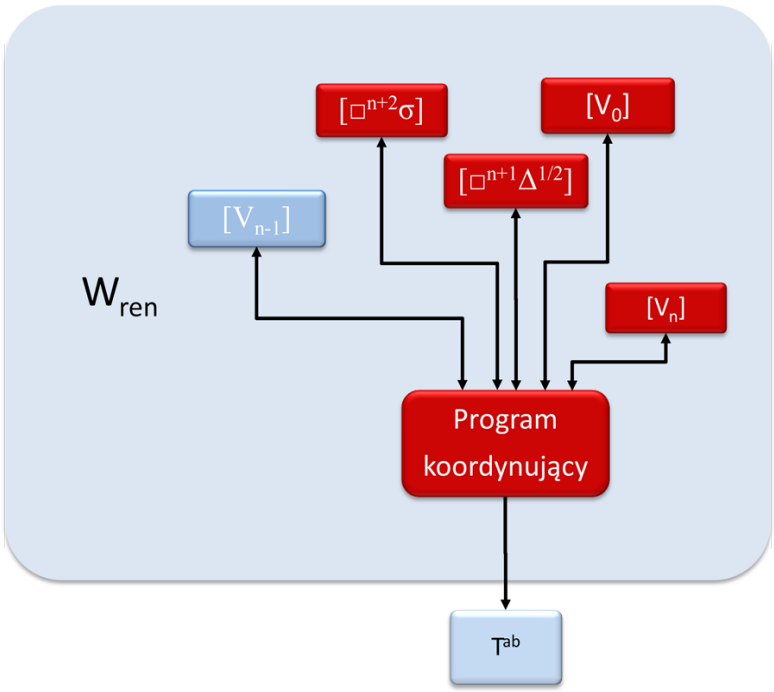
Rysunek 35: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

6.1.18 Projekt napisany w języku TForm oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I

Zoptymalizowanie programów napisanych w języku Form pod kątem obliczeń równoległych (język TForm) umożliwia przyspieszenie obliczeń na komputerze z procesorem czterordzeniowym około 2,8 raza.

6.1.19 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja I

Projekt oparty na języku Mathematica przedstawia rysunek 36. Blok „$[V_{n-1}]$” oznacza grupę programów liczącą współczynnik $[V_{n-1}]$ metodą podstawową. Grupa ta generuje odpowiednie granice koincydencji pochodnych σ, $\Delta^{1/2}$, $\Delta^{-1/2}$ i V_i niezbędne do obliczeń $[V_{n-1}]$. Programy „$\left[\Box^{n+1}\Delta^{1/2}\right]$” i „$\left[\Box^{n+2}\sigma\right]$” realizują te same funkcje co ich odpowiedniki w projekcie opartym na języku Form. Program „$[V_0]$” oblicza granice koincydencji odpowiednich pochodnych V_0. Program „$[V_n]$” oblicza współczynnik $[V_n]$ wykorzystując wyniki grupy programów „$[V_{n-1}]$” oraz „$\left[\Box^{n+1}\Delta^{1/2}\right]$”. Wykorzystywany jest również program „Program koordynujący” automatycznie uruchamiający programy.



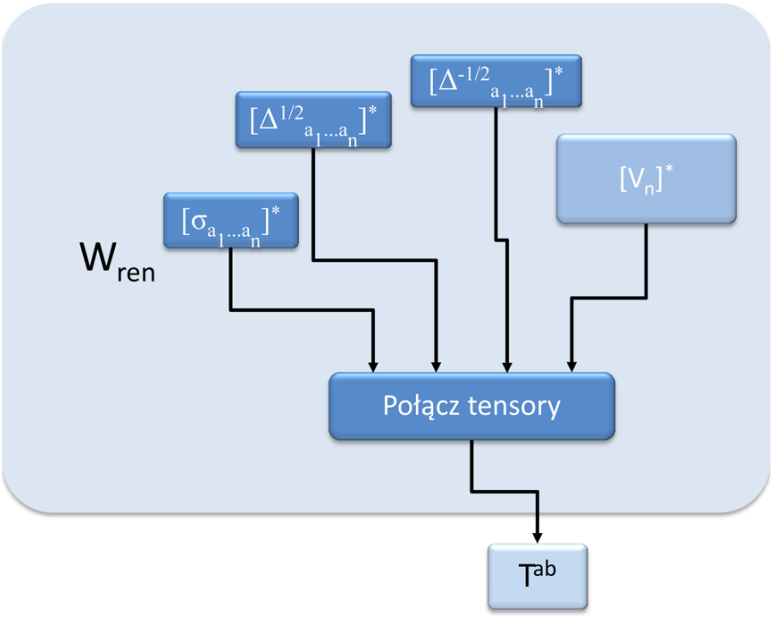
Rysunek 36: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu I. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.

6.1.20 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II

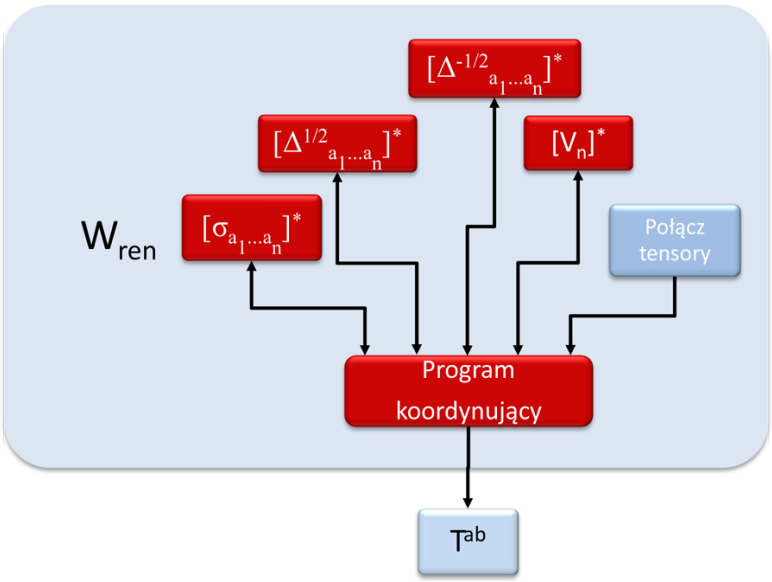
Kolejna modyfikacja metody obliczeń współczynników $[V_n]$ umożliwia obliczenie $[V_4]$, a zatem i $[a_5]$. Istota tej metody jest podobna do metody jawnie kowariantnej - modyfikacja II. Obliczenia wykonywane są przez programy przedstawione na rysunku 37. Programy „$[\sigma_{a_1\ldots a_n}]^*$”, „$\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]^*$”, „$\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]^*$” oraz program „Połącz tensory” to programy mające taką samą zasadę działania, co odpowiedniki projektu napisanego w języku Form opartego na metodzie jawnie kowariantnej - modyfikacja II (rysunek 27). Grupa programów „$[V_n]^*$” służy do obliczeń $[V_n]$ i spełnia analogiczną funkcję jak program „$[a_n]^*$” w projekcie napisanym w języku Form opartym na metodzie jawnie kowariantnej - modyfikacja II. Metoda ta umożliwia obliczenie współczynnika $[V_4]$ (a tym samym $[a_5]$).

6.1.21 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II

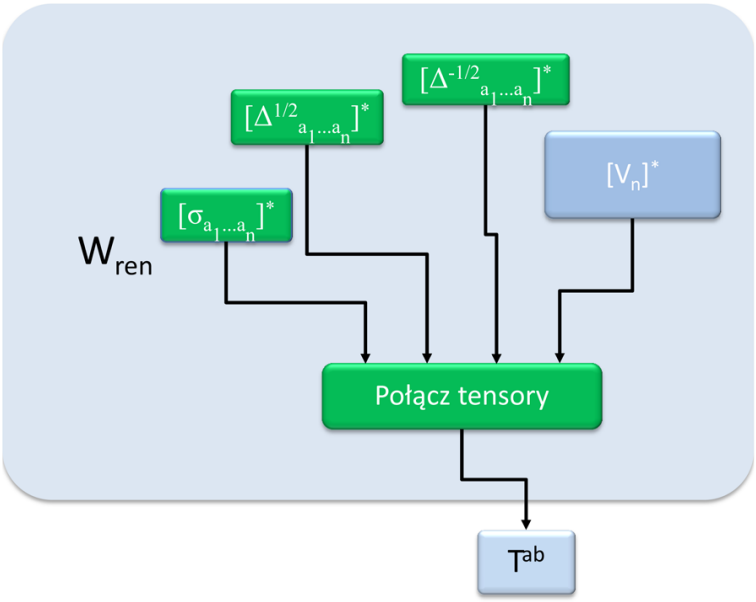
Współczynnik $[V_3]$ można obliczyć również za pomocą języka Mathematica (rysunek 38). Każdy z programów spełnia analogiczną funkcję, jak w projekcie napisanym w języku Form opartym na metodzie jawnie kowariantnej - modyfikacja II (rysunek 37).



Rysunek 37: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.



Rysunek 38: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjna jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.



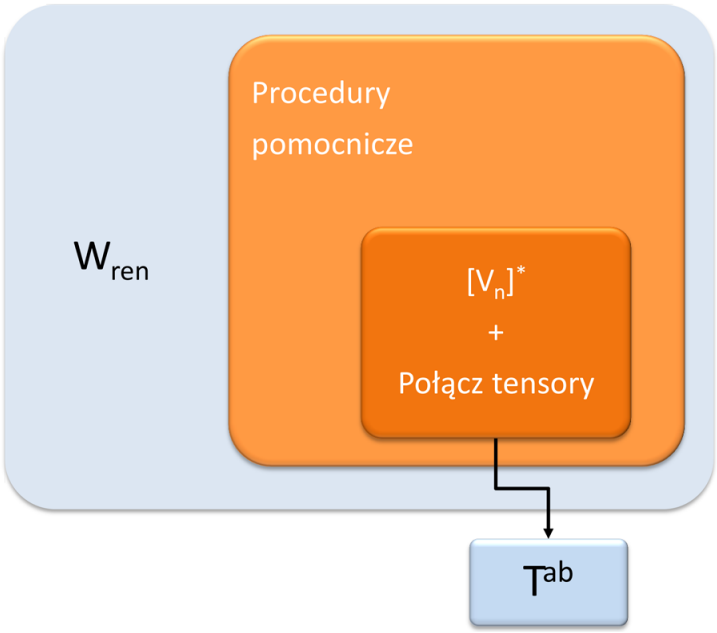
Rysunek 39: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Zielony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Maple.

6.1.22 Projekt napisany w języku Maple oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II

Współczynnik $[V_3]$ można obliczyć również za pomocą języka Maple (rysunek 39). Każdy z programów przedstawionych na rysunku spełnia analogiczną funkcję jak programy napisane w języku Form (rysunek 37) oraz Mathematica (rysunek 38).

6.1.23 Projekt napisany w języku Lisp oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II

Programy realizujące obliczenia w języku Lisp przedstawiono na rysunku 30. Głównym programem jest „$[V_n]^*$ + Połącz tensory" składający się z dwóch części. Część „$[V_n]^*$" oblicza bitensory $[\sigma_{a_1\ldots a_n}]$, $\left[\Delta^{1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$, $\left[\Delta^{-1/2}_{a_1\ldots a_n}\right]$ i $[V_n]$ w sposób niepełny, część „Połącz tensory" natomiast podstawia w odpowiedniej kolejności wszystkie bitensory do współczynnika $[V_n]$ otrzymując w konsekwencji $[V_n]$ zależny jedynie od tensorów Riemanna. Program spełnia tę samą funkcję jak programy napisane w języku Form (rysunek 37). Celem bloku „Procedury pomocnicze" jest stworzenie operacji, które emulują polecenia podobne do tych, które posiada język Form, Maple czy Mathematica, a tym samym stworzenie struktury języka wysokopoziomowego przystosowanego do matematycznych obliczeń symbolicznych. Programy te umożliwiają obliczenie współczynnika $[V_2]$ (a tym samym $[a_3]$).



Rysunek 40: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW z wykorzystaniem współczynników Hadamarda metodą rekurencyjną jawnie kowariantną zmodyfikowaną typu II. Pomarańczowy kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Lisp.

6.1.24 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych-sposób podstawowy

Grupę programów projektu opartego na języku Form przedstawia rysunek 41. Kluczowym programem jest „$e^{(\mu)}_{\ a}$" rozwijającym tetradę w szereg Taylora we współrzędnych normalnych. Przedstawiając tetradę w postaci $e^{(\mu)}_{\ a} = \delta^{\mu}_{a} + X^{\mu(2)}_{a} + X^{\mu(3)}_{a} + X^{\mu(4)}_{a} + ...$, program w oparciu o formułę

$$\left(y\cdot\nabla_0^n\right)e_a^{(\mu)}\left(0\right)=\frac{n-1}{n+1}\left(y\cdot\nabla_0\right)^{n-2}\left[R^{\mu}_{\ ..\nu}\left(0\right)e_a^{(\nu)}\left(0\right)\right], \tag{407}$$

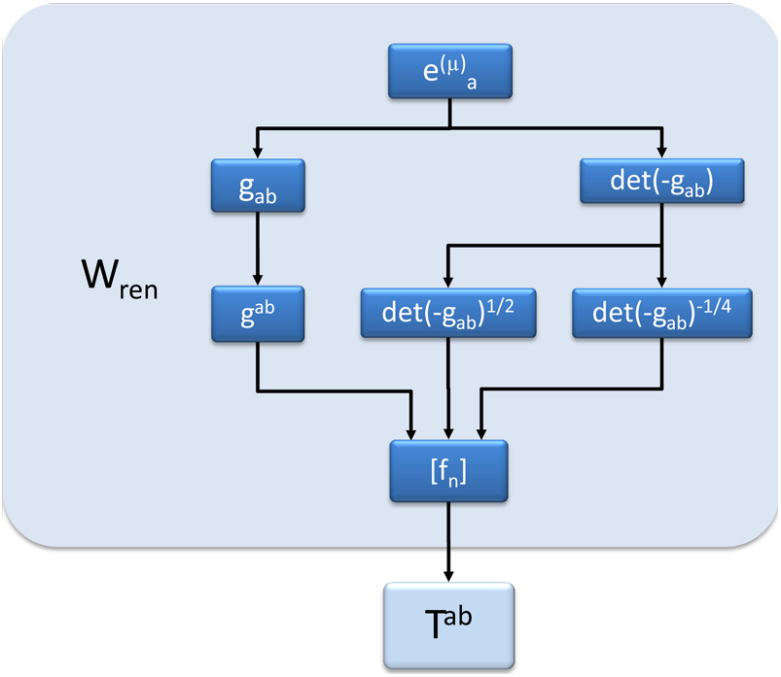
pozwala w sposób perturbacyjny otrzymać każdy element rozwinięcia tetrady $X^{\mu(n)}_{a}$. Do obliczenia współczynnika $[a_4]$ wymagana jest znajomość elementów $X^{\mu(n)}_{a}$ do ósmego rzędu włącznie. W przypadku użycia zapisu bezindeksowego obiekty te mają postać

$$X^{(2)} = \frac{1}{6}\mathcal{R}, \tag{408}$$

$$X^{(3)} = \frac{1}{12}\left(y\cdot\nabla\right)\mathcal{R}, \tag{409}$$

$$X^{(4)} = \frac{1}{40}\left(y\cdot\nabla\right)^2\mathcal{R}+\frac{1}{120}\mathcal{R}\mathcal{R}, \tag{410}$$

$$X^{(5)} = \frac{1}{180}\left(y\cdot\nabla\right)^3\mathcal{R}+\frac{1}{180}\left(y\cdot\nabla\right)\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{1}{360}\mathcal{R}\left(y\cdot\nabla\right)\mathcal{R}, \tag{411}$$



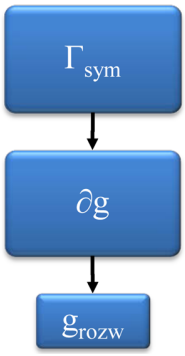
Rysunek 41: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

$$X^{(6)} = \frac{1}{5!}\left[\frac{5}{42}(y\cdot\nabla)^4\mathcal{R}+\frac{5}{21}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{5}{21}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}+\frac{1}{14}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R} + \frac{1}{42}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\right], \tag{412}$$

$$X^{(7)} = \frac{1}{6!}\left[\frac{3}{28}(y\cdot\nabla)^5\mathcal{R}+\frac{5}{14}(y\cdot\nabla)^3\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{15}{28}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}+\frac{9}{28}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R} + \frac{3}{28}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{1}{14}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^3\mathcal{R}+\frac{1}{14}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{1}{28}\mathcal{R}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}\right], \tag{413}$$

$$\begin{aligned} X^{(8)} = \frac{1}{7!}\Bigg[&\frac{7}{72}(y\cdot\nabla)^6\mathcal{R}+\frac{35}{72}(y\cdot\nabla)^4\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{35}{36}(y\cdot\nabla)^3\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}+\frac{7}{8}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R} \\ &+\frac{7}{24}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}+\frac{7}{18}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^3\mathcal{R}+\frac{7}{18}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}\mathcal{R} \\ &+\frac{7}{36}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}+ +\frac{5}{72}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^4\mathcal{R}+\frac{5}{36}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}\mathcal{R} \\ &+\frac{5}{36}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}(y\cdot\nabla)\mathcal{R}+\frac{1}{24}\mathcal{R}\mathcal{R}(y\cdot\nabla)^2\mathcal{R}+\frac{1}{72}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}\Bigg]. \end{aligned} \tag{414}$$

Obiekty $X^{(6)}$ i $X^{(8)}$ zostały przedstawione w pracy Amsterdamskiego, Berkina i O'Connora [9], jednak różnią się od powyższych, co może być przyczyną niezgodności współczynnika $[a_4]$ z otrzymanymi w pracy [168] wynikami oraz wynikami Avramidiego [7, 8].



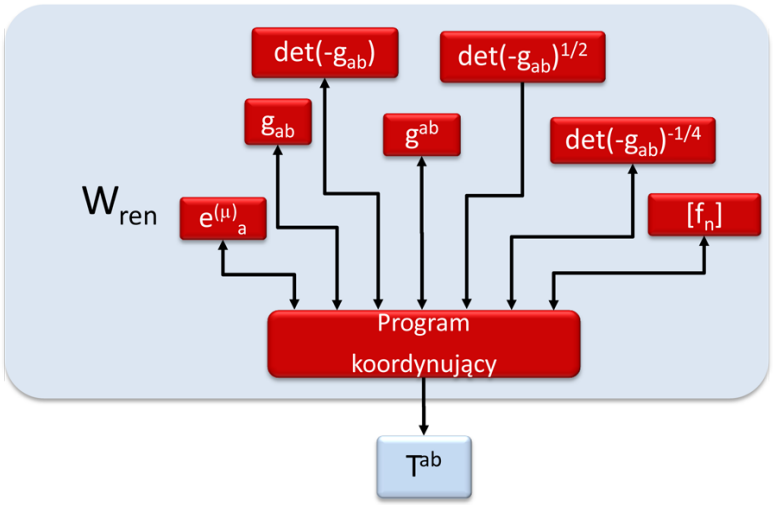
Rysunek 42: Alternatywna metoda otrzymania rozwinięcia Taylora metryki we współrzędnych normalnych. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

Program „$g_{\mu\nu}$" rozwija metrykę w szereg Taylora we współrzędnych normalnych poprzez wykorzystanie związku metryki z tetradą $g_{ab} = e_{(\mu)a}e^{(\mu)}{}_{b}$. Wyniki tego programu można przetestować dokonując obliczeń rozwinięcia g_{ab} za pomocą alternatywnej metody. Metoda ta oparta jest na zastosowaniu definicji współrzędnych normalnych (156) oraz wykorzystaniu własności znikania pochodnej kowariantnej metryki [145]. Realizacja programistyczna tej metody sprowadza się do stworzenia grupy programów napisanych w języku Form przedstawionych na rysunku 42.

Pierwszy z programów - „Γ_{sym}" oblicza zsymetryzowane pochodne koneksji $\Gamma^{a}{}_{d(b,a_1\ldots a_n)}\Big|_{y=0}$ liczone w początku układu współrzędnych normalnych korzystając z tożsamości (156). Program ma charakter rekurencyjny w tym sensie, że mając informację o pochodnej koneksji $\Gamma^{a}{}_{d(b,a_1\ldots a_n)}\Big|_{y=0}$ pozwala obliczyć pochodną koneksji wyższego rzędu $\Gamma^{a}{}_{d(b,a_1\ldots a_{n+1})}\Big|_{y=0}$. Drugi z programów - „$\partial g$" oblicza pochodne $g_{ab,a_1\ldots a_n}|_{y=0}$ korzystając z własności $g_{ab;a_1\ldots a_n} = 0$. Program ten również ma charakter rekurencyjny ponieważ posiadając pochodną metryki niższego rzędu, można za jego pomocą obliczyć pochodną rzędu wyższego. Ostatni z programów - „g_{rozw}" ma za zadanie wykorzystanie wyników poprzedniego programu i wyświetlenie metryki w postaci rozwinięcia do pewnego rzędu. Wyniki generowane przez tę metodę pozwoliły sprawdzić działanie programu „$g_{\mu\nu}$" (rysunek 41) do szóstego rzędu rozwinięcia włącznie.

Kolejne cztery programy: „g^{ab}", „$det\,(-g_{ab})$", „$det\,(-g_{ab})^{1/2}$" i „$det\,(-g_{ab})^{-1/4}$" rozwijają odpowiadające ich nazwom obiekty w szereg Taylora we współrzędnych normalnych, korzystając z ich związku z metryką $g_{\mu\nu}$.

Najważniejszym programem jest „$[f_n]$" obliczający współczynniki $f_n^{(m)}$ przy wykorzystaniu równania (160). Aby obliczyć $[a_4]$ wykorzystując $[a_n] = f_n^{(0)}$, należy znać $f_4^{(0)}$, co prowadzi do konieczności obliczeń $f_1^{(0)}$, $f_1^{(1)}$, $f_1^{(2)}$, $f_1^{(3)}$, $f_1^{(4)}$, $f_1^{(5)}$, $f_1^{(6)}$, $f_2^{(0)}$, $f_2^{(1)}$, $f_2^{(2)}$, $f_2^{(3)}$, $f_2^{(4)}$, $f_3^{(0)}$, $f_3^{(1)}$ i $f_3^{(2)}$. Najprostsze



Rysunek 43: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.

współczynniki $f_n^{(m)}$ wygenerowane przez program to

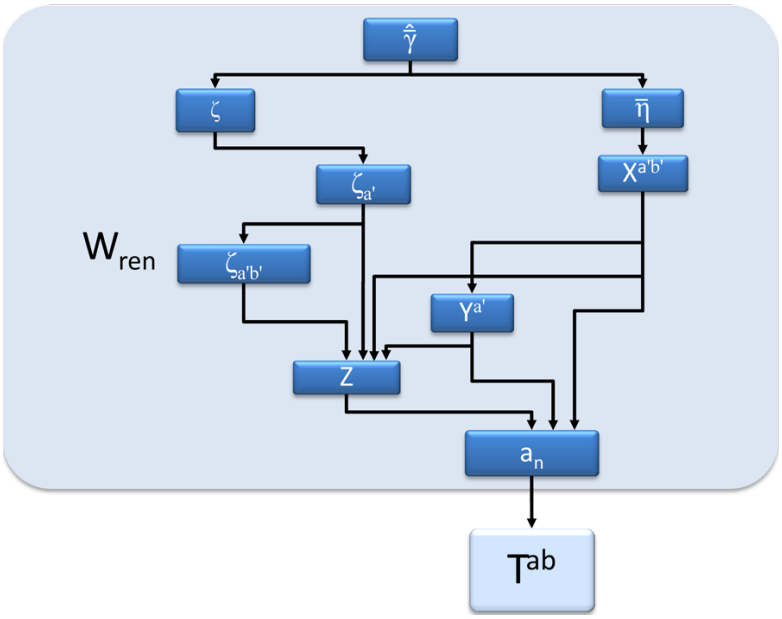
$$f_1^{(0)} = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R, \tag{415}$$

$$f_1^{(1)} = \frac{1}{12} R_{a_1 b}{}^{;b} + \frac{1}{24} R_{;a_1} - \frac{1}{2} R_{;a_1} \xi. \tag{416}$$

Otrzymane współczynniki HaMideW (w tym $[a_4]$) są zgodne ze współczynnikami obliczonymi poprzednimi metodami. Możliwe jest również obliczenie tą metodą współczynnika $[a_5]$ (Dodatek: „Współczynnik $[a_5]$"). Porównanie tego współczynnika z obliczeniami $[a_5]$ Ottewilla i Wardella [167] wykazało ich identyczność.

6.1.25 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń współczynników $[a_n]$ poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych-sposób podstawowy

Powyższe obliczenia wykonywane były za pomocą języka Form (rysunek 41). Analogiczne obliczenia można wykonać za pomocą języka Mathematica (rysunek 43). Programy oparte na języku Mathematica realizują te same funkcje, co odpowiedniki oparte na języku Form. Wyjątkiem jest dodatkowy program „Program koordynujący", który automatyzuje działanie pozostałych programów. Programy te pozwalają obliczyć współczynnik $f_4^{(0)}$, a zatem $[a_4]$. Ich cechą charakterystyczną jest wykorzystanie do otrzymania wyników pośrednich pakietu Invar. Zadaniem pakietu jest upraszczanie tensorów, ale i również sprawdzenie czy wygenerowane wyniki mają poprawną strukturę tensorową.



Rysunek 44: Szczegółowa struktura W_{ren} w przypadku obliczeń współczynników HaMiDeW metodą rekurencyjną jawnie kowariantną bezindeksowa. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

6.1.26 Projekt napisany w języku Form oparty na metodzie rekurencyjnie jawnie kowariantnej bezindeksowej

Ostatnią grupą programów służących do obliczeń W_{ren} są programy wykorzystujące metodę rekurencyjną jawnie kowariantną bezindeksową. Projekt programistyczny napisany w języku Form przedstawiony został na rysunku 44.

Pierwszy z programów ma za zadanie obliczyć funkcję $\widehat{\bar{\gamma}}$ z dokładnością do określonego rzędu rozwinięcia Taylora. W obliczeniach wykorzystywany jest związek (172) mający postać

$$\widehat{\bar{\gamma}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ \left(D^2 + D\right)^{-1} \overline{S} \right\}^k \widehat{1}. \tag{417}$$

Przykładem działania programu jest obliczenie $\widehat{\bar{\gamma}}$ w szóstym rzędzie rozwinięcia. Wygenerowany wynik ma postać

$$\begin{aligned} \widehat{\bar{\gamma}} \;=\; & \frac{1}{3}K_{(2)}\,|2\rangle + \frac{1}{2}K_{(3)}\,|3\rangle + \left\{\frac{3}{5}K_{(4)} - \frac{1}{5}K_{(2)}K_{(2)}\right\}|4\rangle + \left\{-\frac{1}{3}K_{(2)}K_{(3)} - \frac{2}{3}K_{(3)}K_{(2)} + \right. \\ & \left. \frac{2}{3}K_{(5)}\right\}|5\rangle + \left\{\frac{1}{7}K_{(2)}K_{(2)}K_{(2)} - \frac{3}{7}K_{(2)}K_{(4)} - \frac{10}{7}K_{(3)}K_{(3)} - \frac{10}{7}K_{(4)}K_{(2)} + \frac{5}{7}K_{(6)}\right\}|6\rangle\,. \end{aligned} \tag{418}$$

Aby obliczyć współczynnik $[a_4]$, należy posiadać $\widehat{\bar{\gamma}}$ do ósmego rzędu rozwinięcia włącznie. Kolejny

program oblicza $\overline{\eta}$, korzystając z definicji $\overline{\eta} = \overline{\gamma}^{-1}$. Wygenerowany wynik szóstego rzędu ma postać

$$\begin{aligned}\overline{\eta} &= -\frac{1}{3}K_{(2)}\,|2\rangle - \frac{1}{2}K_{(3)}\,|3\rangle + \left\{-\frac{3}{5}K_{(4)} - \frac{7}{15}K_{(2)}K_{(2)}\right\}|4\rangle + \left\{-\frac{4}{3}K_{(2)}K_{(3)} - K_{(3)}K_{(2)} + \right.\\ &\left. -\frac{2}{3}K_{(5)}\right\}|5\rangle + \left\{-\frac{31}{21}K_{(2)}K_{(2)}K_{(2)} - \frac{18}{7}K_{(2)}K_{(4)} - \frac{25}{7}K_{(3)}K_{(3)} - \frac{11}{7}K_{(4)}K_{(2)} - \frac{5}{7}K_{(6)}\right\}|6\rangle\,.\end{aligned} \tag{419}$$

Aby obliczyć współczynnik $[a_4]$, należy posiadać $\overline{\eta}$ do ósmego rzędu włącznie. Program „$X^{a'b'}$" oblicza wielkość zdefiniowaną poprzez związek $X^{a'b'} = g^{b'c'}\overline{\eta}^{a'}{}_{d'}\overline{\eta}^{d'}{}_{c'}$. Wynik piątego rzędu wygenerowany przez program w postaci konwencjonalnej (indeksowej) ma postać

$$\begin{aligned}X^{a'b'} &= g^{a'b'} + \frac{1}{3}R^{a'}{}_{c'}{}^{b'}{}_{d'}\sigma^{c'}\sigma^{d'} - \frac{1}{6}R^{a'}{}_{d'}{}^{b'}{}_{e';c'}\sigma^{d'}\sigma^{e'}\sigma^{c'} + \left\{\frac{1}{20}R^{a'}{}_{e'}{}^{b'}{}_{f';c'd'}\right.\\ &\left. + \frac{1}{15}R^{a'}{}_{e'g'f'}R^{b'}{}_{c'}{}^{g'}{}_{d'}\right\}\sigma^{c'}\sigma^{d'}\sigma^{e'}\sigma^{f'} + \left\{-\frac{1}{90}R^{a'}{}_{f'}{}^{b'}{}_{g';c'd'e'}\right.\\ &\left. - \frac{11}{360}R^{a'}{}_{e'h'f';c'}R^{b'}{}_{g'}{}^{h'}{}_{d'} - \frac{13}{360}R^{\mu'}{}_{f'h'g'}R^{\nu'}{}_{d'}{}^{h'}{}_{c';e'}\right\}\sigma^{c'}\sigma^{d'}\sigma^{e'}\sigma^{f'}\sigma^{g'}.\end{aligned} \tag{420}$$

Aby obliczyć współczynnik $[a_4]$, należy posiadać $X^{a'b'}$ do ósmego rzędu włącznie. Powyższe wyniki $\widehat{\overline{\gamma}}$, $\overline{\eta}$, $X^{a'b'}$ są zgodne z literaturą [6, 9]. Program „$Y^{w'}$" do obliczeń wykorzystuje definicję $Y^{w'} = \overline{\nabla}_{s'}X^{s'w'}$, program „$\zeta$" natomiast w obliczeniach korzysta z definicji obiektu ζ (175). Przykładem wykonywanych przez te programy obliczeń jest wynik piątego rzędu

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{12}R_{a'b'}\sigma^{a'}\sigma^{b'} - \frac{1}{24}R_{a'b';c'}\sigma^{a'}\sigma^{b'}\sigma^{c'} + \left\{\frac{1}{80}R_{a'b';c'd'} + \frac{1}{360}R_{a'e'b'f'}R_{c'}{}^{f'}{}_{d'}{}^{e'}\right\}\sigma^{a'}\sigma^{b'}\sigma^{c'}\sigma^{d'}\\ &+ \left\{-\frac{1}{360}R_{a'b';c'd'e'} - \frac{1}{1440}R_{a'f'b'g';c'}R_{d'}{}^{g'}{}_{e'}{}^{f} - \frac{1}{480}R_{afbg}R_{c'}{}^{g'}{}_{d'}{}^{f}{}_{;e'}\right\}\sigma^{a'}\sigma^{b'}\sigma^{c'}\sigma^{d'}\sigma^{e'},\end{aligned} \tag{421}$$

który jest zgodny z literaturą [6, 9]. Programy „$\zeta_{a'}$" i „$\zeta_{a'b'}$" wykonują odpowiednio pochodne pierwszego i drugiego rzędu na obiekcie ζ, czyli $\zeta_{a'} = \overline{\nabla}_{a'}\zeta$ oraz $\zeta_{a'b'} = \overline{\nabla}_{a'}\overline{\nabla}_{b'}\zeta$. Program „$Z$" oblicza rozwinięcie obiektu zdefiniowanego poprzez

$$Z = \left(Y^{a'}\zeta_{a'} - \zeta_{a'}X^{a'b'}\zeta_{b'} + X^{a'b'}\zeta_{b'a'}\right), \tag{422}$$

wykorzystując wyniki programów „$Y^{a'}$", „$X^{a'b'}$", „$\zeta_{a'}$" i „$\zeta_{a'b'}$". Najważniejszym programem mającym bezpośredni związek z obliczeniami $[a_n]$ jest program „a_n" wykorzystujący równanie

$$a_{k+1} = (k + 1 + D)^{-1}Fa_k, \tag{423}$$

w którym operator $F = \triangle^{-1/2}\Box\triangle^{1/2} - R\xi$ został przekształcony do równoważnej postaci

$$F = Z + Y^{w'}\overline{\nabla}_{w'} + X^{s'w'}\overline{\nabla}_{s'}\overline{\nabla}_{w'}. \tag{424}$$

Można zauważyć, że wszystkie wymienione programy miały na celu obliczenie składowych elementów operatora F. Aby obliczyć współczynnik $[a_4]$, program „a_n" najpierw utożsamia wszystkie współczynniki a_n z wektorami $|a_n\rangle = \sum_{k\geq 0} |k\rangle \langle k| \, a_n\rangle$, a następnie poszukuje pierwszego elementu rozwinięcia $|a_4\rangle = \sum_{k\geq 0} |k\rangle \langle k| \, a_4\rangle$ czyli $\langle 0| \, a_4\rangle = [a_4]$. Poszukiwanie $\langle 0| \, a_4\rangle$ pociąga za sobą konieczność uprzedniego znalezienia wektorów $|a_3\rangle$, $|a_2\rangle$, $|a_1\rangle$ z dokładnością rozwinięcia odpowiednio drugiego, czwartego i szóstego rzędu. Przykładem wyniku wygenerowanego przez program „a_n" jest wektor $|a_1\rangle = |0\rangle \langle 0| \, a_1\rangle + |1\rangle \langle 1| \, a_1\rangle$ obliczony z dokładnością pierwszego rzędu i mający postać[24]

$$|a_1\rangle = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R + \left\{-\frac{1}{12} R_{a'_1;b'}{}^{b'} - \frac{1}{24} R_{a'_1} + \frac{1}{2}\xi R_{;a'_1}\right\} \sigma^{a'_1}. \tag{425}$$

Z powyższego rozwinięcia można wywnioskować, że $\langle 0| \, a_1\rangle = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R$, $\langle 1| \, a_1\rangle = \frac{1}{12} R_{a'_1;b'}{}^{b'} + \frac{1}{24} R_{a'_1} - \frac{1}{2}\xi R_{;a'_1}$, a zatem $[a_1] = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R$. Porównanie współczynników $[a_2]$, $[a_3]$, $[a_4]$ z odpowiednikami policzonymi poprzednimi metodami wykazały ich identyczność.

6.2 Efektywność obliczeń współczynników $[a_n]$

Na wyniki obliczeń współczynników $[a_n]$ można spojrzeć pod kątem ich efektywności (szybkości obliczeń). Efektywność może być mierzona zdolnością obliczeń współczynników $[a_n]$ o różnych indeksach. Im wyższy indeks współczynnika obliczonego przy użyciu danego języka, tym efektywność wyższa (rysunek 45). Biorąc pod uwagę podstawowy sposób obliczeń, najbardziej efektywna okazała się metoda poprzez rozwinięcie Taylora. Po uwzględnieniu modyfikacji metod, wyższą efektywność osiąga metoda rekurencyjna jawnie kowariantna - modyfikacja II i metoda z wykorzystaniem współczynników Hadamarda - modyfikacja II. Najbardziej efektywnym językiem w obliczeniach okazał się TForm oraz Form. Rodzi się więc pytanie czy można jeszcze bardziej poprawić wydajność obliczeń i w jakim stopniu jest to możliwe. Jedną z operacji najczęściej używanych w obliczeniach symbolicznych jest pochodna kowariantna. Dla operacji tej zostało przeprowadzone porównanie szybkości obliczeń poprzez dwa języki: Form oraz C. Test polegał na sprawdzeniu czasu wykonywania pochodnych kowariantnych działających na iloczyn tensorów

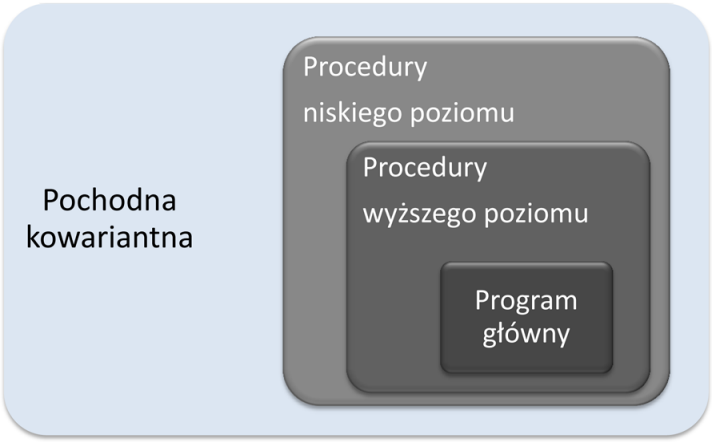
$$(\sigma_a \sigma^a)_{;k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{426}$$

wraz ze wzrostem rzędu pochodnej n. Język C został wybrany do porównania z językiem Form nie tylko ze względu na potencjalnie najwyższą szybkość działania, ale i również na możliwość niskopoziomowej ingerencji w strukturę programu. Grupa programów napisanych w języku C przedstawiona została na rysunku 46. Grupa ta składa się z trzech programów: „Procedury niskiego poziomu", „Procedury wyższego poziomu" oraz „Programu głównego". Programy te mają strukturę hierarchiczną. Oznacza to, że program „Program główny" korzysta z programu „Procedury wyższego poziomu", a ten z kolei korzysta z programu „Procedury niskiego poziomu". Program

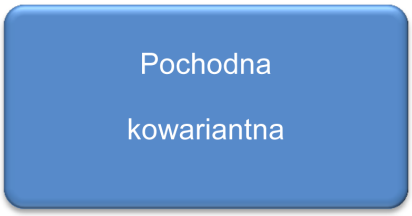
[24] Program generuje wektory $|n\rangle$ w postaci jawnej, czyli w przypadku $|0\rangle$ i $|1\rangle$ będą to $|0\rangle = 1$, $|1\rangle = -\sigma^{\nu_1}$.

Metoda obliczeń	Sposób	Język				
		Form	TForm	Mathematica	Maple	Lisp
rekurencyjna jawnie kowariantna	sposób podstawowy	$[a_4]$	$[a_4]$	$[a_3]$	$[a_3]$	$[a_3]$
	sposób zmodyfikowany I	$[a_5]$	$[a_5]$	$[a_4]$		
	sposób zmodyfikowany II	$[a_5]$		$[a_4]$	$[a_4]$	$[a_3]$
poprzez związek ze współczynnikami Hadamarda	sposób podstawowy	$[a_4]$	$[a_4]$	$[a_3]$	$[a_3]$	$[a_3]$
	sposób zmodyfikowany I	$[a_5]$	$[a_5]$	$[a_4]$		
	sposób zmodyfikowany II	$[a_5]$		$[a_4]$	$[a_4]$	$[a_3]$
poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych	sposób podstawowy	$[a_5]$		$[a_4]$		
rekurencyjna jawnie kowariantna bezindeksowa	sposób podstawowy	$[a_4]$				

Rysunek 45: Maksymalny współczynnik $[a_n]$ obliczony za pomocą danej metody, sposobu oraz języka programowania.



Rysunek 46: Szczegółowa struktura programu do obliczeń pochodnej kowariantnej. Kolor czarny bloku oznacza, że program został napisany w języku C.



Rysunek 47: Program do obliczeń pochodnej kowariantnej. Niebieski kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Form.

„Procedury niskiego" poziomu zawiera podstawowe operacje niskiego poziomu wykonywane na tensorach, na przykład: dodawanie, usuwanie, kopiowanie i wyświetlanie tensora. Program „Procedury wyższego poziomu", korzysta z powyższych operacji, aby utworzyć procedury wyższego rzędu, na przykład: wykonanie pochodnej, wyświetlenie całego równania. Program „Program główny" służy do utworzenia równania (426) i wykonania na nim operacji pochodnej kowariantnej oraz wyświetlenie całego wyniku.

Odpowiednik grupy programów „Pochodna kowariantna" dla języka Form składa się tylko z jednego programu (rysunek 47).

Wynik testu pokazuje, że projekt oparty na języku C przewyższa pod względem szybkości program napisany w języku Form. Różnice w szybkości są tym większe, im rząd pochodnej w obliczeniach (426) jest wyższy. Dla n=10 projekt języka C jest około 30 razy szybszy, dla n=15 jest 635 razy szybszy, natomiast dla n=17 jest 1400 razy szybszy.

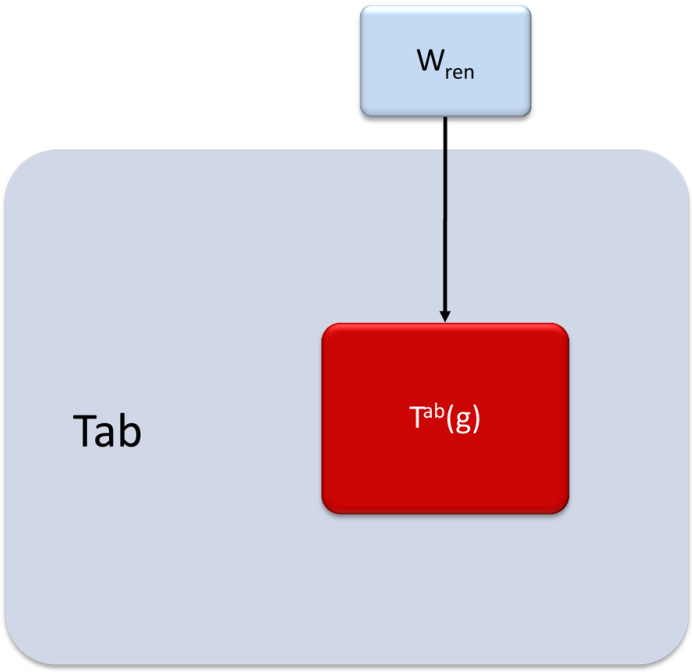
6.3 Tensor energii-pędu - projekty programistyczne

6.3.1 Projekt napisany w języku Mathematica oparty na metodzie obliczeń tensora energii-pędu z wykorzystaniem jego definicji

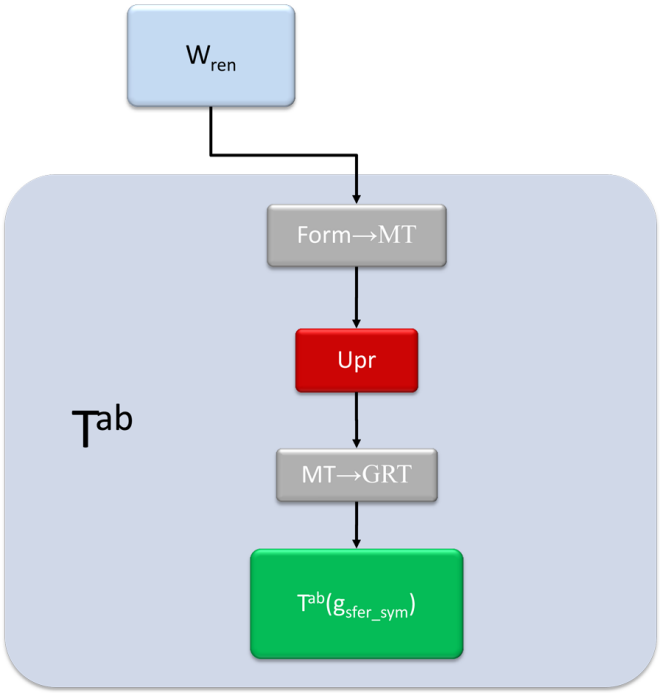
Obliczenia tensora energii-pędu opierające się na definicji (288) realizowane były również przez projekt napisany tylko i wyłącznie w języku Mathematica (rysunek 48). Obliczenia przeprowadza jeden program „$T^{ab}\,(g)$", który w uproszczeniach wyników pośrednich wykorzystuje pakiet XTensor.

6.3.2 Projekt napisany w języku Mathematica, Maple i Perl oparty na metodzie obliczania tensora energii-pędu poprzez redukcję działania efektywnego W_{ren}

Obliczenia bloku T^{ab} realizowane były również za pomocą języka Mathematica, Maple, Perl oraz pakietu GRTensor (rysunek 49). Pierwsze trzy programy „Form→GRT", „Upr", „MT→GRT" mają za zadanie wstępnie uprościć działanie efektywne. Program „$T^{ab}\left(g_{sfer_sym}\right)$" pozwala najpierw obliczyć zredukowane działanie efektywne za pomocą pakietu GRTensor, a następnie oblicza w języku Maple tensor energii-pędu wykorzystując równania Eulera-Lagrange'a.



Rysunek 48: Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń z definicji tensora energii-pędu. Czerwony kolor bloku oznacza, że program został napisany w języku Mathematica.



Rysunek 49: Szczegółowa struktura T^{ab} w przypadku obliczeń metodą poprzez redukcję działania efektywnego. Projekt oparty jest na wielu językach programowania. Kolor bloków oznacza rodzaj języka: szary - Perl, czerwony - Mathematica, zielony - Maple.

7 Podsumowanie

Celem niniejszej rozprawy było rozszerzenie wiedzy na temat czarnych dziur w teoriach z wyższymi członami krzywiznowymi. W autorskiej części rozprawy dokonano analizy tych teorii zaczynając od najprostszej, jaką jest kwadratowa grawitacja, poprzez teorię szóstego rzędu rozpatrywaną w D-wymiarach, a kończąc na teorii ósmego rzędu wynikającej z efektu polaryzacji próżni.

Pierwszym z celów głównych postawionych w niniejszej pracy była analiza teorii kwadratowej sprzężonej z elektrodynamiką w kontekście rozwiązań czarnodziurowych. Mimo, że jest to jedna z najprostszych teorii z wyższymi członami krzywiznowymi, to równania pola są skomplikowane ze względu na występowanie wysokich pochodnych metryki. Do otrzymania rozwiązań równań zastosowano przybliżoną metodę perturbacyjną, która pozwoliła otrzymać analogon klasycznego rozwiązania Reissnera-Nordströma. Już na etapie analizy równań metody perturbacyjnej pokazano, że bez względu na rząd przybliżenia rozwiązanie nie zależy od stałej α występującej w działaniu kwadratowej grawitacji. Oznacza to, że człon αR^2 występujący w działaniu kwadratowym nie wnosi żadnego wkładu do poszukiwanych rozwiązań równań pola. Przy użyciu wyżej wymienionej metody obliczono metrykę w trzecim rzędzie perturbacji, a także położenie horyzontu wewnętrznego, zewnętrznego, temperaturę Hawkinga i entropię. Wszystkie te wielkości okazały się różne od swoich klasycznych odpowiedników liczonych dla czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma, co świadczy o tym, że kwadratowa grawitacja ma wpływ na rozwiązania. Zauważono też, że entropia narusza regułę: „entropia=1/4 Powierzchni horyzontu zdarzeń". Przeanalizowany został również przypadek ekstremalnej czarnej dziury. Pokazano, że czarna dziura jest ekstremalna, gdy $r_{ekstr} = |e|$, co oznacza, że promień ten jest identyczny z odpowiednikiem klasycznym dla czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma (wartość promienia ekstremalnego obliczona była dokładnie, a nie w sposób przybliżony). Charakterystyczny okazał się również wynik entropii dla przypadku ekstremalnej czarnej dziury. Pokazano, że obliczona w sposób przybliżony poprawka do entropii pochodząca od członów kwadratowych nie zależy od żadnego parametru swobodnego (ładunku lub promienia) i jest wartością stałą.

Drugim celem głównym była odpowiedź na pytanie czy układ kwadratowej grawitacji sprzężonej z nieliniową elektrodynamiką może generować nieosobliwe rozwiązanie czarnodziurowe. Analizę ograniczono do obliczeń przybliżonych w pierwszym rzędzie rachunku perturbacyjnego. Otrzymanie metryki w wyższym rzędzie dokładności jest bardzo skomplikowane ze względu na zastosowanie elektrodynamiki nieliniowej zamiast klasycznej. Otrzymano rozwiązanie sparametryzowane za pomocą ładunku magnetycznego i masy czarnej dziury, które okazało się nieosobliwe. Tym, co wyróżnia otrzymaną metrykę, jest jej nietypowe zachowanie w granicy zerowego ładunku, ponieważ nie odtwarza ona wtedy metryki Schwarzschilda. Konsekwencją powyższej własności jest to, że temperatura Hawkinga T_H oraz promień horyzontu zdarzeń r_+ nie przechodzą w swoje odpowiedniki dla czasoprzestrzeni Schwarzschilda.

Trzecim celem głównym było zbadanie wpływu efektu polaryzacji próżni kwantowego masywnego pola skalarnego na czasoprzestrzeń opisującą czarną dziurę. Na wstępie obliczono działanie efektywne W_{ren} z dokładnością do członu $1/m^4$, a następnie dokonano analizy wartości tensora energii-pędu pochodzącego od W_{ren} w czasoprzestrzeni Reissnera-Nordströma. Analiza ta wykazała, że celowe jest

przeprowadzenie obliczeń z dokładnością wyższą, niż znana dotąd w literaturze, ponieważ pozwala znacząco lepiej określić wartość tensora energii-pędu. Wpływ wyższej dokładności obliczeń jest najmniejszy, gdy współrzędna $r \to \infty$, natomiast w obszarze horyzontu zdarzeń jest istotny. Powyższe wyniki wykorzystano do zbadania wpływu polaryzacji na geometrię Schwarzschilda. Obliczenia przeprowadzone przy pomocy metody perturbacyjnej w pierwszym rzędzie przybliżenia pokazują, że efekt polaryzacji próżni zaburza geometrię Schwarzschilda. Zaburzenie to jest najbardziej znaczące w obszarze horyzontu zdarzeń. Efekt polaryzacji zawsze podwyższa wartość temperatury Hawkinga, a jej wartość nie zależy od stałej $\eta = \xi - 1/6$.

Czwarty cel dotyczy zbadania wpływu polaryzacji próżni pola skalarnego na geometrię czarnej dziury Reissnera-Nordströma dla przypadku ekstremalnego. Pokazano, że wyższa dokładność obliczeń działania efektywnego sprawia, iż geometria otoczenia horyzontu zdarzeń nie może być geometrią typu Bertottiego-Robinsona. Natomiast po włączeniu stałej kosmologicznej geometria Bertottiego-Robinsona jest rozwiązaniem dokładnym równań pola przy uwzględnieniu efektu polaryzacji próżni.

Piąty cel dotyczy analizy zachowania tensora energii-pędu dla pól o dowolnym spinie w czasoprzestrzni ABGB z niezerową stałą kosmologiczną wewnątrz czarnej dziury. Dokonano identyfikacji typu geometrii jakie może przyjmować otoczenia horyzontu dla przypadku ekstremalnego (geometria Bertottiego - Robinsona, Plebańskiego - Hacyana, Nariai). Stwierdzono regularność (nieosobliwość) tensora energii-pędu, dokonano analizy numerycznej zachowania tensora energii. Analiza wykazała oscylacyjne zachowanie tensora energii - pędu wewnątrz czarnej dziury oraz to, że wartość maksymalna tensora energii - pędu nie znajduje się w jego centrum, ale w obszarze pomiędzy centrum a horyzontem zdarzeń. Zachowanie to jest jakościowo inne od zachowania tensora energii-pędu w czasoprzestrzeni Reissnera - Nordströma, gdzie dla $r \to 0$ dąży on do nieskończoności.

Szósty cel dotyczy uogólnienia teorii Lovelocka i płynących stąd konsekwencji dla rozwiązań czarnodziurowych. Rozważana była teoria bez pól materii zawierająca człony krzywiznowe nie wyższe niż szóstego rzędu. D-wymiarowe sferycznie symetryczne rozwiązanie czarnodziurowe otrzymano wykorzystując przybliżoną metodę perturbacyjną. Pokazano również, że stopień komplikacji obliczonej entropii czarnej dziury zależy od parametryzacji rozwiązania. Jeśli rozwiązanie jest sparametryzowane poprzez promień horyzontu zdarzeń, entropia jawnie zależy od siedmiu wyższych członów krzywiznowych, jeśli natomiast rozwiązanie jest sparametryzowane poprzez masę czarnej dziury, entropia jawnie zależy już tylko od trzech członów. Rozwiązanie sprowadzono do teorii mniej ogólnej, jaką jest teoria Lovelocka ograniczona do maksymalnie D=8 wymiarów. Można zauważyć, że rozwiązanie odtwarza wtedy typowe własności teorii Lovelocka: metryka przechodzi w rozwiązanie Schwarzschilda dla D=4, a entropia odtwarza formułę określającą entropię dla grawitacji Lovelocka.

W niniejszej rozprawie równie istotne były cele pośrednie, bez których powyższe cele główne dotyczące tematyki polaryzacji próżni nie mogłyby być osiągnięte. Pierwszy z celów pośrednich dotyczył obliczeń współczynników HaMideW. Obliczenia W_{ren} wymagają znajomości współczynników $[a_3]$ i $[a_4]$, które zostały obliczone przy wykorzystaniu czterech metod: rekurencyjnej jawnie kowariantnej, poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych, rekurencyjnej jawnie kowariantnej bezindeksowej oraz wykorzystującej współczynniki Hadamarda. W literaturze można znaleźć współczynnik

$[a_4]$ obliczony za pomocą wielu metod, jednak uzyskane wyniki nie są identyczne. Współczynnik $[a_4]$ obliczony w niniejszej pracy porównano z policzonym przez Avramidiego [7, 8] co wykazało, że są one takie same. Współczynnik $[a_4]$ został ponadto poddany testom sprawdzającym jego poprawność, które zakończyły się pozytywnym wynikiem. Policzono również współczynnik $[a_5]$ za pomocą trzech metod: rekurencyjnej jawnie kowariantnej, poprzez rozwinięcie Taylora we współrzędnych normalnych oraz wykorzystującej współczynniki Hadamarda. Porównanie tego współczynnika z obliczeniami Ottewilla i Wardella [167] wykazało ich identyczność.

Drugi cel pośredni dotyczy stworzenia metodologii obliczeń opartej na komputerowej algebrze symbolicznej. Opracowana metodologia w pierwszej kolejności dotyczy rozwiązywania równań w celu otrzymania biskalarów w granicy koincydencji. Obliczenia realizowane były w oparciu o języki Form, Mathematica, Maple i Lisp. Napisane projekty programistyczne zastosowane zostały do obliczeń współczynników HaMiDeW. Kolejnym krokiem było stworzenie metodologii służącej do znalezienia tensora energii-pędu pochodzącego od działania efektywnego. Używając języków Maple, Mathematica, Form, Perl, napisano szereg programów, które obliczają tensor energii-pędu dwiema metodami. Pierwsza metoda polega na obliczeniu tensora energii-pędu poprzez pochodną funkcjonalną po metryce (metoda tradycyjna), druga - szybsza od poprzedniej - polega na wstępnym założeniu, że czasoprzestrzeń ma symetrię sferyczną, co prowadzi do uproszczenia równań pola (metoda redukcji działania efektywnego). Niezbędnym elementem w powyższych obliczeniach było upraszczanie tensorów. Uproszczenia te oparte były na własnościach symetrii obiektów krzywiznowych i realizowane były przede wszystkim w oparciu o pakiet komputerowy Invar i MathTensor. W obliczeniach fizycznych wykorzystano pięć języków programowania: Form, Maple, Mathematica, Lisp, C++ (pakiet GiNaC). Bardziej technicznym, ale koniecznym etapem w obliczeniach była translacja wyników ze składni jednego z tych języków do drugiego. Zadanie to wykonywały programy napisane w języku Perl, a ich działanie było oparte na zaimplementowanych w tym języku wyrażeniach regularnych.

Trzeci cel pośredni dotyczył nie tylko wykonania obliczeń symbolicznych za pomocą wielu strategii programistycznych i wielu języków programowania, ale i również oceny samych języków programowania przez pryzmat wykonywanych obliczeń. Do obliczeń symbolicznych wykorzystywane było siedem języków: Mathematica, Maple, Form, Lisp, Perl, C++ (pakiet GiNaC) oraz C. W oparciu o te języki napisano wiele wersji projektów programistycznych (wśród nich znajduje się 27 wersji obliczeń współczynników HaMiDeW). Analiza szybkości pokazuje, że język C jest najbardziej wydajny, ale trudny w zastosowaniu ponieważ nie jest naturalnie przystosowany do obliczeń symbolicznych. Język Form należy do grupy języków o dużej wydajności i łatwości zastosowania. Najłatwiejszym w zastosowaniu do takich obliczeń jest język Mathematica - jest to język o średniej wydajności. Język Maple jest językiem o wydajności porównywalnej z językiem Mathematica, jednak nie jest aż tak łatwy w zastosowaniu. Pakiet GiNaC, rozszerzający język C++ o możliwość obliczeń symbolicznych, ma średnią wydajność i również tak jak Maple nie należy do języków przyjaznych. Język Lisp jest językiem wydajnym, choć nie jest naturalnie przystosowany do komputerowych obliczeń symbolicznych. Aby przystosować go do takich obliczeń napisano szereg procedur, które sprawiły, że na tle języka Lisp emulowane było środowisko naśladujące język do obliczeń symbolicznych.

Nie mniej ważne od realizacji celów rozprawy są **dalsze perspektywy badawcze** wynikające z ich realizacji. Perspektywy te mogą być podzielone na dwa rodzaje - fizyczne i informatyczne:

- Fizyczne: Prezentowane w niniejszej rozprawie metody fizyczne (np. rozwiązywanie równań pola metodą perturbacyjną) mogą być z powodzeniem stosowane do analizy innych teorii w wyższymi członami krzywiznowymi. Zagadnienie wpływu skalarnego pola masywnego na geometrię czasoprzestrzeni może być uogólnione na pola o niezerowym spinie. Analiza metod obliczeń współczynników HaMideW otwiera kierunki do tworzenia nowych oryginalnych sposobów ich obliczeń.

- Informatyczne: Większość obliczeń wymagała napisania projektów programistycznych. Projekty te mogą być podstawą do napisania wielu pakietów komputerowych w różnych językach programowania. Wykonywanie obliczeń symbolicznych za pomocą wielu języków programowania pozwala wyłuskać zalety i wady samych języków. To posunięcie może być traktowane jako pierwszy krok w kierunku stworzenia języka do obliczeń symbolicznych pozbawionego wad.

8 Dodatek

W tym rozdziale znajdują się informacje, które odbiegają od głównego nurtu rozprawy, niektóre wyniki oraz przykłady kodu źródłowego rozprawy.

8.1 Formalizm Avramidiego - przykład obliczeń

Przykładem wykorzystania formalizmu Avramidiego do uproszczeń może być obliczenia rozwinięcie Taylora obiektu $\sigma^a\nabla_a\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}$. Obiekt $\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}=\widehat{\widehat{\gamma}}$ w rozwinięciu do czwartego rzędu przy użyciu formalizmu Avramidiego to

$$\widehat{\widehat{\gamma}}=\frac{1}{3}K_{(2)}\left|2\right\rangle+\frac{1}{2}K_{(3)}\left|3\right\rangle+\left\{\frac{3}{5}K_{(4)}-\frac{1}{5}K_{(2)}K_{(2)}\right\}\left|4\right\rangle+.... \tag{427}$$

Aby przedstawić istotę uproszczeń wynik celowo przedstawiono w postaci bezindeksowej. We wzorze wprowadzono nowy obiekt zdefiniowany jako $K_{(n)}=R^{\mu'}{}_{(\nu'_1|\nu'|\nu'_2\ldots\nu'_n)}$. Aby wrócić do tradycyjnego formalizmu, należy przejść do postaci indeksowej, czyli $\widehat{\widehat{\gamma}}\rightarrow\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}$, $K_{(n)}\rightarrow R^{\mu'}{}_{(\nu'_1|\nu'|\nu'_2\ldots\nu'_n)}$, $K_{(2)}K_{(2)}\rightarrow R^{\mu'}{}_{(\nu'_1|a'|\nu'_2)}R^{a'}{}_{(\nu'_1|\mu'|\nu'_2)}$ oraz $\left|n\right\rangle\rightarrow\frac{(-1)^k}{k!}\sigma^{\nu'_1}...\sigma^{\nu'_k}$. Chcąc policzyć rozwinięcie $\sigma^a\nabla_a\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}$, wszelkie obiekty należy wyrazić przy pomocy nowych wprowadzonych przez Avramidiego operatorów. Korzystając z tego, że $D=\sigma^a\nabla_a$, obiekt $\sigma^a\nabla_a\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}$ można zapisać jako $D\widehat{\widehat{\gamma}}$. Następnie wykorzystując równanie (427) można wykazać

$$\begin{aligned}D\widehat{\widehat{\gamma}}=D\left\{\frac{1}{3}K_{(2)}\left|2\right\rangle+\frac{1}{2}K_{(3)}\left|3\right\rangle+\left\{\frac{3}{5}K_{(4)}-\frac{1}{5}K_{(2)}K_{(2)}\right\}\left|4\right\rangle+...\right\}=\\ \frac{1}{3}K_{(2)}D\left|2\right\rangle+\frac{1}{2}K_{(3)}D\left|3\right\rangle+\left\{\frac{3}{5}K_{(4)}-\frac{1}{5}K_{(2)}K_{(2)}\right\}D\left|4\right\rangle+....\end{aligned} \tag{428}$$

Po wykorzystaniu własności $D\left|n\right\rangle=n\left|n\right\rangle$ otrzymujemy poszukiwane rozwinięcie Taylora obiektu $\sigma^a\nabla_a\widehat{\widehat{\gamma}}^{\mu'}{}_{\nu'}$, które wynosi

$$D\widehat{\widehat{\gamma}}=\frac{2}{3}K_{(2)}\left|2\right\rangle+\frac{3}{2}K_{(3)}\left|3\right\rangle+4\left\{\frac{3}{5}K_{(4)}-\frac{1}{5}K_{(2)}K_{(2)}\right\}\left|4\right\rangle+...\ . \tag{429}$$

Warto zauważyć, że ze współczynników rozwinięcia płynie informacja o zsymetryzowanej pochodnej kowariantnej określonego rzędu w granicy koincydencji (163). Powyższy przykład obrazuje istotę uproszczeń płynącą z zastosowania bezindeksowego formalizmu Avramidiego. Obliczenia wykonane tradycyjnymi metodami (indeksowymi) są bardziej złożone.

8.2 Funkcje $f_i^{(\alpha)}$ i $f_i^{(\beta)}$

Jawna postać funkcji $f_i^{(\alpha)}$ i $f_i^{(\beta)}$, występujących we wzorze (251), to

$$f_0^{(\alpha)} = -\frac{48\mathcal{M}^3}{Q^2r^2} + \frac{4\mathcal{M}Q^2\left(\xi-1\right)}{r^4\left(1+\xi\right)^2} - \frac{16\mathcal{M}^2}{r^3\left(1+\xi\right)} - \frac{4Q^6\left(1-4\xi+\xi^2\right)}{\mathcal{M}^2r^5\left(1+\xi\right)^3} - \frac{4Q^4\left[\mathcal{M}\left(1+86\xi-89\xi^2\right)+25r\left(\xi^2-1\right)\right]}{5\mathcal{M}r^5\left(1+\xi\right)^3} + \frac{2Q^6\xi\left(75-425\xi+125\xi^2+\xi^3\right)}{15\mathcal{M}r^6\left(1+\xi\right)^4}, \tag{430}$$

$$f_1^{(\alpha)} = \frac{4Q^4}{5r^5} - \frac{96\mathcal{M}^4}{Q^4r}, \qquad f_2^{(\alpha)} = \frac{4\mathcal{M}Q^2}{r^4} - \frac{96\mathcal{M}^5}{Q^6}, \tag{431}$$

$$\frac{6r^3\mathcal{M}^3}{Q^6}f_3^{(\alpha)} = \frac{2r^2\mathcal{M}^2}{Q^4}f_4^{(\alpha)} = \frac{r\mathcal{M}}{Q^2}f_5^{(\alpha)} = f_6^{(\alpha)} = \frac{96\mathcal{M}^5}{Q^6}, \tag{432}$$

$$f_0^{(\beta)} = -\frac{16\mathcal{M}^3}{Q^2r^2} - \frac{16\mathcal{M}^2}{3r^3\left(1+\xi\right)} - \frac{2Q^2\left[12r\left(1+\xi\right)+\mathcal{M}\left(3-36\xi+\xi^2\right)\right]}{3r^4\left(1+\xi\right)^2} - \frac{2Q^6\left(1-4\xi+\xi^2\right)}{\mathcal{M}^2r^5\left(1+\xi\right)^3} + \frac{Q^6\xi\left(75-425\xi+125\xi^2+\xi^3\right)}{15\mathcal{M}r^6\left(1+\xi\right)^4} - \frac{2Q^4\left[\mathcal{M}\left(1+96\xi-109\xi^2\right)+30r\left(\xi^2-1\right)\right]}{5\mathcal{M}r^5\left(1+\xi\right)^3}, \tag{433}$$

$$f_1^{(\beta)} = \frac{2Q^4}{5r^5} - \frac{8\mathcal{M}^2}{3r^3} - \frac{32\mathcal{M}^4}{Q^4r}, \quad f_2^{(\beta)} = -\frac{32\mathcal{M}^5}{Q^6} + \frac{2\mathcal{M}Q^2}{r^4} - \frac{8\mathcal{M}^3}{Q^2r^2}, \tag{434}$$

$$f_3^{(\beta)} = \frac{8\mathcal{M}^2}{r^3} - \frac{16\mathcal{M}^4}{Q^4r}, \quad f_4^{(\beta)} = -\frac{16\mathcal{M}^5}{Q^6} + \frac{24\mathcal{M}^3}{Q^2r^2}, \quad \frac{r\mathcal{M}}{Q^2}f_5^{(\beta)} = f_6^{(\beta)} = \frac{48\mathcal{M}^5}{Q^6}\,. \tag{435}$$

8.3 Współczynnik $[a_5]$

Jawna postać współczynnika $[a_5]$ to

$$[a_5] = a_5^{(0)} + \xi a_5^{(1)} + \xi^2 a_5^{(2)} + \xi^3 a_5^{(3)} + \xi^4 a_5^{(4)} + \xi^5 a_5^{(5)}, \tag{436}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
a_5^{(0)} \;=\; & \frac{1}{119750400}\Big[-900736R_{ab}R^{ab}R_c{}^eR^{cd}R_{de} - 1297920R_a{}^cR^{ab}\ R_b{}^dR_{cd}R \\
& +1858640\ R_a{}^cR^{ab}R_{bc}R^2 - 1332402R_{ab}R^{ab}R^3 + 152693R^5 + \ 219000R^{ab}R^{cd}R^2R_{acbd} \\
& +89530R^3R_{abcd}R^{abcd} + 156312\ R^{ab}R^{cd}RR_{ac}{}^{ef}R_{bdef} - 107800R^2R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cdef} \\
& -1021632R_a{}^cR^{ab}R_b{}^dR^{ef}R_{cedf} - 471360\ R_{ab}R^{ab}R^{cd}R^{ef}R_{cedf} - 15620R^3R^{;a}{}_{;a} \\
& -332262R_{ab}R^{ab}RR_{cdef}R^{cdef} - \ 142656R_a{}^cR^{ab}R^{de}R_b{}^f{}_c{}^gR_{dfeg} + 7200R^{ab}\ R_{;a;b}R^{;c}{}_{;c} \\
& +16512R^{ab}R^{cd}\ R_a{}^e{}_b{}^fR_{ce}{}^{gh}R_{dfgh} - 122400RR_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{ce}{}^{gh}R_{dfgh} \\
& -82656R^{ab}R^{cd}R_{ac}{}^{ef}R_{bd}{}^{gh}R_{efgh} + 61200R\ R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{cd}{}^{gh}R_{efgh} + \ 27648R^{;a;b}R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} \\
& +77376R^{ab}R^{cd}R_{acbd}R_{efgh}\ R^{efgh} + 39984RR_{abcd}R^{abcd}R_{efgh}R^{efgh} - 29088R^{;a}R_{;b;c}R_a{}^{b;c} \\
& -45696R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cd}{}^{gh}R_{ef}{}^{ij}R_{ghij} - 34368R_{abcd}R^{abcd}R_{ef}{}^{ij}\ R^{efgh}R_{ghij} \\
& -4045236R^2R_{;a}R^{;a} + \ 807696R^{ab}RR^{cd}{}_{;a}R_{cd;b} - 1932624R^{ab}R^{cd}R_{;a}\ R_{cd;b} \\
& +807072R^{ab}R^{cd}\ R^{ef}{}_{;a}R_{cedf;b} + 274008R^{ab}R^2R_{;a;b} + 27408R^{ab}\ R_{cdef}R^{cdef}R_{;a;b} \\
& +44568RR^{;a}{}_{;a}R^{;b}{}_{;b} + 2748R_{;a}\ R^{;a}R^{;b}{}_{;b} + 281568RR^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b} + 27900R^2\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b} \\
& +357672R^{;a}R_{;a;b}R^{;b} + 210696R\ R_{;a;b}R^{;a;b} + 241992R_a{}^cR^{ab}R^{de}{}_{;b}R_{de;c} \\
& -651168R_a{}^cR^{ab}R\ R_{;b;c} + 25920R^{bc}{}_{;a}R^{;a}R_{;b;c} - 208080R^{ab}R^2\ R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} \\
& +84960R^{;a}R^{;b}R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} + 1680RR^{;a;b}\ R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} + 193776R_{ab}R^{ab}RR^{;c}{}_{;c} \\
& -21120R^{ab}R_{;a}R_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 18864\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}R_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 6336R^{ab}RR_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} \\
& +14256R^{;a}{}_{;a}\ R^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 19440R^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 5280R\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} \\
& + 4684080R^2R_{ac;b}R^{ab;c} + 2580132R^2R_{ab;c}R^{ab;c} + \ 7872RR_{;a;b;c}R^{ab;c} \\
& + 19558344R^{ab}RR_{ab;c}R^{;c} + 5396424R_{ab}R^{ab}R_{;c}R^{;c} + \ 6240R^{ab}R_{;a;b;c}R^{;c} \\
& -31104R^{ab}R_{;b;c}R_{;a}{}^{;c} + \ 7104R_{;a;b;c}R^{;a;b;c} + 1822080R^{ab}R^{cd}R_{;a}\ R_{bc;d} \\
& -859920RR^{abcd}R_{;a}R_{bc;d} + 2472096R^{ab}R^{cd}\ R_a{}^e{}_{;c}R_{be;d} - 1651104R^{ab}R^{cd}R_a{}^e{}_{;b}\ R_{ce;d} \\
& -3291264RR^{abcd}R_a{}^e{}_{;b}R_{ce;d} - 349824\ R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}R_{;b}R_{ef;d} \\
& -5280R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_{ce;b}R_{;d} - 3247104R^{ab}R_a{}^{cde}R_{be;c}R_{;d} - 736536\ R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_{;c}R_{;d} \\
& +39168R_a{}^e{}_c{}^f\ R^{abcd}R^{gh}{}_{;b}R_{egfh;d} - 221376R^{ab}R^{cd}RR_{ac;b;d}\ + 215712R^2R^{abcd}R_{ac;b;d} \\
& +42336R^{abcd}R_{;a;c}\ R_{;b;d} - 21120R_c{}^d{}_{;a}R^{ab;c}R_{;b;d} + 6528\ R_a{}^d{}_{;c}R^{ab;c}R_{;b;d} \\
& +173280R^{ab}R^{cd}R\ R_{ab;c;d} - 96192R^{ab}R^{cd}R_a{}^e{}_b{}^f\ R_{ef;c;d} + 667392R_a{}^cR^{ab}R_b{}^dR_{;c;d} \\
& -310128\ R_{ab}R^{ab}R^{cd}R_{;c;d} - 179904R^{ab}RR_a{}^c{}_b{}^d\ R_{;c;d} + 1056R^{ab}R^{cd}{}_{;a}R_{;b;c;d} \\
& +2400R^{ab}R^{cd}\ R_{;a;b;c;d} - 69384RR^{ab;c}{}_{;c}R_{ab}{}^{;d}{}_{;d} - 178848\ R^{ab}R^{;c}{}_{;c}R_{ab}{}^{;d}{}_{;d} \\
& +301824R_a{}^cR^{ab}R\ R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} + 48288R^{bc}{}_{;a}R^{;a}R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} - 108672R^{;a}\ R_a{}^{b;c}R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} \\
& +6528R^{ab}R_{;a}{}^{;c}R_{bc}{}^{;d}{}_{;d}\ - 103488R_a{}^cR^{ab}R_{bc}R^{;d}{}_{;d} + 211152R_{ac;b}\ R^{ab;c}R^{;d}{}_{;d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-124176 R_{ab;c} R^{ab;c} R^{;d}{}_{;d} - 10560\ R R^{ab;c} R_{ac;b}{}^{;d}{}_{;d} + 10560 R^{ab} R^{;c}\ R_{ac;b}{}^{;d}{}_{;d} \\
&-607680\ R R^{ab;c} R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} - 634560 R^{ab} R^{;c}\ R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} + 10656 R^{;a;b;c} R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
&+33888\ R^{ab} R_a{}^c{}_{;b} R_{;c}{}^{;d}{}_{;d} - 642144 R^{ab} R_{ab}{}^{;c}\ R_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 14400 R^{ab;c} R_{;a;b;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
&-99984\ R^{ab} R R_{ab}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 3456 R^{;a;b}\ R_{ab}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} - 58824 R_{ab} R^{ab} R^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
&+7200\ R^{ab} R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 1800\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 359040 R^{ab} R^{cd}\ R_{acb}{}^e R_{;e;d} \\
&+188928 R^{ab} R^{cd} R_{ac}{}^{ef}\ R_{be;f;d} + 768 R^{ab} R^{cd} R_a{}^e{}_c{}^f R_{be;f;d}\ - 120576 R^{ab} R^{cd} R_a{}^e{}_b{}^f R_{ce;f;d} \\
&-908832\ R^{ab;c} R_{;c;d} R_{ab}{}^{;d} + 4992 R^{ab;c} R_{;b;d}\ R_{ac}{}^{;d} - 10000416 R^{ab} R R_{cd;b} R_a{}^{c;d} \\
&-9098544 R^{ab}\ R R_{bd;c} R_a{}^{c;d} - 10746912 R^{ab} R R_{bc;d}\ R_a{}^{c;d} - 11712 R^{ab} R_{;b;c;d} R_a{}^{c;d} \\
&+74016\ R^{;a} R_{bd;a;c} R^{bc;d} - 382080 R^{;a} R_{ad;b;c}\ R^{bc;d} - 1763424 R^{;a} R_{bc;a;d} R^{bc;d} \\
&+145056 R^{;a}\ R_{ab;c;d} R^{bc;d} - 6241920 R_a{}^c R^{ab} R_{bd;c} R^{;d}\ - 21437712 R_a{}^c R^{ab} R_{bc;d} R^{;d} \\
&+31056 R R_{cd;a;b}\ R^{ab;c;d} - 172224 R R_{ac;b;d} R^{ab;c;d} - 358128 R\ R_{ab;c;d} R^{ab;c;d} \\
&+8640 R_{;a;b;c;d}\ R^{ab;c;d} + 24480 R^{ab} R_{cd;a;b} R^{;c;d} + 5376 R^{ab}\ R_{ac;b;d} R^{;c;d} \\
&-1028256 R^{ab} R_{ab;c;d} R^{;c;d} +\ 2323680 R^{ab} R_a{}^{cde} R_{;d} R_{bc;e} + 5065152 R^{ab}\ R_a{}^{cde} R_b{}^f{}_{;d} R_{cf;e} \\
&+33120 R_{ab}{}^{ef} R^{abcd}\ R_{fg;d} R_c{}^g{}_{;e} - 5450112 R^{ab} R_a{}^{cde} R_b{}^f{}_{;c}\ R_{df;e} \\
&+86016 R_a{}^c R^{ab} R^{de} R_{bd;c;e} - 10368 R^{ab} R\ R_a{}^{cde} R_{bd;c;e} - 15648 R^{de}{}_{;c} R^{ab;c}\ R_{ab;d;e} \\
&-39552 R_a{}^c R^{ab} R^{de} R_{bc;d;e} + 23616\ R_a{}^d{}_b{}^e{}_{;c} R^{ab;c} R_{;d;e} + 61824 R^{abcd}\ R_a{}^e{}_{;c} R_{;b;d;e} \\
&+211776 R^{ab} R_a{}^{c;d}{}_{;d}\ R_{bc}{}^{;e}{}_{;e} + 14400 R^{abcd} R_{;a;c} R_{bd}{}^{;e}{}_{;e} - 418560\ R_c{}^d{}_{;a} R^{ab;c} R_{bd}{}^{;e}{}_{;e} \\
&+229152 R_a{}^d{}_{;c}\ R^{ab;c} R_{bd}{}^{;e}{}_{;e} + 198336 R^{ab;c} R_{ac}{}^{;d}\ R_{bd}{}^{;e}{}_{;e} + 960 R_a{}^c R^{ab} R_b{}^d R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-\ 206976 R_{ab} R^{ab} R^{cd} R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} + 12960 R^{ab} R\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} + 81696 R^{ab} R^{cd}{}_{;a;b}\ R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-388368 R^{ab;c} R_{ab}{}^{;d} R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} - 192000\ R^{ab} R_a{}^c{}_{;b}{}^{;d} R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} + 93408 R^{ab} R_{ab}{}^{;c;d}\ R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-129696 R^{ab} R^{cd} R_{acbd} R^{;e}{}_{;e} + 29580 R\ R_{abcd} R^{abcd} R^{;e}{}_{;e} + 119808 R^{abcd} R_{ac;b;d} R^{;e}{}_{;e} \\
&-2736 R^{ab;c}{}_{;c}{}^{;d} R_{ad;b}{}^{;e}{}_{;e} + 23976 R^{ab} R^{cd}{}_{;a}\ R_{cd;b}{}^{;e}{}_{;e} - 42768 R^{ab} R_a{}^{c;d} R_{cd;b}{}^{;e}{}_{;e} \\
&+\ 27648 R^{ab;c;d} R_{cd;a;b}{}^{;e}{}_{;e} + 26352 R^{ab}\ R_a{}^{c;d} R_{bd;c}{}^{;e}{}_{;e} - 1368 R^{ab;c}{}_{;c}{}^{;d}\ R_{ab;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-91632 R^{ab} R^{cd}{}_{;a} R_{bc;d}{}^{;e}{}_{;e} -\ 16416 R^{abcd} R_{;a} R_{bc;d}{}^{;e}{}_{;e} + 1728624 R^{ab} R_a{}^{c;d}\ R_{bc;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&+18912 R^{abcd} R_{ac;b} R_{;d}{}^{;e}{}_{;e} - 60672\ R^{ab} R^{cd} R_{ac;b;d}{}^{;e}{}_{;e} + 48576 R R^{abcd}\ R_{ac;b;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-62208 R^{ab;c;d}\ R_{ac;b;d}{}^{;e}{}_{;e} + 51072 R^{ab} R^{cd} R_{ab;c;d}{}^{;e}{}_{;e} +\ 27648 R^{ab;c;d} R_{ab;c;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&+24192 R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{;c;d}{}^{;e}{}_{;e} - 2448 R^{ab;c}{}_{;c}\ R_{ab}{}^{;d}{}_{;d}{}^{;e}{}_{;e} + 132288 R_a{}^c R^{ab}\ R_{bc}{}^{;d}{}_{;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-2880 R^{ab;c} R_{ac;b}{}^{;d}{}_{;d}{}^{;e}{}_{;e}\ - 1440 R^{ab;c} R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d}{}^{;e}{}_{;e} - 960 R^{ab}\ R_{ab}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d}{}^{;e}{}_{;e} \\
&-5862720 R^{ab} R^{cd} R_{ce;d}\ R_{ab}{}^{;e} - 8640336 R^{ab} R^{cd} R_{cd;e} R_{ab}{}^{;e} + 5012928 R^{ab}\ R^{cd} R_{be;d} R_{ac}{}^{;e} \\
&-7426464 R R^{abcd} R_{be;d} R_{ac}{}^{;e} +\ 8810064 R^{ab} R^{cd} R_{bd;e} R_{ac}{}^{;e} + 1798176 R R^{abcd}\ R_{bd;e} R_{ac}{}^{;e}
\end{aligned}
$$

$$+30144R^{abcd}R_{;b;d;e}R_{ac}{}^{;e} + \ 792000R^{ab;c}R_{ce;b;d}R_{a}{}^{d;e} - 153792R^{ab;c}\ R_{be;c;d}R_{a}{}^{d;e}$$
$$+2651328R^{ab;c}R_{bd;c;e}\ R_{a}{}^{d;e} - 341952R^{ab;c}R_{bc;d;e}R_{a}{}^{d;e} + \ 8320800R_{a}{}^{c}R^{ab}R_{de;c}R_{b}{}^{d;e}$$
$$+9750384R_{a}{}^{c}\ R^{ab}R_{ce;d}R_{b}{}^{d;e} + 11572176R_{a}{}^{c}R^{ab}R_{cd;e}\ R_{b}{}^{d;e} + 193920R_{de;a;b}R^{ab;c}R_{c}{}^{d;e}$$
$$-\ 197568R^{ab;c}R_{ae;b;d}R_{c}{}^{d;e} - 194112R^{ab;c}\ R_{ad;b;e}R_{c}{}^{d;e} + 95424R^{ab;c}R_{ab;d;e}\ R_{c}{}^{d;e}$$
$$-7634784R_{ab}R^{ab}R_{ce;d}R^{cd;e} - 4831872\ R^{ab}RR_{acbe;d}R^{cd;e} + 40320R^{ab}R_{ce;a;b;d}\ R^{cd;e}$$
$$-42240R^{ab}R_{ae;b;c;d}R^{cd;e} - 1655496R_{ab}\ R^{ab}R_{cd;e}R^{cd;e} - 3366432R^{ab}RR_{acbd;e}R^{cd;e}$$
$$+\ 442176R^{ab}R_{cd;a;b;e}R^{cd;e} - 931584R^{ab}\ R_{ac;b;d;e}R^{cd;e} + 467328R^{ab}R_{ab;c;d;e}\ R^{cd;e}$$
$$-2592384R^{ab}R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d}R_{ce;d}R^{;e} - \ 4124208R^{ab}R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d}R_{cd;e}R^{;e} + 241398R_{abcd}\ R^{abcd}R_{;e}R^{;e}$$
$$-836028RR^{abcd}R_{abcd;e}R^{;e} - 3149568\ R^{ab}R^{cd}R_{acbd;e}R^{;e} + 301248R^{abcd}R_{ac;b;d;e}\ R^{;e}$$
$$+146592R^{;a}R_{ce;b;d}R_{a}{}^{bcd;e} - 101664R^{;a}\ R_{bc;d;e}R_{a}{}^{bcd;e} - 43776R^{ab;c}R_{;d;e}\ R_{acb}{}^{d;e}$$
$$+26880R^{ab}R_{;c;d;e}\ R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d;e} + 171594R^{2}R_{abcd;e}R^{abcd;e} + \ 273984RR_{ac;b;d;e}R^{abcd;e}$$
$$+32832R^{ab}R_{cd;b;e}\ R^{cd}{}_{;a}{}^{;e} - 36864R^{abcd}R_{bc;d;e}R_{;a}{}^{;e} + 63360R^{ab}\ R_{de;b;c}R_{a}{}^{c;d;e}$$
$$-195840R^{ab}R_{cd;b;e}\ R_{a}{}^{c;d;e} + 161664R^{ab}R_{bd;c;e}R_{a}{}^{c;d;e}\ + 1341120R^{ab}R_{bc;d;e}R_{a}{}^{c;d;e}$$
$$+42624\ R_{cd;a;b;e}R^{ab;c;d;e} - 87552R_{ac;b;d;e}\ R^{ab;c;d;e} + 43008R_{ab;c;d;e}R^{ab;c;d;e}$$
$$+\ 1156512R^{ab}R^{cdef}R_{ac;e}R_{bd;f} + 1191168R^{ab}R^{cdef}\ R_{ac;b}R_{de;f} - 1375296R^{ab}R^{cdef}R_{ab;c}R_{de;f}$$
$$-\ 470544R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{;c}R_{de;f} - 33120R_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{c}{}^{g}{}_{;e}R_{dg;f} - 89472R_{a}{}^{e}{}_{c}{}^{f}\ R^{abcd}R_{b}{}^{g}{}_{;d}R_{eg;f}$$
$$+134880R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{c}{}^{g}{}_{;d}R_{eg;f} + 3409920R^{ab}R^{cdef}R_{c}{}^{g}{}_{;d}\ R_{aebg;f} + 341952R^{ab}R^{cdef}R_{;a}R_{bcde;f}$$
$$-356832\ R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{c}{}^{ghi}{}_{;e}R_{dghi;f} + 356832\ R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{c}{}^{ghi}{}_{;d}R_{eghi;f}$$
$$+540672R_{a}{}^{c}R^{ab}\ R_{b}{}^{def}R_{ce;d;f} - 278976R_{ab}R^{ab}R^{cdef}\ R_{ce;d;f} + 16128R^{ab}RR^{cdef}R_{acbe;d;f}$$
$$+34560R^{ab}\ R^{cdef}R_{ce;a;b;d;f} - 19584RR_{a}{}^{e}{}_{c}{}^{f}\ R^{abcd}R_{bd;e;f} + 86976R^{ab}R^{cd}R_{a}{}^{e}{}_{b}{}^{f}\ R_{cd;e;f}$$
$$+142656R^{ab}R_{a}{}^{cde}R_{bcd}{}^{f}R_{;e;f} - \ 167424R^{ab}R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d}R_{c}{}^{e}{}_{d}{}^{f}R_{;e;f} + \ 26496R^{ab}R^{cd}R^{ef}R_{acbd;e;f}$$
$$-2304R^{abcd}R^{ef}{}_{;a}\ R_{bc;d;e;f} + 1920R_{a}{}^{e}{}_{c}{}^{f}R^{abcd}\ R_{;b;d;e;f} + 75744R^{abcd}R_{ac}{}^{;e}{}_{;e}R_{bd}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$+\ 768R^{ab}R^{cd}R_{acb}{}^{e}R_{de}{}^{;f}{}_{;f} - 302400\ R_{a}{}^{d}{}_{b}{}^{e}{}_{;c}R^{ab;c}R_{de}{}^{;f}{}_{;f} + 1066560\ R^{ab;c}R_{acb}{}^{d;e}R_{de}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$-81024R^{abcd}\ R_{ac;b}{}^{;e}R_{de}{}^{;f}{}_{;f} + 25560R_{abcd;e}R^{abcd;e}\ R^{;f}{}_{;f} - 43008R^{abcd}R_{ac}{}^{;e}R_{be;d}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$-27936\ R^{abcd}R_{a}{}^{e}{}_{;b}R_{ce;d}{}^{;f}{}_{;f} + 93888R^{ab}\ R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d;e}R_{ce;d}{}^{;f}{}_{;f} - 88608R^{abcd}\ R_{a}{}^{e}{}_{;c}R_{bd;e}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$+522048R^{abcd}R_{ac}{}^{;e}\ R_{bd;e}{}^{;f}{}_{;f} + 379392R^{ab}R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d;e}\ R_{cd;e}{}^{;f}{}_{;f} + 68760R^{abcd}R_{abcd}{}^{;e}R_{;e}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$+69888\ R^{ab}R_{a}{}^{cde}R_{bd;c;e}{}^{;f}{}_{;f} + 43200R^{abcd;e}\ R_{ac;b;d;e}{}^{;f}{}_{;f} + 67488R^{ab}R_{a}{}^{c}{}_{b}{}^{d}\ R_{cd}{}^{;e}{}_{;e}{}^{;f}{}_{;f}$$
$$+8640R_{abcd}R^{abcd}R^{;e}{}_{;e}{}^{;f}{}_{;f} + \ 9600R^{abcd}R_{ac;b;d}{}^{;e}{}_{;e}{}^{;f}{}_{;f} - 246528R_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{ce}{}^{gh}R_{dg;h;f}$$
$$+116160R^{ab}R^{cd}R_{cedf;b}\ R_{a}{}^{e;f} - 791424R^{ab}R^{cd}R_{bcdf;e}R_{a}{}^{e;f} + \ 806304RR^{abcd}R_{bfcd;e}R_{a}{}^{e;f}$$
$$+2304R^{abcd}\ R_{cf;b;d;e}R_{a}{}^{e;f} + 172800R^{abcd}\ R_{bc;d;e;f}R_{a}{}^{e;f} - 1258752R^{ab}R_{a}{}^{cde}\ R_{df;e}R_{bc}{}^{;f}$$

$$
\begin{aligned}
&+5230464R^{ab}R_a{}^{cde}R_{cf;e}\ R_{bd}{}^{;f} - 4805376R^{ab}R_a{}^{cde}R_{ef;b}R_{cd}{}^{;f} + 1174080\ R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_{ef;d}R_c{}^{e;f}\\
&+5089056R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^dR_{df;e}R_c{}^{e;f} - 6984576R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^dR_{de;f}R_c{}^{e;f} + 7328064R_a{}^c\ R^{ab}R_{bdcf;e}R^{de;f}\\
&+960R^{ab;c}R_{acbf;d;e}\ R^{de;f} - 1192224R_a{}^cR^{ab}R_{bdce;f}R^{de;f} + 643680\ R^{ab;c}R_{adbe;c;f}R^{de;f}\\
&-139200R^{ab;c}\ R_{acbd;e;f}R^{de;f} + 1522176R^{ab}R_a{}^{cde}R_{bdcf;e}\ R^{;f} + 125064R^{abcd;e}R_{;e;f}R_{abcd}{}^{;f}\\
&+1029888R^{ab;c}\ R_{df;b;e}R_{ac}{}^{de;f} - 668160R^{ab;c}R_{bd;e;f}\ R_{ac}{}^{de;f} - 1588704R^{ab}RR_{bdcf;e}R_a{}^{cde;f}\\
&+\ 171840R^{ab}R_{df;b;c;e}R_a{}^{cde;f} + 32448R^{ab}\ R_{bd;c;e;f}R_a{}^{cde;f} + 590400R^{ab;c}\ R_{cf;d;e}R_a{}^d{}_b{}^{e;f}\\
&+1569024R^{ab;c}\ R_{de;c;f}R_a{}^d{}_b{}^{e;f} - 140544R^{ab;c}\ R_{cd;e;f}R_a{}^d{}_b{}^{e;f} + 126720R^{ab;c}\ R_{bf;d;e}R_a{}^d{}_c{}^{e;f}\\
&-260352R^{ab;c}\ R_{bd;e;f}R_a{}^d{}_c{}^{e;f} + 653760R^{;a}\ R_{abcd;e;f}R^{bcde;f} + 176256R^{abcd}R_{cf;d;e}\ R_a{}^e{}_{;b}{}^{;f}\\
&-205056R^{abcd}R_{ce;d;f}\ R_a{}^e{}_{;b}{}^{;f} - 28800R^{abcd}R_{bf;d;e}R_a{}^e{}_{;c}{}^{;f}\ - 9216R^{abcd}R_{ef;b;d}R_{ac}{}^{;e;f}\\
&-96000R^{abcd}\ R_{be;d;f}R_{ac}{}^{;e;f} + 494208R^{abcd}R_{bd;e;f}\ R_{ac}{}^{;e;f} + 32256R^{ab}R_{aebf;c;d}R^{cd;e;f}\\
&+486912\ R^{ab}R_{acbe;d;f}R^{cd;e;f} + 360960R^{ab}R_{acbd;e;f}\ R^{cd;e;f} + 119040R^{abcd}R_{abcd;e;f}R^{;e;f}\\
&+27264R\ R_{abcd;e;f}R^{abcd;e;f} + 69120R_{ac;b;d;e;f}\ R^{abcd;e;f} + 89856R^{ab}R^{cdef}R_c{}^g{}_{;e}R_{adbf;g}\\
&-\ 1777152R^{ab}R_a{}^{cde}R^{fg}{}_{;d}R_{becf;g} - 99840R^{ab}\ R_a{}^{cde}R_{bd}{}^{fg}R_{cf;e;g} + 367872R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^dR_c{}^{efg}R_{df;e;g}\\
&+253440R_a{}^c\ R^{ab}R^{defg}R_{bdcf;e;g} + 6912R_a{}^f{}_c{}^g{}_{;e}\ R^{abcd;e}R_{bd;f;g} + 388608R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_b{}^f{}_d{}^gR_{ce;f;g}\\
&-39456R^{ab}R_{cdef}R^{cdef}\ R_{ab}{}^{;g}{}_{;g} + 378048R^{ab}R_a{}^{cde}R_{bcd}{}^fR_{ef}{}^{;g}{}_{;g}\ + 36096R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_c{}^e{}_d{}^f\ R_{ef}{}^{;g}{}_{;g}\\
&-56664R^{abcd;e}R_{abcd}{}^{;f}R_{ef}{}^{;g}{}_{;g} + 6528\ R^{abcd}R_{abcd;e;f}R^{ef;g}{}_{;g} - 46216R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cdef}R^{;g}{}_{;g}\\
&-47616R^{abcd}R_{abc}{}^{e;f}\ R_{df;e}{}^{;g}{}_{;g} - 76032R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{ce;d;f}{}^{;g}{}_{;g} + 6144R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}\ R_{bd;e;f}{}^{;g}{}_{;g}\\
&+912000R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}\ R_{eg;f}R_{bd}{}^{;g} + 2898720R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}\ R_{ef;g}R_{bd}{}^{;g} + 493920R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{dg;f}\ R_{ce}{}^{;g}\\
&-1507920R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{df;g}R_{ce}{}^{;g} -\ 6791232R^{ab}R^{cdef}R_{adbf;g}R_{ce}{}^{;g} - 1821696R^{ab}\ R_a{}^{cde}R_{bfcg;e}R_d{}^{f;g}\\
&-3264960R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_{bceg;f}R_d{}^{f;g} + 4651392R^{ab}R_a{}^{cde}R_{becg;f}\ R_d{}^{f;g} - 23185728R^{ab}R_a{}^{cde}R_{bcef;g}\ R_d{}^{f;g}\\
&+10610304R^{ab}R_a{}^{cde}R_{becf;g}\ R_d{}^{f;g} + 155208R_{abcd}R^{abcd}R_{eg;f}R^{ef;g} + 3936192\ R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_{cedg;f}R^{ef;g}\\
&-487944R_{abcd}\ R^{abcd}R_{ef;g}R^{ef;g} - 2938176R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^d\ R_{cedf;g}R^{ef;g} + 9600R^{abcd}R_{abcd;e;f;g}R^{ef;g}\\
&-326592R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{cdef;g}R^{;g} - 482112R^{abcd;e}\ R_{de;f;g}R_{abc}{}^{f;g} - 474864RR^{abcd}R_{cdef;g}\ R_{ab}{}^{ef;g}\\
&-747648R^{abcd}R_{ce;d;f;g}R_{ab}{}^{ef;g}\ + 361008R^{ab}R^{cd}R_{bdef;g}R_{ac}{}^{ef;g} + 345600R^{ab;c}\ R_{becg;d;f}R_a{}^{def;g}\\
&+293760R^{ab;c}R_{bcde;f;g}\ R_a{}^{def;g} - 838176R^{ab}R^{cd}R_{cedf;g}\ R_a{}^e{}_b{}^{f;g} - 1536R^{abcd}R_{bg;d;e;f}\ R_a{}^e{}_c{}^{f;g}\\
&+16896R^{abcd}R_{bd;e;f;g}\ R_a{}^e{}_c{}^{f;g} + 3496512R_a{}^cR^{ab}R_{cedg;f}\ R_b{}^{def;g} + 17280R^{ab;c}R_{aebg;d;f}R_c{}^{def;g}\\
&-293028R_{ab}R^{ab}R_{cdef;g}R^{cdef;g} + 48000R^{ab}\ R_{acbe;d;f;g}R^{cdef;g} + 251904R^{abcd}R_{bfcd;e;g}\ R_a{}^{e;f;g}\\
&+396288R^{ab}R_{bdcf;e;g}\ R_a{}^{cde;f;g} + 4800R_{abcd;e;f;g}\ R^{abcd;e;f;g} + 1459200R^{abcd}R^{efgh}R_{ae;b}R_{cdfg;h}\\
&+123264R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{cd}{}^{gh}R_{eg;f;h} + 81216\ R_{abcd}R^{abcd}R^{efgh}R_{eg;f;h} + 116736R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_c{}^{fgh}R_{bdeg;f;h}\\
&-98304R^{ab}R_a{}^{cde}R_b{}^{fgh}\ R_{cdeg;f;h} - 12288R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR^{efgh}\ R_{cedg;f;h} - 43008R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_c{}^g{}_e{}^h\ R_{df;g;h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+438768R^{ab}R^{cd}R\ R_a{}^e{}_b{}^f R_{cedf} - \ 526200R_a{}^c R^{ab}R_{;b}R_{;c} + 6856176R^{ab}RR_{ac;b}R^{;c} \\
&+159136R_{ab}R^{ab}\ R_{cd}{}^{gh}R^{cdef}R_{efgh} + 91392R_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{cd}{}^{gh}R_{eg}{}^{ij}R_{fhij} + 191772R^{ab}RR_{;a}R_{;b} \\
&+1367004R_{ab}R^{ab}R_{cd}R^{cd}R + 165312\ R^{ab}R^{cd}R_{ac}{}^{ef}R_{be}{}^{gh}R_{dfgh} + 188288R_a{}^c R^{ab}R_{bc}R_{defg}\ R^{defg} \\
&+763296R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{dhef;g}\ R_c{}^{g;h} + 453600R^{abcd;e}R_{cdef;g;h}R_{ab}{}^{fg;h} \\
&-2542848R^{ab}\ R_a{}^{cde}R_{cfeh;g}R_{bd}{}^{fg;h} + 1998912R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{dfeh;g}R_c{}^{efg;h} \\
&-36864R^{abcd}\ R_{bgdh;e;f}R_a{}^e{}_c{}^{f;g;h} + 314160R^{abcd}\ R^{efgh}R_{efgh;i}R_{abcd}{}^{;i} \\
&+1855296R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R^{ef}{}_{;c}R_{ef;d} + 4167936R^{ab}R^{cdef}R_{defh;g}R_{acb}{}^{g;h} \\
&-156672R^{abcd}\ R_{cdef;g;h}R_{ab}{}^{ef;g;h} - 2461824R_a{}^e{}_c{}^f\ R^{abcd}R_{egfh;i}R_b{}^g{}_d{}^{h;i} \\
&+9216R^{ab;c}{}_{;c}R_{;a;b}{}^{;d}{}_{;d} + 356832R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{fghi;d}R_c{}^{ghi}{}_{;e} - 426240R\ R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{ce;d;f} \\
&+35856R_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{efgh;i}R_{cd}{}^{gh;i} + 202356R_{abcd}R^{abcd}\ R_{efgh;i}R^{efgh;i}\Big],
\end{aligned}
\tag{437}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5^{(1)} \;=\; & \frac{1}{1814400}\Big[32736R_a{}^cR^{ab}R_b{}^dR_{cd}R - 8436R_{ab}R^{ab}R_{cd}\ R^{cd}R - 59136R_a{}^cR^{ab}R_{bc}R^2 \\
& - 5743R^5 - 13944R^{ab}R^{cd}R^2R_{acbd} - 3618R^3R_{abcd}R^{abcd} - 168R^{ab}R^{cd}RR_{ac}{}^{ef}R_{bdef} \\
& +4480R^2R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cdef} - 14832R^{ab}R^{cd}RR_a{}^e{}_b{}^fR_{cedf} + 3282\ R_{ab}R^{ab}RR_{cdef}R^{cdef} \\
& +2496RR_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{ce}{}^{gh}R_{dfgh} - 1248RR_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{cd}{}^{gh}R_{efgh} \\
& -5064R^3R^{;a}{}_{;a} - 22052\ R^2R_{;a}R^{;a} - 1440R^{ab}RR^{cd}{}_{;a}R_{cd;b} + 7520R^{ab}\ R^{cd}R_{;a}R_{cd;b} \\
& +1240R^{ab}RR_{;a}R_{;b} - 6696R^{ab}R^2\ R_{;a;b} - 816R^{ab}R_{cdef}R^{cdef}R_{;a;b} - 2880RR^{;a}{}_{;a}\ R^{;b}{}_{;b} \\
& -3156R_{;a}R^{;a}R^{;b}{}_{;b} - 7080RR^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b} - 1604R^2R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b} - 3880R^{;a}R_{;a;b}R^{;b} \\
& -360R_a{}^cR^{ab}R_{;b}R_{;c} + 13888\ R_a{}^cR^{ab}RR_{;b;c} - 3840R^{bc}{}_{;a}R^{;a}R_{;b;c} + 18000R^{ab}R^2R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} \\
& +1800R^{;a}R^{;b}R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} - 720\ RR^{;a;b}R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} + 16440R_{ab}R^{ab}RR^{;c}{}_{;c} - 1008\ R^{ab}R_{;a;b}R^{;c}{}_{;c} \\
& +2480R^{ab}R_{;a}R_{;b}{}^{;c}{}_{;c} - 2640\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}R_{;b}{}^{;c}{}_{;c} - 1264R^{ab}RR_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} - 3792R^{;a;b}R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} \\
& -2088R^{;a}{}_{;a}\ R^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} - 2760R^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} - 840R\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 7952R^{;a}R_{;b;c}R_a{}^{b;c} \\
& +2160R^2R_{ac;b}R^{ab;c} + 28920R^2R_{ab;c}R^{ab;c} - 1200R\ R_{;a;b;c}R^{ab;c} + 2864R^{ab}RR_{ac;b}R^{;c} \\
& +100256\ R^{ab}RR_{ab;c}R^{;c} + 19152R_{ab}R^{ab}R_{;c}R^{;c} - 1360R^{ab}\ R_{;a;b;c}R^{;c} + 3328R^{ab}R_{;b;c}R_{;a}{}^{;c} \\
& -960\ R_{;a;b;c}R^{;a;b;c} - 8480R^{ab}R^{cd}R_{;a}R_{bc;d} - 1600RR^{abcd}R_{;a}R_{bc;d} + 1920RR^{abcd}R_a{}^e{}_{;b}\ R_{ce;d} \\
& -4800R_a{}^e{}_c{}^fR^{abcd}R_{;b}R_{ef;d} - 2640\ R^{ab}R_a{}^{cde}R_{ce;b}R_{;d} + 11840R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_{be;c}R_{;d} \\
& +2640R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_{;c}R_{;d} + 11136R^{ab}R^{cd}RR_{ac;b;d} - 8352R^2R^{abcd}R_{ac;b;d} - 2376R\ R_{;a;b}R^{;a;b} \\
& -5856R^{abcd}R_{;a;c}R_{;b;d} + 1440R_c{}^d{}_{;a}R^{ab;c}\ R_{;b;d} - 480R_a{}^d{}_{;c}R^{ab;c}R_{;b;d} + 43518R_{ab}R^{ab}R^3 \\
& -10464R^{ab}\ R^{cd}RR_{ab;c;d} - 12352R_a{}^cR^{ab}R_b{}^dR_{;c;d} + 7056R_{ab}R^{ab}R^{cd}R_{;c;d} \\
& +1184R^{ab}R\ R_a{}^c{}_b{}^dR_{;c;d} - 80R^{ab}R^{cd}{}_{;a}R_{;b;c;d} - 160R^{ab}R^{cd}R_{;a;b;c;d} + 216RR^{ab;c}{}_{;c}\ R_{ab}{}^{;d}{}_{;d} \\
& +1248R^{ab}R^{;c}{}_{;c}R_{ab}{}^{;d}{}_{;d} - 23904\ R_a{}^cR^{ab}RR_{bc}{}^{;d}{}_{;d} + 240R^{bc}{}_{;a}R^{;a}\ R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} + 384R^{;a}R_a{}^{b;c}R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} \\
& -480R^{ab}\ R_{;a}{}^{;c}R_{bc}{}^{;d}{}_{;d} - 8608R_a{}^cR^{ab}R_{bc}R^{;d}{}_{;d} + 240R_{ac;b}R^{ab;c}R^{;d}{}_{;d} + 600R_{ab;c}R^{ab;c}\ R^{;d}{}_{;d} \\
& +480RR^{ab;c}R_{ac;b}{}^{;d}{}_{;d} + 480R^{ab}R^{;c}\ R_{ac;b}{}^{;d}{}_{;d} - 624R^{ab;c}{}_{;c}R_{;a;b}{}^{;d}{}_{;d} + 240R\ R^{ab;c}R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
& +240R^{ab}R^{;c}R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} - 720R^{;a;b;c}R_{ab;c}{}^{;d}{}_{;d} + 640R^{ab}R_a{}^c{}_{;b}\ R_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 1200R^{ab}R_{ab}{}^{;c}R_{;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
& -960R^{ab;c}\ R_{;a;b;c}{}^{;d}{}_{;d} + 240R^{ab}RR_{ab}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} - 240\ R^{;a;b}R_{ab}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} + 584R_{ab}R^{ab}\ R^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} \\
& -480R^{ab}R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} - 120\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c}{}^{;d}{}_{;d} - 2240R^{ab}R^{cd}R_{acb}{}^e\ R_{;e;d} - 80R^{ab;c}R_{;c;d}R_{ab}{}^{;d} \\
& -640R^{ab;c}\ R_{;b;d}R_{ac}{}^{;d} + 7680R^{ab}RR_{cd;b}R_a{}^{c;d} - 4800\ R^{ab}RR_{bd;c}R_a{}^{c;d} - 85440R^{ab}RR_{bc;d}\ R_a{}^{c;d} \\
& +800R^{ab}R_{;b;c;d}R_a{}^{c;d} + 960R^{;a}\ R_{bd;a;c}R^{bc;d} - 480R^{;a}R_{ad;b;c}R^{bc;d} - 480\ R^{;a}R_{bc;a;d}R^{bc;d} \\
& +960R^{;a}R_{ab;c;d}R^{bc;d} - 3840R_a{}^cR^{ab}R_{bd;c}R^{;d} - 47648R_a{}^cR^{ab}\ R_{bc;d}R^{;d} - 1872RR_{cd;a;b}R^{ab;c;d} \\
& +4032R\ R_{ac;b;d}R^{ab;c;d} - 1872RR_{ab;c;d}R^{ab;c;d} - 576R_{;a;b;c;d}R^{ab;c;d} - 1728R^{ab}R_{cd;a;b}\ R^{;c;d} \\
& +4096R^{ab}R_{ac;b;d}R^{;c;d} - 1728R^{ab}\ R_{ab;c;d}R^{;c;d} + 1600R^{ab}R_a{}^{cde}R_{;d}R_{bc;e} - 8448R^{ab}RR_a{}^{cde}R_{bd;c;e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-1920\ R_a{}^d{}_b{}^e{}_{;c}R^{ab;c}R_{;d;e} - 4160R^{abcd}\ R_a{}^e{}_{;c}R_{;b;d;e} - 1440R^{abcd}R_{;a;c}\ R_{bd}{}^{;e}{}_{;e}\\
&-\ 7680R^{ab}R^{cd}R_{acbd}R^{;e}{}_{;e} - 2484RR_{abcd}R^{abcd}\ R^{;e}{}_{;e} - 3648R^{abcd}R_{ac;b;d}R^{;e}{}_{;e}\\
&-640R^{abcd}R_{ac;b}R_{;d}{}^{;e}{}_{;e} -\ 1920RR^{abcd}R_{ac;b;d}{}^{;e}{}_{;e} - 1888R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{;c;d}{}^{;e}{}_{;e}\\
&-27840RR^{abcd}R_{bd;e}R_{ac}{}^{;e} - 2080R^{abcd}\ R_{;b;d;e}R_{ac}{}^{;e} - 14400R^{ab}RR_{acbe;d}R^{cd;e}\\
&-6112R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{ce;d}R^{;e} - 25664R^{ab}\ R_a{}^c{}_b{}^d R_{cd;e}R^{;e} - 2272R_{abcd}R^{abcd}R_{;e}\ R^{;e}\\
&-14560R^{ab}R^{cd}\ R_{acbd;e}R^{;e} - 3840R^{abcd}R_{ac;b;d;e}R^{;e} - 3744\ R^{;a}R_{ce;b;d}R_a{}^{bcd;e}\\
&-640R^{ab;c}R_{;d;e}R_{acb}{}^{d;e} - 2400\ R^{ab}R_{;c;d;e}R_a{}^c{}_b{}^{d;e} - 696RR_{abcd}R^{abcd}R_{efgh}R^{efgh}\\
&+512R^{abcd}\ R_{bc;d;e}R_{;a}{}^{;e} + 1440R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{;c}R_{de;f}\ - 960R^{ab}R^{cdef}R_{;a}R_{bcde;f}\\
&+14016RR_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{ce;d;f} - 2304R^{ab}RR^{cdef}R_{acbe;d;f} - 384R\ R_a{}^e{}_c{}^f R^{abcd}R_{bd;e;f}\\
&-6912R^{ab}R_a{}^{cde}\ R_{bcd}{}^f R_{;e;f} + 4544R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^d\ R_c{}^e{}_d{}^f R_{;e;f} - 128R_a{}^e{}_c{}^f R^{abcd}\ R_{;b;d;e;f}\\
&-660R_{abcd;e}R^{abcd;e}R^{;f}{}_{;f} - 1120\ R^{abcd}R_{abcd}{}^{;e}R_{;e}{}^{;f}{}_{;f} - 272R_{abcd}R^{abcd}\ R^{;e}{}_{;e}{}^{;f}{}_{;f}\\
&-3136\ R^{ab}R_a{}^{cde}R_{bdcf;e}R^{;f} - 600R^{abcd;e}R_{;e;f}\ R_{abcd}{}^{;f} - 12960R^{ab}RR_{bdcf;e}R_a{}^{cde;f}\\
&-5760R^{;a}\ R_{abcd;e;f}R^{bcde;f} - 640R^{abcd}R_{abcd;e;f}\ R^{;e;f} - 576RR_{abcd;e;f}R^{abcd;e;f}\\
&-12288R^{ab}RR_a{}^c{}_b{}^d R_{cd}{}^{;e}{}_{;e} -\ 34080R^{ab}RR_{acbd;e}R^{cd;e} - 11240RR^{abcd}R_{abcd;e}R^{;e}\\
&+4320R^{;a}R_{bc;d;e}\ R_a{}^{bcd;e} - 5760RR_{ac;b;d;e}R^{abcd;e} - 5760RR^{abcd}R_{bfcd;e}R_a{}^{e;f}\\
&+480R^{abcd}\ R_{;a}R_{bc;d}{}^{;e}{}_{;e} + 7680RR^{abcd}R_{be;d}\ R_{ac}{}^{;e} + 10800RR^{abcd}R_{cdef;g}R_{ab}{}^{ef;g}\\
&+1912\ R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}R_{cdef}R^{;g}{}_{;g} + 7824R_{ab}{}^{ef}R^{abcd}\ R_{cdef;g}R^{;g} - 2700R^2R_{abcd;e}\ R^{abcd;e}\Big],
\end{aligned}
\tag{438}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5^{(2)} \;=\;& \frac{1}{30240}\Big[584R_a{}^cR^{ab}R_{bc}R^2 - 654R_{ab}R^{ab}R^3 + 99R^5 + 456\ R^{ab}R^{cd}R^2R_{acbd}\\
&-80R^2R_{ab}{}^{ef}\ R^{abcd}R_{cdef} + 162R^3R^{;a}{}_{;a} + 257R^2R_{;a}R^{;a} - 300R^{ab}\ RR_{;a}R_{;b}\\
&+238RR^{;a}{}_{;a}R^{;b}{}_{;b} +\ 252R_{;a}R^{;a}R^{;b}{}_{;b} + 588RR^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b} + 138R^2\ R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}\\
&+200RR_{;a;b}\ R^{;a;b} + 90R_a{}^cR^{ab}R_{;b}R_{;c} + 168R^{bc}{}_{;a}R^{;a}\ R_{;b;c} - 24R^{ab}R^2R_{ab}{}^{;c}{}_{;c}\\
&+48RR^{;a;b}R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} - 60R_{ab}R^{ab}R\ R^{;c}{}_{;c} + 56R^{ab}R_{;a;b}R^{;c}{}_{;c} - 102R^{ab}R_{;a}\ R_{;b}{}^{;c}{}_{;c}\\
&+102R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}R_{;b}{}^{;c}{}_{;c} + 72R^{ab}R\ R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} + 144R^{;a;b}R_{;a;b}{}^{;c}{}_{;c} + 84\ R^{;a}{}_{;a}R^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c}\\
&+108R^{;a}R_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} +\ 36RR^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b}{}^{;c}{}_{;c} - 312R^{;a}R_{;b;c}\ R_a{}^{b;c} - 12R^2R_{ac;b}R^{ab;c}\\
&+72RR_{;a;b;c}R^{ab;c} - 48R^{ab}RR_{ac;b}\ R^{;c} - 24R^{ab}RR_{ab;c}R^{;c} - 26R_{ab}R^{ab}R_{;c}R^{;c}\\
&-128R^{ab}R_{;b;c}R_a{}^{;c} + 36\ R_{;a;b;c}R^{;a;b;c} - 48RR^{abcd}R_{;a}R_{bc;d} + 48\ R^{ab}R_a{}^c{}_b{}^dR_{;c}R_{;d}\\
&+144R^2R^{abcd}\ R_{ac;b;d} + 224R^{abcd}R_{;a;c}R_{;b;d} + 144R^{ab}R\ R_a{}^c{}_b{}^dR_{;c;d}\\
&+72R^3R_{abcd}R^{abcd} - 72R^{;a}R^{;b}\ R_{ab}{}^{;c}{}_{;c} - 6R^2R_{ab;c}\ R^{ab;c} + 60R^{ab}R^2R_{;a;b}\\
&+312R^{;a}R_{;a;b}R^{;b} + 72\ R^{ab}R_{;a;b;c}R^{;c} + 36RR_{abcd}R^{abcd}R^{;e}{}_{;e}\\
&+17\ R_{abcd}R^{abcd}R_{;e}R^{;e} + 72RR^{abcd}R_{abcd;e}R^{;e} + 27R^2\ R_{abcd;e}R^{abcd;e}\Big],
\end{aligned}
\tag{439}
$$

$$
\begin{aligned}
a_5^{(3)} &= \frac{1}{2160}\Big[2R_{ab}R^{ab}R^3 - 5R^5 - 2R^3R_{abcd}R^{abcd} - 42R^3R^{;a}{}_{;a} - \ 66R^2R_{;a}R^{;a} + 36R^{ab}RR_{;a}R_{;b} \\
&\quad -12R^{ab}R^2R_{;a;b} - 30RR^{;a}{}_{;a}R^{;b}{}_{;b} - 30R_{;a}R^{;a}R^{;b}{}_{;b} - 72RR^{;a}\ R_{;a}{}^{;b}{}_{;b} - 18R^2R^{;a}{}_{;a}{}^{;b}{}_{;b} \\
&\quad -36R^{;a}R_{;a;b}\ R^{;b} - 24RR_{;a;b}R^{;a;b}\Big], \qquad (440)\\
a_5^{(4)} &= \frac{1}{144}\left[R^5 + 4R^3R^{;a}{}_{;a} + 6R^2R_{;a}R^{;a}\right], \qquad (441)\\
a_5^{(5)} &= -\frac{1}{120}R^5. \qquad (442)
\end{aligned}
$$

8.4 Funkcje $C_a^{(i)b}$ oraz $D_a^{(i)b}$

Elementy składowe $T_a^{(1)b}$ i $T_a^{(2)b}$ tensora energii-pędu (306) w czasoprzestrzeni Reisnera-Nörsdstroma mogą być zapisane w postaci

$$T_a^{(i)b} = \frac{1}{\pi^2 m^{2i} r^{2(3+i)}}\left(C_a^{(i)b} + \eta D_a^{(i)b}\right), \qquad (443)$$

gdzie $\eta = \xi - 1/6$, natomiast

$$
\begin{aligned}
C_t^{(1)t} &= \frac{3}{112}e^2 - \frac{13}{315}\frac{e^6}{r^4} - \frac{19}{672}M^2 - \frac{4}{105}\frac{Me^2}{r} + \frac{313}{5040}\frac{M^3}{r} - \frac{101}{15120}\frac{e^4}{r^2} - \frac{769}{10080}\frac{M^2e^2}{r^2} \\
&\quad + \frac{257}{2520}\frac{Me^4}{r^3}, \qquad (444)\\
D_t^{(1)t} &= -\frac{11}{10}\frac{M^3}{r} - \frac{7}{5}\frac{Me^2}{r} + \frac{217}{60}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{113}{30}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{91}{90}\frac{e^4}{r^2} + \frac{91}{80}\frac{e^6}{r^4} + \frac{1}{2}M^2, \qquad (445)\\
C_r^{(1)r} &= \frac{1}{96}M^2 + \frac{3}{560}e^2 + \frac{421}{15120}\frac{e^4}{r^2} - \frac{31}{630}\frac{Me^2}{r} - \frac{11}{720}\frac{M^3}{r} + \frac{37}{2520}\frac{e^6}{r^4} + \frac{709}{10080}\frac{M^2e^2}{r^2} \\
&\quad - \frac{23}{360}\frac{Me^4}{r^3}, \qquad (446)\\
D_r^{(1)r} &= \frac{7}{15}\frac{Me^2}{r} - \frac{49}{60}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{13}{45}\frac{e^4}{r^2} - \frac{1}{5}M^2 + \frac{7}{10}\frac{Me^4}{r^3} - \frac{13}{80}\frac{e^6}{r^4} + \frac{3}{10}\frac{M^3}{r}, \qquad (447)\\
C_\theta^{(1)\theta} &= C_\phi^{(1)\phi} = \frac{407}{2520}\frac{Me^2}{r} - \frac{M^2}{32} + \frac{367}{5040}\frac{M^3}{r} + \frac{863}{2520}\frac{Me^4}{r^3} - \frac{761}{7560}\frac{e^4}{r^2} - \frac{367}{1120}\frac{M^2e^2}{r^2} \\
&\quad - \frac{73}{720}\frac{e^6}{r^4} - \frac{9e^2}{560}, \qquad (448)\\
D_\theta^{(1)\theta} &= D_\phi^{(1)\phi} = \frac{91}{20}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{7}{5}\frac{M^3}{r} - \frac{49}{30}\frac{Me^2}{r} - \frac{71}{15}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{52}{45}\frac{e^4}{r^2} + \frac{3}{5}M^2 + \frac{117}{80}\frac{e^6}{r^4}, \qquad (449)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_t^{(2)t} &= -\frac{11}{40}M^2 + \frac{1}{12}e^2 - \frac{255229}{151200}\frac{e^8}{r^6} + \frac{2833}{2100}\frac{M^3}{r} + \frac{41063}{6300}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{157}{350}\frac{Me^2}{r} - \frac{409}{525}\frac{e^4}{r^2} \\
&\quad - \frac{13583}{8400}\frac{M^4}{r^2} + \frac{95839}{12600}\frac{Me^6}{r^5} - \frac{190013}{75600}\frac{e^6}{r^4} - \frac{6131}{1400}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{287009}{25200}\frac{M^2e^4}{r^4} \\
&\quad + \frac{83611}{12600}\frac{M^3e^2}{r^3}, \qquad (450)
\end{aligned}
$$

$$D_t^{(2)t} = \frac{1649}{56}\frac{M^4}{r^2} + \frac{56361}{560}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{2785}{21}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{9}{2}M^2 - \frac{47}{2}\frac{M^3}{r} + \frac{390577}{1680}\frac{M^2e^4}{r^4} - \frac{2251}{15}\frac{Me^6}{r^5} - \frac{594}{35}\frac{Me^2}{r} - \frac{71087}{504}\frac{M^3e^2}{r^3} + \frac{227}{14}\frac{e^4}{r^2} + \frac{20207}{420}\frac{e^6}{r^4} + \frac{41327}{1260}\frac{e^8}{r^6}, \tag{451}$$

$$C_r^{(2)r} = \frac{3}{40}M^2 + \frac{1}{84}e^2 + \frac{34463}{151200}\frac{e^8}{r^6} - \frac{97}{300}\frac{M^3}{r} - \frac{7897}{4725}\frac{Me^4}{r^3} - \frac{239}{700}\frac{Me^2}{r} + \frac{247}{945}\frac{e^4}{r^2} + \frac{2753}{8400}\frac{M^4}{r^2} - \frac{151}{120}\frac{Me^6}{r^5} + \frac{4321}{8400}\frac{e^6}{r^4} + \frac{1531}{1050}\frac{M^2e^2}{r^2} + \frac{11581}{5040}\frac{M^2e^4}{r^4} - \frac{19907}{12600}\frac{M^3e^2}{r^3}, \tag{452}$$

$$D_r^{(2)r} = -\frac{291}{56}\frac{M^4}{r^2} - \frac{34127}{1680}\frac{M^2e^2}{r^2} + \frac{14911}{630}\frac{Me^4}{r^3} - \frac{9}{7}M^2 + \frac{151}{28}\frac{M^3}{r} - \frac{3487}{112}\frac{M^2e^4}{r^4} + \frac{254}{15}\frac{Me^6}{r^5} + \frac{297}{70}\frac{Me^2}{r} + \frac{1567}{72}\frac{M^3e^2}{r^3} - \frac{227}{63}\frac{e^4}{r^2} - \frac{9433}{1260}\frac{e^6}{r^4} - \frac{3757}{1260}\frac{e^8}{r^6}, \tag{453}$$

$$C_\theta^{(2)\theta} = C_\phi^{(2)\phi} = -\frac{3}{10}M^2 - \frac{1}{21}e^2 - \frac{386087}{151200}\frac{e^8}{r^6} + \frac{163}{100}\frac{M^3}{r} + \frac{55159}{5400}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{2101}{1400}\frac{Me^2}{r} - \frac{961}{756}\frac{e^4}{r^2} - \frac{17849}{8400}\frac{M^4}{r^2} + \frac{73417}{6300}\frac{Me^6}{r^5} - \frac{137681}{37800}\frac{e^6}{r^4} - \frac{16657}{2100}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{18259}{1008}\frac{M^2e^4}{r^4} + \frac{138431}{12600}\frac{M^3e^2}{r^3}, \tag{454}$$

$$D_\theta^{(2)\theta} = D_\phi^{(2)\phi} = \frac{485}{14}\frac{M^4}{r^2} + \frac{38663}{336}\frac{M^2e^2}{r^2} - \frac{189871}{1260}\frac{Me^4}{r^3} + \frac{36}{7}M^2 - \frac{1521}{56}\frac{M^3}{r} + \frac{151701}{560}\frac{M^2e^4}{r^4} - \frac{18446}{105}\frac{Me^6}{r^5} - \frac{2673}{140}\frac{Me^2}{r} - \frac{41513}{252}\frac{M^3e^2}{r^3} + \frac{1135}{63}\frac{e^4}{r^2} + \frac{9869}{180}\frac{e^6}{r^4} + \frac{48841}{1260}\frac{e^8}{r^6}. \tag{455}$$

8.5 D-wymiarowe obiekty krzywiznowe w pierwszym rzędzie przybliżenia

Tensory Riemanna liczone z dokładnością pierwszego rzędu w ε i wykorzystywane do obliczeń entropii (393) to:

$$R_{ti}{}^{tj} = R_{ri}{}^{rj} = -\frac{(d-1)}{2r_+^2}\delta_i^j + \varepsilon b_3 \frac{(d-2)(d-1)(d+1)}{2ar_+^4}\delta_i^j + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{456}$$

$$R_{ij}{}^{kl} = \frac{1}{r_+^2}\left(\delta_i^k\delta_j^l - \delta_i^l\delta_j^k\right) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{457}$$

$$R_{tr}{}^{tr} = \frac{d(d-1)}{2r_+^2} - \varepsilon b_3 \frac{3(d-2)(d-1)d(d+1)}{2ar_+^4} + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{458}$$

$$R_t^t = R_r^r = -\varepsilon b_3 \frac{(d-2)(d-1)d(d+1)}{2ar_+^4} + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{459}$$

$$R = -\varepsilon b_3 \frac{(d-2)(d-1)d(d+1)}{2ar_+^4} + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{460}$$

gdzie i, j, k, l=2,...,$d+1$.

8.6 Składowa $T_a^{(2)b}$

Składowa tensora energii-pędu $T_a^{(2)b}$ pochodząca od współczynnika $[a_4]$ dla czasoprzestrzeni opisanej metryką

$$ds^2 = -f(r)\,dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{461}$$

wynosi

$$T_a^{(2)b} = \frac{1}{32\pi^2 m^4}\sum_{i=0}^{4}\mathcal{T}_a^{(i)b}\xi^i, \tag{462}$$

gdzie funkcje $\mathcal{T}_a^{(i)b}$ mają postać

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_t^{(0)t} = {} & \frac{964f^4}{945r^8} + \frac{f^{(8)}f^3}{630} + \frac{17f^{(7)}f^3}{1080r} - \frac{13f^{(6)}f^3}{7560r^2} - \frac{37f^{(5)}f^3}{1260r^3} + \frac{1387f^{(4)}f^3}{6300r^4} - \frac{2683f^{(3)}f^3}{3150r^5} \\
& + \frac{1}{315r^8} + \frac{7321f''f^3}{3150r^6} - \frac{20449f'f^3}{4725r^7} - \frac{{f^{(4)}}^2f^2}{504} + \frac{1}{252}f^{(3)}f^{(5)}f^2 + \frac{19f''f^{(6)}f^2}{1260} + \frac{17f'f^{(7)}f^2}{1260} \\
& + \frac{f^{(3)}f^{(4)}f^2}{70r} + \frac{37f''f^{(5)}f^2}{420r} + \frac{19f'f^{(6)}f^2}{180r} - \frac{103{f^{(3)}}^2f^2}{840r^2} - \frac{253f''f^{(4)}f^2}{1260r^2} - \frac{11f'f^{(5)}f^2}{126r^2} \\
& + \frac{f^{(6)}f^2}{210r^2} + \frac{929f''f^{(3)}f^2}{6300r^3} - \frac{127f'f^{(4)}f^2}{6300r^3} + \frac{f^{(5)}f^2}{90r^3} + \frac{176{f''}^2f^2}{315r^4} + \frac{6473f'f^{(3)}f^2}{6300r^4} - \frac{2f^{(4)}f^2}{15r^4} \\
& - \frac{47f'f''f^2}{10r^5} + \frac{22f^{(3)}f^2}{45r^5} + \frac{5159{f'}^2f^2}{900r^6} - \frac{44f''f^2}{45r^6} + \frac{44f'f^2}{45r^7} - \frac{13f^2}{15r^8} + \frac{1}{210}{f''}^2f^{(4)}f \\
& - \frac{1}{105}f'f^{(3)}f^{(4)}f + \frac{1}{35}f'f''f^{(5)}f + \frac{1}{42}{f'}^2f^{(6)}f - \frac{{f'}^3f^{(3)}}{18r^2} - \frac{13f'{f^{(3)}}^2f}{840r} + \frac{{f''}^2f^{(3)}f}{210r} \\
& + \frac{127f'f''f^{(4)}f}{1260r} + \frac{19{f'}^2f^{(5)}f}{140r} - \frac{11{f''}^3f}{140r^2} - \frac{{f^{(3)}}^2f}{360r^2} - \frac{229f'f''f^{(3)}f}{420r^2} - \frac{149{f'}^2f^{(4)}f}{630r^2} \\
& + \frac{f''f^{(4)}f}{180r^2} + \frac{f'f^{(5)}f}{60r^2} + \frac{2573f'{f''}^2f}{6300r^3} + \frac{577{f'}^2f^{(3)}f}{2100r^3} + \frac{f'f^{(4)}f}{45r^3} - \frac{19{f''}^2f}{90r^4} + \frac{5993{f'}^2f''f}{6300r^4} \\
& - \frac{37f'f^{(3)}f}{90r^4} + \frac{f^{(4)}f}{225r^4} - \frac{1361{f'}^3f}{700r^5} + \frac{17f'f''f}{10r^5} - \frac{f^{(3)}f}{450r^5} - \frac{103{f'}^2f}{60r^6} - \frac{113f''f}{450r^6} + \frac{259f'f}{225r^7} \\
& - \frac{148f}{945r^8} - \frac{{f''}^4}{1680} - \frac{{f'}^2{f^{(3)}}^2}{420} + \frac{1}{420}f'{f''}^2f^{(3)} + \frac{{f'}^3f^{(5)}}{210} + \frac{f'{f''}^3}{630r} - \frac{{f'}^2f''f^{(3)}}{315r} + \frac{{f'}^3f^{(4)}}{63r} \\
& + \frac{{f''}^3}{945r^2} - \frac{37{f'}^2{f''}^2}{1260r^2} - \frac{f'f''f^{(3)}}{315r^2} + \frac{{f'}^2f^{(4)}}{210r^2} + \frac{23{f'}^3f''}{225r^3} + \frac{3{f'}^4}{175r^4} - \frac{{f''}^2}{900r^4} - \frac{4{f'}^2f''}{45r^4} + \frac{f'f^{(3)}}{450r^4} \\
& + \frac{4{f'}^3}{15r^5} - \frac{f'f''}{225r^5} - \frac{26{f'}^2}{225r^6} + \frac{8f'}{945r^7},
\end{aligned} \tag{463}$$

$$\mathcal{T}_t^{(1)t} = -\frac{100f^4}{21r^8} - \frac{f^{(8)}f^3}{70} - \frac{f^{(7)}f^3}{7r} + \frac{2f^{(6)}f^3}{45r^2} + \frac{71f^{(5)}f^3}{210r^3} - \frac{1709f^{(4)}f^3}{630r^4} + \frac{351f^{(3)}f^3}{35r^5}$$
$$- \frac{7517f''f^3}{315r^6} + \frac{1586f'f^3}{45r^7} - \frac{26f^3}{3r^8} + \frac{23{f^{(4)}}^2f^2}{840} - \frac{3}{140}f^{(3)}f^{(5)}f^2 - \frac{11}{84}f''f^{(6)}f^2 - \frac{17}{140}f'f^{(7)}f^2$$
$$+ \frac{127f^{(3)}f^{(4)}f^2}{420r} - \frac{697f''f^{(5)}f^2}{1260r} - \frac{563f'f^{(6)}f^2}{630r} + \frac{77{f^{(3)}}^2f^2}{45r^2} + \frac{3583f''f^{(4)}f^2}{1260r^2} + \frac{823f'f^{(5)}f^2}{630r^2}$$
$$- \frac{23f^{(6)}f^2}{315r^2} - \frac{25f''f^{(3)}f^2}{9r^3} - \frac{79f'f^{(4)}f^2}{315r^3} - \frac{f^{(5)}f^2}{6r^3} - \frac{4183{f''}^2f^2}{630r^4} - \frac{778f'f^{(3)}f^2}{63r^4} + \frac{35f^{(4)}f^2}{18r^4}$$
$$+ \frac{2029f'f''f^2}{35r^5} - \frac{20f^{(3)}f^2}{3r^5} - \frac{4527{f'}^2f^2}{70r^6} + \frac{28f''f^2}{3r^6} + \frac{4f'f^2}{r^7} + \frac{496f^2}{45r^8} + \frac{1}{42}f''{f^{(3)}}^2f$$
$$- \frac{11}{420}{f''}^2f^{(4)}f - \frac{101}{420}f'f''f^{(5)}f - \frac{3}{14}{f'}^2f^{(6)}f + \frac{137f'{f^{(3)}}^2f}{252r} + \frac{13{f''}^2f^{(3)}f}{90r} - \frac{41f'f''f^{(4)}f}{210r}$$
$$- \frac{317{f'}^2f^{(5)}f}{315r} + \frac{979{f''}^3f}{1260r^2} + \frac{{f^{(3)}}^2f}{20r^2} + \frac{919f'f''f^{(3)}f}{140r^2} + \frac{283{f'}^2f^{(4)}f}{90r^2} - \frac{7f''f^{(4)}f}{90r^2} - \frac{23f'f^{(5)}f}{90r^2}$$
$$- \frac{443f'{f''}^2f}{63r^3} - \frac{221{f'}^2f^{(3)}f}{45r^3} + \frac{5f''f^{(3)}f}{18r^3} - \frac{2f'f^{(4)}f}{9r^3} + \frac{139{f''}^2f}{45r^4} - \frac{604{f'}^2f''f}{63r^4} + \frac{539f'f^{(3)}f}{90r^4}$$
$$- \frac{4f^{(4)}f}{45r^4} + \frac{243{f'}^3f}{10r^5} - \frac{1133f'f''f}{45r^5} + \frac{f^{(3)}f}{15r^5} + \frac{1889{f'}^2f}{90r^6} + \frac{191f''f}{45r^6} - \frac{278f'f}{15r^7} + \frac{766f}{315r^8}$$
$$+ \frac{{f''}^4}{210}f^{(3)} + \frac{1}{210}{f'}^2f''f^{(4)} - \frac{3{f'}^3f^{(5)}}{70} - \frac{4f'{f''}^3}{315r} + \frac{31{f'}^2f''f^{(3)}}{315r} - \frac{5{f'}^3f^{(4)}}{63r} - \frac{11{f''}^3}{630r^2}$$
$$+ \frac{347{f'}^2{f''}^2}{1260r^2} + \frac{787{f'}^3f^{(3)}}{1260r^2} + \frac{{f'}^2{f^{(3)}}^2}{40} - \frac{2}{105}f'{f''}^2 + \frac{11f'f''f^{(3)}}{210r^2} - \frac{23{f'}^2f^{(4)}}{315r^2} - \frac{53{f'}^3f''}{35r^3}$$
$$+ \frac{{f'}^2f^{(3)}}{18r^3} + \frac{137{f'}^4}{1260r^4} + \frac{{f''}^2}{45r^4} + \frac{6{f'}^2f''}{5r^4} - \frac{2f'f^{(3)}}{45r^4} - \frac{187{f'}^3}{45r^5} + \frac{4f'f''}{45r^5} + \frac{88{f'}^2}{45r^6} - \frac{44f'}{315r^7}$$
$$- \frac{8}{315r^8} + \frac{13}{105}f'f^{(3)}f^{(4)}f, \tag{464}$$

$$\mathcal{T}_t^{(2)t} = -\frac{26f^4}{r^8} + \frac{f^{(8)}f^3}{30} + \frac{f^{(7)}f^3}{3r} - \frac{14f^{(6)}f^3}{45r^2} - \frac{11f^{(5)}f^3}{9r^3} + \frac{487f^{(4)}f^3}{45r^4} - \frac{551f^{(3)}f^3}{15r^5}$$
$$+ \frac{307f''f^3}{5r^6} + \frac{754f^3}{9r^8} - \frac{29{f^{(4)}}^2f^2}{120} - \frac{13}{60}f^{(3)}f^{(5)}f^2 + \frac{13}{60}f''f^{(6)}f^2 + \frac{17}{60}f'f^{(7)}f^2 - \frac{202f^{(3)}f^{(4)}f^2}{45r}$$
$$- \frac{11f''f^{(5)}f^2}{15r} + \frac{149f'f^{(6)}f^2}{90r} - \frac{1447{f^{(3)}}^2f^2}{180r^2} - \frac{1223f''f^{(4)}f^2}{90r^2} - \frac{589f'f^{(5)}f^2}{90r^2} + \frac{17f^{(6)}f^2}{45r^2}$$
$$+ \frac{173f''f^{(3)}f^2}{9r^3} + \frac{44f'f^{(4)}f^2}{9r^3} + \frac{37f^{(5)}f^2}{45r^3} + \frac{362{f''}^2f^2}{15r^4} + \frac{2081f'f^{(3)}f^2}{45r^4} - \frac{143f^{(4)}f^2}{15r^4}$$
$$- \frac{706f'f''f^2}{3r^5} + \frac{1328f^{(3)}f^2}{45r^5} + \frac{3301{f'}^2f^2}{15r^6} - \frac{152f''f^2}{15r^6} - \frac{716f'f^2}{5r^7} - \frac{1864f^2}{45r^8} - \frac{1}{10}f''{f^{(3)}}^2f$$
$$- \frac{1}{20}{f''}^2f^{(4)}f - f'f^{(3)}f^{(4)}f + \frac{1}{2}{f'}^2f^{(6)}f - \frac{91f'{f^{(3)}}^2f}{20r} - \frac{179{f''}^2f^{(3)}f}{180r} - \frac{229f'f''f^{(4)}f}{45r}$$
$$+ \frac{38{f'}^2f^{(5)}f}{45r} - \frac{3{f''}^3f}{4r^2} - \frac{9{f^{(3)}}^2f}{20r^2} - \frac{649f'f''f^{(3)}f}{30r^2} - \frac{596{f'}^2f^{(4)}f}{45r^2} + \frac{19f''f^{(4)}f}{90r^2} + \frac{119f'f^{(5)}f}{90r^2}$$
$$+ \frac{1367f'{f''}^2f}{30r^3} + \frac{1463{f'}^2f^{(3)}f}{45r^3} - \frac{40f''f^{(3)}f}{9r^3} - \frac{2f'f^{(4)}f}{15r^3} - \frac{151{f''}^2f}{10r^4} + \frac{17{f'}^2f''f}{r^4} - \frac{437f'f^{(3)}f}{15r^4}$$
$$+ \frac{32f^{(4)}f}{45r^4} - \frac{1493{f'}^3f}{15r^5} + \frac{656f'f''f}{5r^5} - \frac{1187{f'}^2f}{15r^6} - \frac{409f''f}{15r^6} + \frac{1010f'f}{9r^7} - \frac{742f}{45r^8} - \frac{{f''}^4}{40}$$
$$- \frac{{f'}^2{f^{(3)}}^2}{8} + \frac{1}{10}f'{f''}^2f^{(3)} - \frac{1}{10}{f'}^2f''f^{(4)} + \frac{{f'}^3f^{(5)}}{10} + \frac{f'{f''}^3}{15r} - \frac{67{f'}^2f''f^{(3)}}{90r} - \frac{11{f'}^3f^{(4)}}{45r}$$
$$+ \frac{11{f''}^3}{90r^2} - \frac{2{f'}^2{f''}^2}{5r^2} - \frac{167{f'}^3f^{(3)}}{90r^2} - \frac{11f'f''f^{(3)}}{30r^2} + \frac{17{f'}^2f^{(4)}}{45r^2} + \frac{41{f'}^3f''}{5r^3} - \frac{8{f'}^2f^{(3)}}{9r^3} - \frac{37{f'}^4}{10r^4}$$
$$- \frac{8{f''}^2}{45r^4} - \frac{5{f'}^2f''}{r^4} + \frac{16f'f^{(3)}}{45r^4} + \frac{212{f'}^3}{9r^5} + \frac{1}{4}f'f''f^{(5)}f - \frac{32f'f''}{45r^5} - \frac{38{f'}^2}{3r^6} + \frac{44f'}{45r^7} + \frac{2}{15r^8}$$
$$- \frac{18f'f^3}{r^7} - \frac{7f^{(3)}f}{9r^5}, \tag{465}$$

$$\mathcal{T}_t^{(3)t} = \frac{932f^4}{9r^8} + \frac{2f^{(6)}f^3}{3r^2} + \frac{4f^{(5)}f^3}{3r^3} - \frac{44f^{(4)}f^3}{3r^4} + \frac{124f^{(3}f^3}{3r^5} + \frac{12f''f^3}{r^6} - \frac{2632f'f^3}{9r^7} - \frac{1352f^3}{9r^8}$$
$$+ \frac{2f^{(4)^2}f^2}{3} + \frac{1}{3}f''f^{(6)}f^2 + \frac{38f^{(3}f^{(4)}f^2}{3r} + \frac{20f''f^{(5)}f^2}{3r} + \frac{4f'f^{(6)}f^2}{3r} + \frac{71f^{(3^2}f^2}{6r^2} + \frac{21f''f^{(4)}f^2}{r^2}$$
$$+ \frac{11f'f^{(5)}f^2}{r^2} - \frac{2f^{(6)}f^2}{3r^2} - \frac{158f''f^{(3}f^2}{3r^3} - \frac{56f'f^{(4)}f^2}{3r^3} - \frac{4f^{(5)}f^2}{3r^3} - \frac{82f''^2f^2}{3r^4} - \frac{166f'f^{(3}f^2}{3r^4}$$
$$+ \frac{52f^{(4)}f^2}{3r^4} + \frac{1100f'f''f^2}{3r^5} - \frac{136f^{(3}f^2}{3r^5} - \frac{226f'^2f^2}{r^6} - \frac{88f''f^2}{r^6} + \frac{1744f'f^2}{3r^7} - \frac{32f^2}{3r^8} - \frac{1}{3}f''f^{(3^2}f$$
$$+ \frac{1}{6}f''^2f^{(4)}f + \frac{8}{3}f'f^{(3}f^{(4)}f + \frac{7}{6}f'f''f^{(5)}f - \frac{11f''^2f^{(3}f}{3r} + \frac{16f'f''f^{(4)}f}{r} + \frac{14f'^2f^{(5)}f}{3r} - \frac{113f''^3f}{9r^2}$$
$$+ \frac{13f^{(3^2}f}{6r^2} - \frac{28f'f''f^{(3}f}{3r^2} + \frac{14f'^2f^{(4)}f}{r^2} + \frac{f''f^{(4)}f}{r^2} - \frac{7f'f^{(5)}f}{3r^2} - \frac{124f'f''^2f}{r^3} - \frac{88f'^2f^{(3}f}{r^3}$$
$$+ \frac{70f''f^{(3}f}{3r^3} + \frac{20f'f^{(4)}f}{3r^3} + \frac{80f''^2f}{3r^4} + \frac{176f'^2f''f}{3r^4} + \frac{154f'f^{(3}f}{3r^4} - \frac{8f^{(4)}f}{3r^4} + \frac{1378f'^3f}{9r^5}$$
$$- \frac{868f'f''f}{3r^5} + \frac{4f^{(3}f}{r^5} + \frac{102f'^2f}{r^6} + \frac{76f''f}{r^6} - \frac{856f'f}{3r^7} + \frac{520f}{9r^8} + \frac{f''^4}{12} + \frac{f'^2f^{(3^2}}{4} - \frac{1}{3}f'f''^2f^{(3}$$
$$+ \frac{1}{3}f'^2f''f^{(4)} - \frac{2f'f''^3}{9r} + \frac{2f'^2f''f^{(3}}{3r} + \frac{4f'^3f^{(4)}}{3r} - \frac{4f''^3}{9r^2} - \frac{8f'^2f''^2}{3r^2} - \frac{f'^3f^{(3}}{r^2} + \frac{4f'f''f^{(3}}{3r^2}$$
$$- \frac{2f'^2f^{(4)}}{3r^2} - \frac{52f'^3f''}{3r^3} + \frac{14f'^2f^{(3}}{3r^3} + \frac{169f'^4}{9r^4} + \frac{2f''^2}{3r^4} + \frac{16f'^2f''}{3r^4} - \frac{4f'f^{(3}}{3r^4} - \frac{532f'^3}{9r^5} + \frac{8f'f''}{3r^5}$$
$$+ \frac{36f'^2}{r^6} - \frac{32f'}{9r^7} - \frac{4}{9r^8} + f^{(3}f^{(5)}f^2 + \frac{53f'f^{(3^2}f}{6r}, \tag{466}$$

$$\mathcal{T}_t^{(4)t} = \frac{242f^4}{3r^8} + \frac{704f^3f'}{3r^7} - \frac{72f^3f''}{r^6} - \frac{8f^3f^{(3)}}{r^5} + \frac{4f^3f^{(4)}}{r^4} - \frac{728f^3}{3r^8} + \frac{108f^2f'^2}{r^6} - \frac{244f^2f'f''}{r^5}$$
$$+ \frac{18f^2f'f^{(3)}}{r^4} - \frac{464f^2f'}{r^7} + \frac{11f^2f''^2}{r^4} + \frac{40f^2f''f^{(3)}}{r^3} + \frac{4f^2f''f^{(4)}}{r^2} + \frac{144f^2f''}{r^6} + \frac{4f^2f^{(3)^2}}{r^2}$$
$$+ \frac{16f^2f^{(3)}}{r^5} - \frac{8f^2f^{(4)}}{r^4} + \frac{244f^2}{r^8} - \frac{272ff'^3}{3r^5} - \frac{124ff'^2f''}{r^4} + \frac{72ff'^2f^{(3)}}{r^3} + \frac{16ff'^2f^{(4)}}{r^2} - \frac{72ff'^2}{r^6}$$
$$+ \frac{108ff'f''^2}{r^3} + \frac{106ff'f''f^{(3)}}{r^2} + \frac{8ff'f''f^{(4)}}{r} + \frac{248ff'f''}{r^5} + \frac{8ff'f^{(3)^2}}{r} - \frac{20ff'f^{(3)}}{r^4} - \frac{16ff'f^{(4)}}{r^3}$$
$$+ \frac{224ff'}{r^7} + \frac{100ff''^3}{3r^2} + \frac{22ff''^2f^{(3)}}{r} + ff''^2f^{(4)} + 2ff''f^{(3)^2} - \frac{40ff''f^{(3)}}{r^3} - \frac{4ff''f^{(4)}}{r^2} - \frac{72ff''}{r^6}$$
$$- \frac{4ff^{(3)^2}}{r^2} - \frac{8ff^{(3)}}{r^5} + \frac{4ff^{(4)}}{r^4} - \frac{248f}{3r^8} - \frac{80f'^4}{3r^4} + \frac{8f'^3f''}{r^3} + \frac{176f'^3}{3r^5} + \frac{7f'^2f''^2}{r^2} + \frac{4f'^2f''f^{(3)}}{r}$$
$$+ \frac{4f'^2f''}{r^4} - \frac{8f'^2f^{(3)}}{r^3} - \frac{36f'^2}{r^6} + \frac{f'f''^3}{3r} + \frac{1}{2}f'f''^2f^{(3)} + \frac{16f^2f'f^{(4)}}{r^3} - \frac{2f'f''f^{(3)}}{r^2} - \frac{4f'f''}{r^5}$$
$$+ \frac{2f'f^{(3)}}{r^4} + \frac{16f'}{3r^7} - \frac{f''^4}{8} + \frac{2f''^3}{3r^2} - \frac{f''^2}{r^4} + \frac{2}{3r^8} + \frac{8f'^3f^{(3)}}{r^2} - \frac{10ff''^2}{r^4}, \tag{467}$$

$$\mathcal{T}_r^{(0)r} = -\frac{386f^4}{945r^8} + \frac{23f^{(7)}f^3}{7560r} + \frac{37f^{(6)}f^3}{1512r^2} - \frac{37f^{(5)}f^3}{1260r^3} - \frac{103f^{(4)}f^3}{1260r^4} + \frac{1121f^{(3)}f^3}{3150r^5} - \frac{3097f''f^3}{3150r^6}$$
$$+ \frac{7823f'f^3}{4725r^7} - \frac{{f^{(4)}}^2f^2}{2520} + \frac{f^{(3)}f^{(5)}f^2}{1260} - \frac{f''f^{(6)}f^2}{1260} + \frac{f'f^{(7)}f^2}{1260} + \frac{f^{(3)}f^{(4)}f^2}{630r} + \frac{f''f^{(5)}f^2}{84r}$$
$$+ \frac{29f'f^{(6)}f^2}{1260r} - \frac{{f^{(3)}}^2f^2}{168r^2} + \frac{23f''f^{(4)}f^2}{252r^2} + \frac{4f'f^{(5)}f^2}{45r^2} - \frac{183f''f^{(3)}f^2}{700r^3} - \frac{283f'f^{(4)}f^2}{1260r^3} + \frac{f^{(5)}f^2}{90r^3}$$
$$- \frac{127f''^2f^2}{3150r^4} + \frac{1441f'f^{(3)}f^2}{6300r^4} + \frac{2f^{(4)}f^2}{45r^4} + \frac{3937f'f''f^2}{3150r^5} - \frac{2f^{(3)}f^2}{9r^5} - \frac{1511f'^2f^2}{900r^6} + \frac{4f''f^2}{9r^6}$$
$$- \frac{4f'f^2}{9r^7} + \frac{f^2}{3r^8} + \frac{1}{210}f'^2f^{(6)}f - \frac{f'{f^{(3)}}^2f}{360r} - \frac{f''^2f^{(3)}f}{630r} + \frac{f'f''f^{(4)}f}{84r} + \frac{17f'^2f^{(5)}f}{420r} + \frac{11f''^3f}{1260r^2}$$
$$+ \frac{{f^{(3)}}^2f}{840r^2} - \frac{13f'f''f^{(3)}f}{1260r^2} - \frac{f'^2f^{(4)}f}{126r^2} - \frac{f''f^{(4)}f}{420r^2} + \frac{f'f^{(5)}f}{420r^2} - \frac{1291f'f''^2f}{6300r^3} - \frac{169f'^2f^{(3)}f}{1260r^3}$$
$$+ \frac{f'f^{(4)}f}{45r^3} + \frac{f''^2f}{18r^4} + \frac{1249f'^2f''f}{2100r^4} - \frac{f'f^{(3)}f}{18r^4} - \frac{3289f'^3f}{6300r^5} - \frac{41f'f''f}{90r^5} + \frac{7f^{(3)}f}{450r^5} + \frac{113f'^2f}{180r^6}$$
$$+ \frac{41f''f}{450r^6} - \frac{73f'f}{225r^7} + \frac{68f}{945r^8} - \frac{f''^4}{1680} - \frac{f'^2{f^{(3)}}^2}{420} + \frac{1}{420}f'f''^2f^{(3)} + \frac{f'^3f^{(5)}}{210} + \frac{f'f''^3}{630r}$$
$$- \frac{f'^2f''f^{(3)}}{315r} + \frac{f'^3f^{(4)}}{63r} + \frac{f''^3}{945r^2} - \frac{37f'^2f''^2}{1260r^2} - \frac{f'^3f^{(3)}}{18r^2} - \frac{f'f''f^{(3)}}{315r^2} + \frac{f'^2f^{(4)}}{210r^2} + \frac{23f'^3f''}{225r^3}$$
$$+ \frac{3f'^4}{175r^4} - \frac{f''^2}{900r^4} - \frac{4f'^2f''}{45r^4} + \frac{f'f^{(3)}}{450r^4} + \frac{4f'^3}{15r^5} - \frac{f'f''}{225r^5} - \frac{26f'^2}{225r^6} + \frac{8f'}{945r^7} + \frac{1}{315r^8}, \tag{468}$$

$$\mathcal{T}_r^{(1)r} = \frac{40f^4}{21r^8} - \frac{f^{(7)}f^3}{35r} - \frac{8f^{(6)}f^3}{35r^2} + \frac{71f^{(5)}f^3}{210r^3} + \frac{191f^{(4)}f^3}{210r^4} - \frac{281f^{(3)}f^3}{63r^5} + \frac{3277f''f^3}{315r^6} - \frac{134f'f^3}{9r^7}$$
$$+ \frac{10f^3}{3r^8} + \frac{{f^{(4)}}^2f^2}{280} - \frac{1}{140}f^{(3)}f^{(5)}f^2 + \frac{1}{140}f''f^{(6)}f^2 - \frac{1}{140}f'f^{(7)}f^2 + \frac{41f^{(3)}f^{(4)}f^2}{1260r} - \frac{109f''f^{(5)}f^2}{1260r}$$
$$- \frac{3f'f^{(6)}f^2}{14r} + \frac{118{f^{(3)}}^2f^2}{315r^2} - \frac{59f''f^{(4)}f^2}{140r^2} - \frac{437f'f^{(5)}f^2}{630r^2} + \frac{1033f''f^{(3)}f^2}{315r^3} + \frac{25f'f^{(4)}f^2}{9r^3} - \frac{f^{(5)}f^2}{6r^3}$$
$$- \frac{199{f''}^2f^2}{630r^4} - \frac{1234f'f^{(3)}f^2}{315r^4} - \frac{17f^{(4)}f^2}{30r^4} - \frac{1583f'f''f^2}{105r^5} + \frac{152f^{(3)}f^2}{45r^5} + \frac{4841{f'}^2f^2}{210r^6} - \frac{224f''f^2}{45r^6}$$
$$+ \frac{44f'f^2}{45r^7} - \frac{188f^2}{45r^8} - \frac{1}{420}{f''}^2f^{(4)}f + \frac{1}{210}f'f^{(3)}f^{(4)}f + \frac{1}{420}f'f''f^{(5)}f - \frac{3}{70}{f'}^2f^{(6)}f$$
$$+ \frac{169f'{f^{(3)}}^2f}{1260r} - \frac{{f''}^2f^{(3)}f}{42r} - \frac{11f'f''f^{(4)}f}{630r} - \frac{107{f'}^2f^{(5)}f}{315r} - \frac{71{f''}^3f}{1260r^2} - \frac{23{f^{(3)}}^2f}{1260r^2} + \frac{187f'f''f^{(3)}f}{252r^2}$$
$$+ \frac{137{f'}^2f^{(4)}f}{315r^2} + \frac{23f''f^{(4)}f}{630r^2} - \frac{23f'f^{(5)}f}{630r^2} + \frac{647f'{f''}^2f}{315r^3} + \frac{361{f'}^2f^{(3)}f}{315r^3} + \frac{f''f^{(3)}f}{18r^3} - \frac{f'f^{(4)}f}{3r^3}$$
$$- \frac{23{f''}^2f}{45r^4} - \frac{2738{f'}^2f''f}{315r^4} + \frac{107f'f^{(3)}f}{90r^4} + \frac{109{f'}^3f}{14r^5} + \frac{61f'f''f}{9r^5} - \frac{13f^{(3)}f}{45r^5} - \frac{71{f'}^2f}{6r^6} - \frac{59f''f}{45r^6}$$
$$+ \frac{262f'f}{45r^7} - \frac{326f}{315r^8} + \frac{{f''}^4}{210} + \frac{{f'}^2{f^{(3)}}^2}{40} - \frac{2}{105}f'{f''}^2f^{(3)} + \frac{1}{210}{f'}^2f''f^{(4)} - \frac{3{f'}^3f^{(5)}}{70} - \frac{4f'{f''}^3}{315r}$$
$$+ \frac{31{f'}^2f''f^{(3)}}{315r} - \frac{5{f'}^3f^{(4)}}{63r} - \frac{11{f''}^3}{630r^2} + \frac{347{f'}^2{f''}^2}{1260r^2} + \frac{787{f'}^3f^{(3)}}{1260r^2} + \frac{11f'f''f^{(3)}}{210r^2} - \frac{23{f'}^2f^{(4)}}{315r^2}$$
$$- \frac{53{f'}^3f''}{35r^3} + \frac{{f'}^2f^{(3)}}{18r^3} + \frac{137{f'}^4}{1260r^4} + \frac{{f''}^2}{45r^4} + \frac{6{f'}^2f''}{5r^4} - \frac{2f'f^{(3)}}{45r^4} - \frac{187{f'}^3}{45r^5} + \frac{4f'f''}{45r^5} + \frac{88{f'}^2}{45r^6}$$
$$- \frac{44f'}{315r^7} - \frac{8}{315r^8}, \tag{469}$$

$$\mathcal{T}_r^{(2)r} = \frac{10f^4}{r^8} + \frac{f^{(7)}f^3}{15r} + \frac{8f^{(6)}f^3}{15r^2} - \frac{11f^{(5)}f^3}{9r^3} - \frac{137f^{(4)}f^3}{45r^4} + \frac{281f^{(3)}f^3}{15r^5} - \frac{473f''f^3}{15r^6} + \frac{314f'f^3}{15r^7}$$
$$- \frac{290f^3}{9r^8} - \frac{{f^{(4)}}^2f^2}{120} + \frac{1}{60}f^{(3)}f^{(5)}f^2 - \frac{1}{60}f''f^{(6)}f^2 + \frac{1}{60}f'f^{(7)}f^2 - \frac{7f^{(3)}f^{(4)}f^2}{15r} + \frac{f'f^{(6)}f^2}{2r}$$
$$- \frac{553{f^{(3)}}^2f^2}{180r^2} - \frac{173f''f^{(4)}f^2}{90r^2} + \frac{59f'f^{(5)}f^2}{90r^2} - \frac{611f''f^{(3)}f^2}{45r^3} - \frac{518f'f^{(4)}f^2}{45r^3} + \frac{37f^{(5)}f^2}{45r^3}$$
$$+ \frac{107f''^2f^2}{15r^4} + \frac{1061f'f^{(3)}f^2}{45r^4} + \frac{101f^{(4)}f^2}{45r^4} + \frac{302f'f''f^2}{5r^5} - \frac{88f^{(3)}f^2}{5r^5} - \frac{1741f'^2f^2}{15r^6} + \frac{76f''f^2}{5r^6}$$
$$+ \frac{572f'f^2}{15r^7} + \frac{692f^2}{45r^8} + \frac{1}{20}f''^2f^{(4)}f - \frac{1}{10}f'f^{(3)}f^{(4)}f - \frac{1}{20}f'f''f^{(5)}f + \frac{1}{10}f'^2f^{(6)}f$$
$$- \frac{211f'{f^{(3)}}^2f}{180r} + \frac{73f''^2f^{(3)}f}{180r} - \frac{34f'f''f^{(4)}f}{45r} + \frac{26f'^2f^{(5)}f}{45r} + \frac{17f''^3f}{60r^2} + \frac{17{f^{(3)}}^2f}{180r^2}$$
$$- \frac{53f'f''f^{(3)}f}{10r^2} - \frac{161f'^2f^{(4)}f}{45r^2} - \frac{17f''f^{(4)}f}{90r^2} + \frac{17f'f^{(5)}f}{90r^2} - \frac{109f'f''^2f}{30r^3} - \frac{13f'^2f^{(3)}f}{45r^3}$$
$$- \frac{8f''f^{(3)}f}{9r^3} + \frac{74f'f^{(4)}f}{45r^3} - \frac{f''^2f}{10r^4} + \frac{703f'^2f''f}{15r^4} - \frac{137f'f^{(3)}f}{15r^4} - \frac{653f'^3f}{15r^5} - \frac{524f'f''f}{15r^5}$$
$$+ \frac{31f^{(3)}f}{15r^5} + \frac{1231f'^2f}{15r^6} + \frac{101f''f}{15r^6} - \frac{1838f'f}{45r^7} + \frac{302f}{45r^8} - \frac{f''^4}{40} - \frac{f'^2{f^{(3)}}^2}{8} + \frac{1}{10}f'f''^2f^{(3)}$$
$$- \frac{1}{10}f'^2f''f^{(4)} + \frac{f'^3f^{(5)}}{10} + \frac{f'f''^3}{15r} - \frac{67f'^2f''f^{(3)}}{90r} - \frac{11f'^3f^{(4)}}{45r} + \frac{11f''^3}{90r^2} - \frac{2f'^2f''^2}{5r^2}$$
$$- \frac{167f'^3f^{(3)}}{90r^2} - \frac{11f'f''f^{(3)}}{30r^2} + \frac{17f'^2f^{(4)}}{45r^2} + \frac{41f'^3f''}{5r^3} - \frac{8f'^2f^{(3)}}{9r^3} - \frac{37f'^4}{10r^4} - \frac{8f''^2}{45r^4} - \frac{5f'^2f''}{r^4}$$
$$+ \frac{16f'f^{(3)}}{45r^4} + \frac{212f'^3}{9r^5} - \frac{32f'f''}{45r^5} - \frac{38f'^2}{3r^6} + \frac{44f'}{45r^7} + \frac{2}{15r^8}, \tag{470}$$

$$\mathcal{T}_r^{(3)r} = -\frac{364f^4}{9r^8} + \frac{824f^3f'}{9r^7} + \frac{20f^3f''}{r^6} - \frac{28f^3f^{(3)}}{r^5} + \frac{8f^3f^{(4)}}{3r^4} + \frac{4f^3f^{(5)}}{3r^3} + \frac{520f^3}{9r^8} + \frac{258f^2f'^2}{r^6}$$
$$- \frac{268f^2f'f''}{3r^5} - \frac{166f^2f'f^{(3)}}{3r^4} + \frac{16f^2f'f^{(4)}}{r^3} + \frac{3f^2f'f^{(5)}}{r^2} - \frac{656f^2f'}{3r^7} - \frac{82f^2f''^2}{3r^4} + \frac{50f^2f''f^{(3)}}{3r^3}$$
$$+ \frac{9f^2f''f^{(4)}}{r^2} + \frac{2f^2f''f^{(5)}}{3r} - \frac{8f^2f''}{r^6} + \frac{41f^2f^{(3)^2}}{6r^2} + \frac{4f^2f^{(3)}f^{(4)}}{3r} + \frac{104f^2f^{(3)}}{3r^5} - \frac{8f^2f^{(4)}}{3r^4}$$
$$- \frac{4f^2f^{(5)}}{3r^3} + \frac{16f^2}{3r^8} + \frac{1018ff'^3}{9r^5} - \frac{328ff'^2f''}{3r^4} - \frac{56ff'^2f^{(3)}}{3r^3} + \frac{8ff'^2f^{(4)}}{r^2} + \frac{2ff'^2f^{(5)}}{3r} - \frac{246ff'^2}{r^6}$$
$$- \frac{20ff'f''^2}{r^3} + \frac{6ff'f''f^{(3)}}{r^2} + \frac{8ff'f''f^{(4)}}{3r} + \frac{1}{6}ff'f''f^{(5)} + \frac{212ff'f''}{3r^5} + \frac{17ff'f^{(3)^2}}{6r} + \frac{1}{3}ff'f^{(3)}f^{(4)}$$
$$+ \frac{30ff'f^{(3)}}{r^4} - \frac{8ff'f^{(4)}}{3r^3} - \frac{ff'f^{(5)}}{3r^2} + \frac{392ff'}{3r^7} - \frac{23ff''^3}{9r^2} - \frac{5ff''^2f^{(3)}}{3r} - \frac{1}{6}ff''^2f^{(4)} + \frac{32ff''^2}{3r^4}$$
$$+ \frac{14ff''f^{(3)}}{3r^3} + \frac{ff''f^{(4)}}{3r^2} - \frac{12ff''}{r^6} - \frac{ff^{(3)^2}}{6r^2} - \frac{20ff^{(3)}}{3r^5} - \frac{200f}{9r^8} + \frac{169f'^4}{9r^4} - \frac{52f'^3f''}{3r^3} - \frac{f'^3f^{(3)}}{r^2}$$
$$+ \frac{4f'^3f^{(4)}}{3r} - \frac{532f'^3}{9r^5} - \frac{8f'^2f''^2}{3r^2} + \frac{2f'^2f''f^{(3)}}{3r} + \frac{1}{3}f'^2f''f^{(4)} + \frac{16f'^2f''}{3r^4} + \frac{f'^2f^{(3)^2}}{4} + \frac{14f'^2f^{(3)}}{3r^3}$$
$$- \frac{2f'^2f^{(4)}}{3r^2} + \frac{36f'^2}{r^6} - \frac{2f'f''^3}{9r} - \frac{1}{3}f'f''^2f^{(3)} + \frac{4f'f''f^{(3)}}{3r^2} + \frac{8f'f''}{3r^5} - \frac{4f'f^{(3)}}{3r^4} - \frac{32f'}{9r^7} + \frac{f''^4}{12}$$
$$- \frac{4f''^3}{9r^2} + \frac{2f''^2}{3r^4} - \frac{4}{9r^8}, \tag{471}$$

$$\mathcal{T}_r^{(4)r} = -\frac{94f^4}{3r^8} - \frac{448f^3f'}{3r^7} + \frac{8f^3f^{(3)}}{r^5} + \frac{280f^3}{3r^8} - \frac{228f^2f'^2}{r^6} + \frac{44f^2f'f''}{r^5} + \frac{34f^2f'f^{(3)}}{r^4} + \frac{304f^2f'}{r^7}$$
$$+ \frac{23f^2f''^2}{r^4} + \frac{8f^2f''f^{(3)}}{r^3} - \frac{16f^2f^{(3)}}{r^5} - \frac{92f^2}{r^8} - \frac{368ff'^3}{3r^5} + \frac{92ff'^2f''}{r^4} + \frac{40ff'^2f^{(3)}}{r^3} + \frac{264ff'^2}{r^6}$$
$$+ \frac{60ff'f''^2}{r^3} + \frac{18ff'f''f^{(3)}}{r^2} - \frac{40ff'f''}{r^5} - \frac{36ff'f^{(3)}}{r^4} - \frac{160ff'}{r^7} + \frac{22ff''^3}{3r^2} + \frac{2ff''^2f^{(3)}}{r} - \frac{22ff''^2}{r^4}$$
$$- \frac{8ff''f^{(3)}}{r^3} + \frac{8ff^{(3)}}{r^5} + \frac{88f}{3r^8} - \frac{80f'^4}{3r^4} + \frac{8f'^3f''}{r^3} + \frac{8f'^3f^{(3)}}{r^2} + \frac{176f'^3}{3r^5} + \frac{7f'^2f''^2}{r^2} + \frac{4f'^2f''f^{(3)}}{r}$$
$$+ \frac{4f'^2f''}{r^4} - \frac{8f'^2f^{(3)}}{r^3} - \frac{36f'^2}{r^6} + \frac{f'f''^3}{3r} + \frac{1}{2}f'f''^2f^{(3)} - \frac{2f'f''f^{(3)}}{r^2} - \frac{4f'f''}{r^5} + \frac{2f'f^{(3)}}{r^4} + \frac{16f'}{3r^7}$$
$$- \frac{f''^4}{8} + \frac{2f''^3}{3r^2} - \frac{f''^2}{r^4} + \frac{2}{3r^8}. \tag{472}$$

W powyższych wzorach $f'(r)$, $f''(r)$, $f^{(k)}(r)$ oznaczają pierwszą, drugą i k-tą pochodną względem r. Składowe kątowe tensora energii-pędu można uzyskać, korzystając z zasady zachowania $\nabla_b T_a^b = 0$, która prowadzi do tożsamości

$$T_\theta^{(2)\theta} = T_\phi^{(2)\phi} = -\frac{1}{4}\frac{f'}{f}\left(T_t^{(2)t} - T_r^{(2)r}\right) + \frac{1}{2}T_r^{(2)r\prime}r + T_r^{(2)r}. \tag{473}$$

8.7 Przykłady kodów źródłowych

8.7.1 Język Form

Fragment programu „$[a_n]$" napisany w języku Form. Program ten jest częścią składową projektu służącego do obliczeń współczynników HaMiDeW sposobem podstawowym opartym na języku Form.

```
.
.
.
.
.


Global A{'n'+1}'rzadpoch'=sigma(Lx)*a{'n'+1}(Lx)+('n'+1)*a{'n'+1}
-([/\]*a'n')*W(Lx,Lx)*[1/\]+R(Lx,Ly,Lx,Ly)*a{'n'}*xi;


if ('rzadpoch'!=0) ;
Multiply right W(L1,...,L'rzadpoch');
endif;


repeat;
id W=1;
id R?Fun(?a)*W(b1?,?c)=(R(?a,b1)+W(b1)*R(?a))*W(?c);
endrepeat;


id W(?a)=0;
id a0=1;
id a0(b1?,?a)=0;
id sigma(?a)=siig(?a);
id [/\](?a)=[//\\](?a);
id [1/\](?a)=[1//\\](?a);
id a'n'(?a)=aa'n'(?a);
id a{'n'+1}(?a)=aa{'n'+1}(?a);
id siig(L?)=0;
id siig(U?,L?)=g(U,L);
id siig(b1?,b2?,b3?)=0;
id g(?a,L1?,?b)*siig?(?c,L1?,?d)=siig(?c,?a,?b,?d);
id [//\\]=1;
id [1//\\]=1;
```

```
id [//\\](L1?)=0;
id [1//\\](L1?)=0;
id siig(?a)=sigma(?a);
id [//\\](?a)=[/\](?a);
id [1//\\](?a)=[1/\](?a);
id aa'n'(?a)=a'n'(?a);
id aa{'n'+1}(?a)=a{'n'+1}(?a);


id a{'n'+1}(b1?,...,b'rzadpoch'?)=ax{'n'+1}(b1,...,b'rzadpoch');


repeat;
#do i=1,{'rzadpoch'-1}
#do j='i',{'rzadpoch'-1}


id ax{'n'+1}(L{'j'+1},L{'i'},?c)=ax{'n'+1}(L'i',L{'j'+1},?c);


id ax{'n'+1}(b1?,L{'j'+1},L{'i'},?c)=ax{'n'+1}(b1,L'i',L{'j'+1},?c)
+a{'n'+1}(Lw)*R(Lw,b1,L{'j'+1},L'i')*W(?c);


id ax{'n'+1}(b1?,b2?,L{'j'+1},L{'i'},?c)=ax{'n'+1}(b1,b2,L'i',L{'j'+1},?c)
+(a{'n'+1}(Lw,b2)*R(Lw,b1,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,Lw)*R(Lw,b2,L{'j'+1},L'i'))*W(?c);


id ax{'n'+1}(b1?,...,b3?,L{'j'+1},L{'i'},?c)=ax{'n'+1}(b1,b2,b3,L'i',
L{'j'+1},?c)
+(a{'n'+1}(Lw,b2,b3)*R(Lw,b1,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,Lw,b3)*R(Lw,b2,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,b2,Lw)*R(Lw,b3,L{'j'+1},L'i'))*W(?c);


id ax{'n'+1}(b1?,...,b4?,L{'j'+1},L{'i'},?c)=ax{'n'+1}(b1,b2,b3,b4,L'i',
L{'j'+1},?c)
+(a{'n'+1}(Lw,b2,b3,b4)*R(Lw,b1,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,Lw,b3,b4)*R(Lw,b2,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,b2,Lw,b4)*R(Lw,b3,L{'j'+1},L'i')
+a{'n'+1}(b1,b2,b3,Lw)*R(Lw,b4,L{'j'+1},L'i'))*W(?c);
```

```
#enddo
#enddo
endrepeat;


repeat;
id W=1;
id R?Fun(?a)*W(b1?,?c)=(R(?a,b1)+W(b1)*R(?a))*W(?c);
endrepeat;
id W(?a)=0;


id ax{'n'+1}(?a)=a{'n'+1}(?a);


#if 'rzadpoch'>2
#do kk=4,{'rzadpoch'+1}
id sigma(L1?,...,L'kk'?)=F'kk';
#enddo
#endif


argument;
#do k=1,10
repeat id N'k'_?=Lx'k' ;
#enddo
endargument;


#do kk=2,{'rzadpoch'+2}
id [/\](L1?,...,L'kk'?)=T'kk';
#enddo


argument;
#do k=1,10
repeat id N'k'_?=Lx'k' ;
#enddo
```

```
endargument;
#if 'rzadpoch'>1
#do kk=2,'rzadpoch'
id [1/\](L1?,...,L'kk'?)=OT'kk';
#enddo
#endif


argument;
#do kk=1,10
repeat id N'kk'_?=Lw'kk' ;
#enddo
endargument;


#do kk=0,{'rzadpoch'+2}
#if 'n'!=0 & & 'kk'!=0
id a'n'(L1?,...,L'kk'?)=A'n"kk';
#elseif 'n'!=0
id a'n'=A'n'0;
#endif
#enddo


#if 'rzadpoch'>2
#do k=1,{'rzadpoch'-2}
id a{'n'+1}(L1?,...,L'k'?)=A{'n'+1}'k';
#enddo
#endif


id R(?a)=RR(?a);
sum Lx1,...,Lx10,Lw1,...,Lw10,Lx,Ly,Lw;
AntiSymmetrize RR 1,2;
AntiSymmetrize RR 3,4;
Symmetrize RR (1,2) , (3,4);
id RR(?a)=R(?a);


multiply -1/{'rzadpoch'+1+'n'};
id a{'n'+1}(?a)=0;
```

```
.store
save a{'n'+1}'rzadpoch'.sav A{'n'+1}'rzadpoch';
.end
```

8.7.2 Język Mathematica

Program „$[a_n]$" napisany w języku Mathematica. Program ten jest częścią składową projektu służącego do obliczeń współczynników HaMiDeW sposobem podstawowym opartym na języku Mathematica.

```
nn=0;
rzadpoch=0;
sum=11;

F0=si[sum]*Subscript[a, nn+1][sum]+(nn+1)*Subscript[a, nn+1][]
-DD[troj[]*Subscript[a, nn][],sum,sum]*otroj[]
+R[sum,sum+1,sum,sum+1]*Subscript[a, nn][]*\[Xi];

F1=DD[F0,Table[i,{i,rzadpoch}]]/.List->Sequence;
Clear[F0]

DD[\[Xi] B_[x_ _ _]*W_[y_ _ _],c_ _ _]:=\[Xi] DD[B[x]*W[y],c]
DD[A_[x_ _ _]+B_[y_ _ _]]:=DD[A[x]]+DD[B[y]]
DD[A_[x_ _ _]]:=A[x]
DD[A_+B_,c_ _ _]:=DD[A,c]+DD[B,c]
DD[A_?NumericQ*B_,c_ _ _]:=A*DD[B,c]
DD[A_[x_ _ _]*B_[y_ _ _],c_,d_ _ _]:=DD[DD[A[x],c]*B[y]+A[x]*DD[B[y],c],d]
DD[A_[z_ _ _]^n_,c_,d_ _ _]/;n>1:=DD[n*A[z]^(n-1)*DD[A[z],c],d]
DD[si_[x_ _ _],y_ _]:=si[x,y]

F2=Expand[F1];
Clear[F1,DD]

F3=F2/.{si[a_,b_]-> g[a,b],si[a_]->0,si[a_,b_,c_]->0,troj[a_]->0,
otroj[a_]->0,troj[]->1,otroj[]->1,Subscript[a,0][]->1,
Subscript[a, 0][a_ _]->0};

Clear[F2]
SetAttributes[g,Orderless];
F4=F3/.{g[a_,x_]*A_[y_ _ _,a_,z_ _ _]-> A[y,x,z] ,g[a_,a_]->4};
```

```
Clear[F3]
F5=F4/.Subscript[a, nn+1][a_ _ _]/;Length[{a}]==rzadpoch->Subscript[aa,
nn+1][a];
Clear[F4]

Subscript[aa, nn+1][y_,x_,c_ _ _]/;y>x:=Subscript[aa, nn+1][x,y,c]

Subscript[aa, nn+1][b1_,y_,x_,c_ _ _]/;y>x:=Subscript[aa, nn+1][b1,x,y,c]
+DD[Subscript[a, nn+1][sum]*RR[sum,b1,y,x],c]

Subscript[aa, nn+1][b1_,b2_,y_,x_,c_ _ _]/;y>x:=Subscript[aa, nn+1][b1,b2,
x,y,c]
+DD[Subscript[a, nn+1][sum,b2]*RR[sum,b1,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,sum]*RR[sum,b2,y,x],c]

Subscript[aa, nn+1][b1_,b2_,b3_,y_,x_,c_ _ _]/;y>x:=
Subscript[aa, nn+1][b1,b2,b3,x,y,c]
+DD[Subscript[a, nn+1][sum,b2,b3]*RR[sum,b1,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,sum,b3]*RR[sum,b2,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,b2,sum]*RR[sum,b3,y,x],c]

Subscript[aa, nn+1][b1_,b2_,b3_,b4_,y_,x_,c_ _ _]/;y>x:=
Subscript[aa, nn+1][b1,b2,b3,b4,x,y,c]
+DD[Subscript[a, nn+1][sum,b2,b3,b4]*RR[sum,b1,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,sum,b3,b4]*RR[sum,b2,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,b2,sum,b4]*RR[sum,b3,y,x]
+Subscript[a, nn+1][b1,b2,b3,sum]*RR[sum,b4,y,x],c]

F6=Expand[F5]/.RR[a_ _ _]->R[a]/.Subscript[aa, nn+1][a_ _ _]->0;
Clear[F5]

DD[A_[x_ _ _]*B_[y_ _ _],c_,d_ _ _]:=DD[DD[A[x],c]*B[y]+A[x]*DD[B[y],c],d]
DD[A_+B_,c_ _ _]:=DD[A,c]+DD[B,c]
DD[A_[s_ _ _],x_]:=A[s,x]
DD[A_[x_ _ _]]:=A[x]

F7=Expand[F6];
Clear[F6,DD]

R[b_,a_,c_ _ _]/;b>a:=-R[a,b,c]
R[b1_,b2_,b_,a_,c_ _ _]/;b>a:=-R[b1,b2,a,b,c]
R[b_,b1_,a_,b2_,c_ _ _]/;b>a:=R[a,b2,b,b1,c]
```

```
FX=Expand[F7];
Clear[R,F7]

AlfabetBlankAJ={Pattern[a,Blank[]],Pattern[b,Blank[]],Pattern[c,Blank[]],
Pattern[d,Blank[]],Pattern[e,Blank[]],Pattern[f,Blank[]],Pattern[g,Blank[]],
Pattern[h,Blank[]],Pattern[i,Blank[]],Pattern[j,Blank[]]};

Listka=Join[CharacterRange["a","z"],{s1,s2,s3,s4,s5,s6}];
Lis={ };

Do[
Lis=Append[Lis,R[a1_ _ _,ii,a2_ _ _]->R[a1,ToExpression[Listka[[ii]]],a2]
]
,{ii,1,10}]

sigma4iWyzejLista=Table[si[Take[AlfabetBlankAJ,{1,i}]//.List->Sequence]->
Get[StringJoin["sigma",ToString[i]]],{i,4,rzadpoch+1}]//.Lis;
trojk2iWyzejLista=Table[troj[Take[AlfabetBlankAJ,{1,i}]//.List->Sequence]->
Get[StringJoin["trojk",ToString[i]]],{i,2,rzadpoch+2}]//.Lis;
otroj2iWyzejLista=Table[otroj[Take[AlfabetBlankAJ,{1,i}]//.List->Sequence]->
Get[StringJoin["otrojk",ToString[i]]],{i,2,rzadpoch}]//.Lis;
aniwyzej=Table[aaaa[Take[AlfabetBlankAJ,{1,i}]//.List->Sequence]->
Get[StringJoin["a",ToString[nn],ToString[i]]],{i,0,rzadpoch+2}]//.Lis/.
aaaa->Subscript[a, nn];

anPlus1iwyzej=Table[aaaa[Take[AlfabetBlankAJ,{1,i}]//.List->Sequence]->
Get[StringJoin["a",ToString[nn+1],ToString[i]]],{i,0,rzadpoch-2}]//.Lis/.
aaaa->Subscript[a, nn+1];

XXX1=Map[Expand,Take[Apply[List,FX],{1,Length[FX]}]/.sigma4iWyzejLista]
/.trojk2iWyzejLista/.otroj2iWyzejLista/.aniwyzej/.anPlus1iwyzej ;
XXX=Expand[Apply[Plus,XXX1]*(-1/(rzadpoch+1+nn))] ;
Clear[XXX1]

R[b_,a_,c_ _ _]/;b>a:=-R[a,b,c]
R[b1_,b2_,b_,a_,c_ _ _]/;b>a:=-R[b1,b2,a,b,c]
R[b_,b1_,a_,b2_,c_ _ _]/;b>a:=R[a,b2,b,b1,c]

XXX2=XXX;
Clear[XXX,R]

Needs["xAct`xTensor`"]
```

```
xtensorRAM=MemoryInUse[]-mathRAM
Needs["xAct`Invar`"]
DefManifold[M,{1,2,3,4},{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p,q,r,s,t,
u,v,w,x,y,z,s1,s2,s3,s4,s5,s6}];

DefMetric[-1,metric[-a,-b],CD,{";","\[EmptyDownTriangle]"},
CurvatureRelations->False]

PrintAs[metric]^="g";
PrintAs[epsilonmetric]^="\[Epsilon]";
PrintAs[RiemannCD]^="R";
PrintAs[RicciCD]^="R";
PrintAs[RicciScalarCD]^="R";
PrintAs[WeylCD]^="W";
PrintAs[TFRicciCD]^="S";

Listka=Join[CharacterRange["a","z"],{s1,s2,s3,s4,s5,s6}];
Liscik={ };

Do[
Liscik=Append[Liscik,R[a1_ _ _,ii,a2_ _ _]R[a3_ _ _,ii,a4_ _ _]->
R[a1,-ToExpression[Listka[[ii]]],a2]R[a3,ToExpression[Listka[[ii]]],a4]
]
,{ii,1,30}]

Liscik2={ };
Do[
Liscik2=Append[Liscik2,R[a1_ _ _,ii,a2_ _ _,ii,a3_ _ _]->
R[a1,-ToExpression[Listka[[ii]]],a2,ToExpression[Listka[[ii]]],a3]
]
,{ii,1,30}]

Liscik3={ };
Do[
Liscik3=Append[Liscik3,R[a1_ _ _,ii,a2_ _ _]^2->R[a1,-ToExpression[
Listka[[ii]]],a2]R[a1,ToExpression[Listka[[ii]]],a2]
]
,{ii,1,30}]

Liscik4={ };
Do[
Liscik4=Append[Liscik4,R[a1_ _ _,ii,a2_ _ _]->R[a1,ToExpression[
```

```
Listka[[ii]]],a2]
]
,{ii,1,30}]

YYY=XXX2//.Flatten[{Liscik,Liscik2,Liscik3}]//.Liscik4 ;
Clear[XXX2]

DefTensor[R[a,b,c,d],M,RiemannSymmetric[{a,b,c,d}]]
DefConstantSymbol[\[Xi]]
Length[YYY]
FFF=YYY//ToCanonical;
Length[FFF]
Clear[YYY]

If[Head[FFF]===Plus,glebokosc=1,glebokosc=0];

Sum1=Apply[V,FFF,{glebokosc}]//.R[a_ _]^n_Integer->Sequence[R[a]^(n-1),
R[a]]/.R[a_ _ _]->Sequence[R,a]/.V[a_?NumberQ,b_ _]->a*V[b]/.V[\[Xi]^n_,
b_ _]/;n>=1->\[Xi]^n*V[b]/.V[\[Xi],b_ _]->\[Xi]*V[b];
Clear[FFF]

Sum2=Sum1//.V[a_ _ _,-b_,c_ _ _]->V[a,b,c];
Clear[Sum1]

Do[
Sum2=Sum2/.V[q_ _,j_,e_ _ _,j_,r_ _ _]/;!MemberQ[Range[1,100],j]\[And]
(!MemberQ[{R},j])->V[q,iii,e,iii,r] ;
,{iii,26,32}
]

V[R,a_ _,R,b_ _]:=R[a]*V[R,b]
V[R,a_ _]:=R[a]
Liscik4={ };

Do[
Liscik4=Append[Liscik4,R[a1_ _ _,ToExpression[Listka[[ii]]],
a2_ _ _]->R[a1,ii,a2]
]
,{ii,1,10}]

FFF2=Sum2//.Liscik4 ;
Clear[Sum2,V]
```

```
Length[Expand[FFF2]]
F10=Expand[FFF2];
Clear[FFF2,sigma]

F10>>"a"<>ToString[nn+1]<>ToString[rzadpoch]
UndefTensor[R];
UndefConstantSymbol[\[Xi]];
SelectionMove[uruchomWszystkieNot,Next,Cell];
SelectionEvaluate[uruchomWszystkieNot];
```

8.7.3 Język Maple

Program „$[a_n]$" napisany w języku Maple. Program ten jest częścią składową projektu służącego do obliczeń współczynników HaMiDeW sposobem podstawowym opartym na języku Maple.

```
restart;
n:=2;
rzadpoch:=0;

F1:=expand(sigma(Lw)&* a||(n+1)(Lw)+(n+1)*a||(n+1)(x1)
-OVleck(x1)&*DD[Lw]&*DD[Lw]&*Vleck(x1)&* a||n(x1));

F2:=expand(`&*`(seq(DD[rzadpoch+1-i],i=1..rzadpoch),F1))+`&*`(xi,
seq(DD[rzadpoch+1-i],i=1..rzadpoch),R(Lw,Lx,Lw,Lx),a||n(x1));


Poch1:=proc(x)
local a,b,c,v,i,zbior,elem;;
if not has(x,{seq(DD[i],i=1..12),DD[Lw]}) then
return x;
elif type(op(1,x),numeric) then
a:=Array([op(op(2,x))]);
 if op(0,rhs(op(nops(op(3,a)),op(3,a))))=DD then
 return 0;
 end if;
v:=op(1,x);
else
a:=Array([op(x)]);
 if op(0,rhs(op(nops(op(3,a)),op(3,a))))=DD then
```

```
 return 0;
 end if;
v:=1;
end if;
for i to nops(op(3,a))-1 do

zbior:={sigma,R,Vleck,OVleck,a||n,a||(n+1)}:
 if op(0,rhs(op(i,op(3,a))))=DD and op(0,rhs(op(i+1,op(3,a)))) in zbior
 then
elem:=op(0,rhs(op(i+1,op(3,a)))):
 b:=Array(1..nops(op(3,a))-1);
 b[1..i-1]:=a[1..i-1];
 b[i]:=elem(op(rhs(op(i+1,op(3,a)))),op(1,rhs(op(i,op(3,a)))));
 b[i+1..nops(op(3,a))-1]:=a[i+2..nops(op(3,a))];
 c:=Array(1..nops(op(3,a)));
 c[1..i-1]:=a[1..i-1];
 c[i]:=elem(op(rhs(op(i+1,op(3,a)))));
 c[i+1]:=DD[op(1,rhs(op(i,op(3,a))))];
 c[i+2..nops(op(3,a))]:=a[i+2..nops(op(3,a))];
 return v*`&*`(op(convert(b,list)))+v*`&*`(op(convert(c,list)));

 return v*`&*`(op(convert(b,list)))+v*`&*`(op(convert(c,list)));

end if;
end do;
end proc:
PochAll:=proc(x::evaln)
if has(eval(x),{seq(DD[i],i=1..12),DD[Lw]}) then
if op(0,eval(x))<>`+` then
 x:=Poch1(eval(x));
 PochAll(x);
 else

 x:= map(Poch1,eval(x));

 PochAll(x);

 end if;
```

```
end if;
eval(x);
end proc:
F3:=PochAll(F2):
F4:=subs(x1=NULL,F3):
F4:=eval(subs(‘&*‘=‘*‘,F4)):
WstawaOodOdoWiecej:=proc(x)
local a,b,i,h;
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=a0 and nops(op(h,b[i]))>0 then
 a[i]:=0:
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
F5:=WstawaOodOdoWiecej(F4);
 sigma(Lw) a3(Lw) + 3 a3() - OVleck() Vleck(Lw, Lw) a2()
 - 2 OVleck() Vleck(Lw) a2(Lw) - OVleck() Vleck() a2(Lw, Lw)
 + xi R(Lw, Lx, Lw, Lx) a2()
F6:=subs(a0()=1,F5);
 sigma(Lw) a3(Lw) + 3 a3() - OVleck() Vleck(Lw, Lw) a2()
 - 2 OVleck() Vleck(Lw) a2(Lw) - OVleck() Vleck() a2(Lw, Lw)
 + xi R(Lw, Lx, Lw, Lx) a2()
F7:=subs(Vleck()=1,F6);
 sigma(Lw) a3(Lw) + 3 a3() - OVleck() Vleck(Lw, Lw) a2()
 - 2 OVleck() Vleck(Lw) a2(Lw) - OVleck() a2(Lw, Lw)
 + xi R(Lw, Lx, Lw, Lx) a2()
WstawVleck1:=proc(x)
local a,b,i,h;
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=Vleck and nops(op(h,b[i]))=1 then
 a[i]:=0:
```

```
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
F8:=WstawVleck1(F7);

WstawSigma1:=proc(x)
local a,b,i,h;
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
#DlugWyrazenia:=ArrayNumElems(a):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=sigma and nops(op(h,b[i]))=1 then
 a[i]:=0:
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
WstawSigma3:=proc(x)
local a,b,i,h;
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=sigma and nops(op(h,b[i]))=3 then
 a[i]:=0:
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
F9:=WstawSigma1(F8);

F10:=WstawSigma3(F9);

Sigma2naGab:=proc(x,siiigma)
local a,b,i,h,v,elem,zbior;
```

```
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=sigma and nops(op(h,b[i]))=2 then

 for v to nops(b[i]) do
 elem:=op(0,op(v,b[i])):
 zbior:={Vleck,sigma,a||(n+1)}:

 if elem in zbior and not (elem=sigma and nops(op(v,b[i]))=2) then
a[i]:=subs(sigma(op(op(h,b[i])))*elem(op(op(v,b[i])))=siiigma(op(2,
op(h,b[i])),seq(op(L1,op(v,b[i])),L1=2..nops(op(v,b[i])))),b[i]);
 elif elem=R then
 if op(1,op(h,b[i]))=Lw then
 a[i]:=subs(sigma(op(op(h,b[i])))*R(op(op(v,b[i])))=R(op(2,op(h,b[i])),
seq(op(L1,op(v,b[i])),L1=2..nops(op(v,b[i])))),b[i]);
 elif op(2,op(h,b[i]))=Lw then
 a[i]:=subs(sigma(op(op(h,b[i])))*R(op(op(v,b[i])))=R(op(1,op(h,b[i])),
seq(op(L1,op(v,b[i])),L1=2..nops(op(v,b[i])))),b[i]);

 end if;
 end if;
 end do;
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
F11:=Sigma2naGab(F10,aa||(n+1));

F12:=subs(a||(n+1)(seq(i,i=1..rzadpoch))=aa||(n+1)(seq(i,i=1..rzadpoch)),F11);

WstawOVleck1:=proc(x)
local a,b,i,h;
a:=Array([op(eval(x))]):
b:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(b) do
 for h to nops(b[i]) do
 if op(0,op(h,b[i]))=OVleck and nops(op(h,b[i]))=1 then
```

```
 a[i]:=0:
 end if;
 end do;
end do;
add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(b));
end proc:
F13:=WstawOVleck1(F12);

F14:=subs(OVleck()=1,F13);

KomutSigmaRaz:=proc(x,m,siiigma,sigma)
local a,b,c,v,i,si,h;
with(ListTools):
if type(op(1,x),numeric) and op(0,op(2,x))=siiigma and nops(op(2,x))=m then
si:=op(2,x);
v:=op(1,x):
 if si=siiigma(seq(j,j=1..m)) then
 return 0;
 end if;

elif nops(x)=m and op(0,x)=siiigma then
si:=x;
v:=1;
 if si=siiigma(seq(j,j=1..m)) then
 return 0;
 end if;
else
return x;
end if;

if (type(op(1,x),numeric) and op(0,op(2,x))=siiigma and nops(op(2,x))=m) or
(nops(x)=m and op(0,x)=siiigma) then
 for h to m-1 do
 if op(h,si)>op(h+1,si) then
 if h=1 then
 return v*siiigma(op(2,si),op(1,si),seq(op(L1,si),L1=3..m));
 elif h=2 then
 return v*siiigma(op(1,si),op(3,si),op(2,si),seq(op(L1,si),L1=4..m))
+v*&*(op(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=4..m)])),sigma(Lw),R(Lw,op(1,si),
op(2,si),op(3,si)));
```

```
 elif h=3 then
 return v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(4,si),op(3,si),seq(op(L1,si),L1=5..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=5..m)]))),sigma(Lw,op(2,si)),
R(Lw,op(1,si),op(3,si),op(4,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=5..m)]))),sigma(op(1,si),Lw),
R(Lw,op(2,si),op(3,si),op(4,si)));
 elif h=4 then
 return v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(5,si),op(4,si),seq(op(L1,si),
L1=6..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=6..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si)),R(Lw,op(1,si),op(4,si),op(5,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=6..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si)),R(Lw,op(2,si),op(4,si),op(5,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=6..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw),R(Lw,op(3,si),op(4,si),op(5,si)));
 elif h=5 then
 return v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(6,si),op(5,si),
seq(op(L1,si),L1=7..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=7..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si),op(4,si)),R(Lw,op(1,si),op(5,si),op(6,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=7..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si),op(4,si)),R(Lw,op(2,si),op(5,si),op(6,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=7..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw,op(4,si)),R(Lw,op(3,si),op(5,si),op(6,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=7..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),Lw),R(Lw,op(4,si),op(5,si),op(6,si)));


 elif h=6 then
 return v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(7,si),
op(6,si),seq(op(L1,si),L1=8..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=8..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si),op(4,si),op(5,si)),R(Lw,op(1,si),op(6,si),op(7,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=8..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si),op(4,si),op(5,si)),R(Lw,op(2,si),op(6,si),op(7,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=8..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw,op(4,si),op(5,si)),R(Lw,op(3,si),op(6,si),op(7,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=8..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),Lw,op(5,si)),R(Lw,op(4,si),op(6,si),op(7,si)))
```

```
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=8..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),Lw),R(Lw,op(5,si),op(6,si),op(7,si)));

 elif h=7 then
 return
v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(8,si),
op(7,si),seq(op(L1,si),L1=9..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si)),R(Lw,op(1,si),op(7,si),op(8,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si)),R(Lw,op(2,si),op(7,si),op(8,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw,op(4,si),op(5,si),op(6,si)),R(Lw,op(3,si),op(7,si),op(8,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),Lw,op(5,si),op(6,si)),R(Lw,op(4,si),op(7,si),op(8,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),Lw,op(6,si)),R(Lw,op(5,si),op(7,si),op(8,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=9..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),Lw),R(Lw,op(6,si),op(7,si),op(8,si)));
 elif h=8 then
 return
v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),
op(9,si),op(8,si),seq(op(L1,si),L1=10..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si)),R(Lw,op(1,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si)),R(Lw,op(2,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw,op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si)),R(Lw,op(3,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),Lw,op(5,si),op(6,si),op(7,si)),R(Lw,op(4,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),Lw,op(6,si),op(7,si)),R(Lw,op(5,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),
```

```
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),Lw,op(7,si)),R(Lw,op(6,si),op(8,si),
op(9,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=10..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),Lw),R(Lw,op(7,si),op(8,si),
op(9,si)));

 elif h=9 then
 return
v*siiigma(op(1,si),op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),
op(8,si),op(10,si),op(9,si),seq(op(L1,si),L1=11..m))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(Lw,op(2,si),
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(1,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),Lw,
op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(2,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),Lw,op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(3,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),Lw,op(5,si),op(6,si),op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(4,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),Lw,op(6,si),op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(5,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),Lw,op(7,si),op(8,si)),R(Lw,op(6,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),Lw,op(8,si)),R(Lw,op(7,si),
op(9,si),op(10,si)))
+v*&*(op(eval(Reverse([seq(DD[op(L1,si)],L1=11..m)]))),sigma(op(1,si),
op(2,si),op(3,si),op(4,si),op(5,si),op(6,si),op(7,si),Lw),R(Lw,op(8,si),
op(9,si),op(10,si)));

 end if;
 end if;
 end do;
end if;
end proc:
```

```
KomutAll:=proc(x::evaln,M,siiigma,sigma)
local a,i;
if has(eval(x),siiigma) then
 a:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(a) do
a[i]:=KomutSigmaRaz(eval(a[i]),M,siiigma,sigma):
end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a));
KomutAll(x,M,siiigma,sigma);
else
eval(x);
end if;
end proc:
F15:=F14;

if rzadpoch>0 then
KomutAll(F15,rzadpoch,aa||(n+1),a||(n+1)):
else
F15:=subs(aa||(n+1)=0,F15);
end if:
F16:=PochAll(F15):
F17:=eval(subs(`&*`=`*`,F16)):
PodstSigmaNRaz:=proc(x,N,sigma)
local plik,a,b,c,v,i,f1,f2,f3,f4,copyX,sig,B,j;
copyX:=x:
 read cat(sigma,N):

 for v to nops(copyX) do

 if op(0,op(v,copyX))=sigma and nops(op(v,copyX))=N then

 if op(0,sigma||N)<>`+` then
 f1:=Array([sigma||N]):
 else
 f1:=Array([op(sigma||N)]):
 end if;
 for i to ArrayNumElems(f1) do
 f1[i]:=&*(op(f1[i]));
 f1[i]:=subs(xi^2=(xi,xi),f1[i]);
 B:=Array([op(f1[i])]);
```

```
 for j to ArrayNumElems(B) do
 if op(0,B[j])=‘^‘ and op(2,B[j])=2 and op(0,op(1,B[j]))=R then
 B[j]:=subsop(2=dwa,B[j]);
 end if;
 end do;
 f1[i]:=‘&*‘(seq(B[ii], ii=1..  ArrayNumElems(B))):

 end do;

 f2:=subs([seq(i=op(i,op(v,copyX)), i=1..N)],f1):
 f3:=subs(‘&*‘=‘*‘,f2):
 f4:=add(f3[ii], ii=1..  ArrayNumElems(f3)):

 copyX:=subs(sigma(seq(op(i,op(v,copyX)),i=1..N))=f4,copyX):



 end if;
 end do;

return copyX;
end proc:
PodstSigmaNFull:=proc(x::evaln,N,sigma)
local a,i;
a:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(a) do
a[i]:=PodstSigmaNRaz(eval(a[i]),N,sigma):
end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a)):
return x:
end proc:
F18:=F17:
if rzadpoch>2 then
for i from 4 to rzadpoch+1 do
PodstSigmaNFull(F18,i,sigma);
end do :
end if;
F19:=subs(Znacznik=0,F18):
for i from 2 to rzadpoch+2 do
```

```
PodstSigmaNFull(F19,i,Vleck);
end do :
F20:=F19:
if rzadpoch>1 then
for i from 2 to rzadpoch do
PodstSigmaNFull(F20,i,OVleck);
end do :
end if;
F21:=F20:
for kk from 0 to (rzadpoch +2) do
if not(n=0) then
PodstSigmaNFull(F21,kk,a||n);
end if;
end do;
F22:=F21:
if rzadpoch>2 then
for kk from 1 to (rzadpoch -2) do
PodstSigmaNFull(F22,kk,a||(n+1));
end do;
end if;
F23:=expand(subs(dwa=2,F22)):
ZnajdzIndeks:=proc(x,indeks)
local a,i,v;
if has(x,indeks) then
return true;
else
return false;
end if;
end proc:
ZamienIndeksyFull:=proc(x::evaln,Z1,Z2,Na1,Na2)
local a,i,v,h;
if op(0,eval(x))=‘+‘ then
 a:=Array([op(eval(x))]):
else
a:=Array([eval(x)]):
end if;
for i to ArrayNumElems(a) do
 for v from Z1 to Z2 do
 for h from Na1 to Na2 do
```

```
 if ZnajdzIndeks(a[i],v) and (not(ZnajdzIndeks(a[i],h))) then
 a[i]:=subs(v=h,a[i]);

 end if;
 end do;

 end do;
end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a));
end proc:
F24:=expand(F23):
ZamienIndeksyFull(F24,11,39,41,60):
F25:=F24:
ZamienIndekLw:=proc(x::evaln,Na1,Na2)
local a,i,h;
if op(0,eval(x))=‘+‘ then
 a:=Array([op(eval(x))]):
else
a:=Array([eval(x)]):
end if;
for i to ArrayNumElems(a) do

 for h from Na1 to Na2 do
 if (not(ZnajdzIndeks(a[i],h))) then
 a[i]:=subs(Lw=h,a[i]);

 end if;
 end do;


end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a));
end proc:
ZamienIndekLw(F25,41,60):
F26:=F25:
ZamienIndekLx:=proc(x::evaln,Na1,Na2)
local a,i,h;
if op(0,eval(x))=‘+‘ then
 a:=Array([op(eval(x))]):
```

```
else
a:=Array([eval(x)]):
end if;
for i to ArrayNumElems(a) do

 for h from Na1 to Na2 do
 if (not(ZnajdzIndeks(a[i],h))) then
 a[i]:=subs(Lx=h,a[i]);

 end if;
 end do;



end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a));
end proc:
F27:=F26:
ZamienIndekLx(F27,41,60):
ZnajdzRiemNieuporzadk:=proc(x)
local a,i,v;
a:=Array([op(x)]);
 for i to ArrayNumElems(a) do

if op(0,a[i])=R and (op(1,a[i])>op(2,a[i]) or op(3,a[i])>op(4,a[i]) or
op(1,a[i])>op(3,a[i]))then
return true;
elif op(0,a[i])=‘*‘ then
for v to nops(a[i]) do

if op(0,op(v,a[i]))=R and (op(1,op(v,a[i]))>op(2,op(v,a[i])) or
op(3,op(v,a[i]))>op(4,op(v,a[i])) or op(1,op(v,a[i]))>op(3,
op(v,a[i]))) then
return true;
end if;
end do;
end if;

 end do;
return false;
```

```
end proc:
RiemSymInd12Raz:=proc(x)
local a,b,c,v,i,f1,f2;
 if op(0,x)=R and op(1,x)>op(2,x) then
 return -R(op(2,x),op(1,x),seq(op(i,x),i=3..nops(x)));
 elif op(0,x)=‘*‘ then
 for v to nops(x) do

 if op(0,op(v,x))=R and op(1,op(v,x))>op(2,op(v,x)) then
 f1:=op(1,op(v,x)):
 f2:=op(2,op(v,x)):
 return -subsop([v,1]=f2,[v,2]=f1,x)

 end if;
 end do;
 end if;
return x;
end proc:
RiemSymInd34Raz:=proc(x)
local a,b,c,v,i,f3,f4;
 if op(0,x)=R and op(3,x)>op(4,x) then
 f3:=op(3,x):
 f4:=op(4,x):
 return -subsop(3=f4,4=f3,x);
 elif op(0,x)=‘*‘ then
 for v to nops(x) do

 if op(0,op(v,x))=R and op(3,op(v,x))>op(4,op(v,x)) then
 f3:=op(3,op(v,x)):
 f4:=op(4,op(v,x)):
 return -subsop([v,3]=f4,[v,4]=f3,x)

 end if;
 end do;
 end if;
return x;
end proc:
RiemSymInd13Raz:=proc(x)
local a,b,c,v,i,f1,f2,f3,f4;
```

```
 if op(0,x)=R and op(1,x)>op(3,x) then
 f1:=op(1,x):
 f2:=op(2,x):
 f3:=op(3,x):
 f4:=op(4,x):
 return subsop(1=f3,3=f1,2=f4,4=f2,x);
 elif op(0,x)=‘*‘ then
 for v to nops(x) do

 if op(0,op(v,x))=R and op(1,op(v,x))>op(3,op(v,x)) then
 f1:=op(1,op(v,x)):
 f2:=op(2,op(v,x)):
 f3:=op(3,op(v,x)):
 f4:=op(4,op(v,x)):
 return subsop([v,1]=f3,[v,3]=f1,[v,2]=f4,[v,4]=f2,x);

 end if;
 end do;
 end if;
return x;
end proc:
RiemSymFull:=proc(x::evaln)
local a,i;
if ZnajdzRiemNieuporzadk(eval(x)) then
 a:=Array([op(eval(x))]):
for i to ArrayNumElems(a) do
a[i]:=RiemSymInd12Raz(eval(a[i])):
a[i]:=RiemSymInd34Raz(eval(a[i])):
a[i]:=RiemSymInd13Raz(eval(a[i])):
end do;
x:=add(a[i], i=1..  ArrayNumElems(a));
else
eval(x);
end if;
end proc:
F28:=expand(F27):
F29:=RiemSymFull(F28):
F30:=-1/(rzadpoch+1+n)*F29:
a||(n+1)||rzadpoch:=expand(F30):
```

```
a||(n+1)||rzadpoch:
save a||(n+1)||rzadpoch, cat("a"||(n+1)||rzadpoch);
nops(a||(n+1)||rzadpoch);
```

8.7.4 Język Lisp

Program „$[a_n]$" napisany w języku Lisp. Program ten jest częścią składową projektu służącego do obliczeń współczynników HaMiDeW sposobem podstawowym opartym na języku Lisp.

```
(defparameter *n* 0)
(defparameter sigmy (make-hash-table))
(load "LispOperatoryDoWspAnKow.lisp")
(loop for ii from 4 to (+ (* 2 *n*) 4) do
(print (format nil "Obliczanie sigmy~A"ii))
(setq *f1* nil)
(defparameter *f1* (make-array 1 :fill-pointer 0 :adjustable t) )
(vector-push-extend (list -1/2 (list (DDD ii) (list 'si (+ ii 10 ) )
(list 'si (+ ii 10)) )) *f1*)
(pochfull *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0);
(sigma2toMetrykaISladujZmodNazw *f1* 'sig)
(KomutTensorRaz *f1* ii 'sig 'si (+ 10 ii))
(pochfull *f1*)
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(sigma2toMetrykaISladuj *f1* )
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
(PomnozTensorPrzezLiczbe *f1* (/ 1 (- ii 1)))
(UsunTensorRzedu *f1* 'sig ii)
(if (> ii 4)
 (progn
```

```
 (loop for kk from 4 to (- ii 1) do

        (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia sigmy 'si kk *f1*)

        )

 )
)
(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
(makroKopiaVektoraDoHashTable *f1* sigmy 'si ii)
)


 (defparameter Vlecki (make-hash-table))
 (loop for ii from 2 to (+ (* 2 *n*) 2) do
(print (format nil "Obliczanie Vleck~A"ii))
(setq *f1* nil)
(defparameter *f1* (make-array 1 :fill-pointer 0 :adjustable t) )
(vector-push-extend (list -2 (list (DDD ii) (list 'tr (+ ii 20 ) )
(list 'si (+ ii 20)) )) *f1*)
(vector-push-extend (list -1 (list (DDD ii) (list 'tr ) (list
'si (+ ii 20) (+ ii 20)) )) *f1*)
(pochfull *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(troj0 *f1*)
(troj1 *f1*)
(sigma2toMetrykaISladujZmodNazw *f1* 'tr)
(gaa=4 *f1*)

(SumujDuplikaty *f1* 0);
(KomutTensorRaz *f1* ii 'tr 'tr (+ 20 ii))
(pochfull *f1*)
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(troj0 *f1*)
```

```
(troj1 *f1*)
(sigma2toMetrykaISladuj *f1* )
(gaa=4 *f1*)
(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
(PomnozTensorPrzezLiczbe *f1* (/ 1 (* 2 ii)))
(UsunTensorRzedu *f1* 'tr ii)
(if (> ii 2)
 (progn
 (loop for kk from 2 to (- ii 1) do

        (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia Vlecki 'tr kk *f1*)

        )

 )
)
(loop for kk from 4 to (+ ii 2) do

 (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia sigmy 'si kk *f1*)
)

;zamiana indeksow z zakresu 14-20 na zakres 21-29
(ZamienIndeksZZakresuNaZakres 14 20 21 29 *f1*)

(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
(makroKopiaVektoraDoHashTable *f1* Vlecki 'tr ii)
)

 (defparameter OdwVlecki (make-hash-table))
 (loop for ii from 2 to (+ (* 2 *n*) 2) do

(print (format nil "Obliczanie OdwVleck~A"ii))

(setq *f1* nil)
(defparameter *f1* (make-array 1 :fill-pointer 0 :adjustable t) )
```

```
(vector-push-extend (list -1 (list (DDD ii) (list 'otr ) (list
'tr ) )) *f1*)
(pochfull *f1*)
(troj0 *f1*)
(troj1 *f1*)
(odwtroj0 *f1*)
(odwtroj1 *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(RiemSymind *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0);
(UsunTensorRzedu *f1* 'otr ii)

(loop for kk from 2 to ii do

 (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia Vlecki 'tr kk *f1*)
)
(if (> ii 2)
 (progn
 (loop for kk from 2 to (- ii 1) do

        (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia OdwVlecki 'otr kk *f1*)

        )
 )
)



(ZamienIndeksZZakresuNaZakres 21 29 31 39 *f1*)

(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
 (makroKopiaVektoraDoHashTable *f1* OdwVlecki 'otr ii)

)
 (defparameter WspAn (make-hash-table))

 (loop for ii from 0 to *n* do
```

```
(defparameter anPlusJeden (intern (concatenate 'string "a"
(write-to-string (+ 1 ii)) )))
(defparameter an (intern (concatenate 'string "a"(write-to-string ii) )))

 (loop for rz from 0 to (* 2 (- *n* ii)) do

 (print (format nil "Obliczanie a~A~A"(+ 1 ii) rz))

(setq *f1* nil)
(defparameter *f1* (make-array 1 :fill-pointer 0 :adjustable t) )
(if (equal rz 0)
(progn
(vector-push-extend (list 1 (list (list 'si (+ ii 40 ) ) (list anPlusJeden
(+ ii 40)) )) *f1*)
(vector-push-extend (list (+ ii 1) (list (list anPlusJeden ) )) *f1*)
(vector-push-extend (list -1 (list (list 'otr ) (list 'DD 100 100) (list
'tr ) (list an ) ) ) *f1*)
(vector-push-extend (list 1 (list (list 'xi) (list 'R 100 200 100
200 ) (list an ) )) *f1*)
)
(progn
(vector-push-extend (list 1 (list (DDD rz) (list 'si (+ ii 40 ) )
(list anPlusJeden (+ ii 40)) )) *f1*)
(vector-push-extend (list (+ ii 1) (list (DDD rz) (list anPlusJeden ) ))
*f1*)
(vector-push-extend (list -1 (list (DDD rz) (list 'otr ) (list 'DD 100
100) (list 'tr ) (list an ) ) ) *f1*)
(vector-push-extend (list 1 (list (list 'xi) (DDD rz) (list 'R 100 200
100 200 ) (list an ) )) *f1*)
)
)
(pochfull *f1*)
(a00 *f1*)
(a0Poch *f1*)
(sigma1 *f1*)
(sigma3 *f1*)
(troj0 *f1*)
(troj1 *f1*)
(odwtroj0 *f1*)
```

```
(odwtroj1 *f1*)
(sigma2toMetrykaISladujZmodNazw *f1* anPlusJeden)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0);

(KomutTensorRaz *f1* rz anPlusJeden anPlusJeden (+ 40 ii))
(pochfull *f1*)
(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0);
(if (> rz 2)
 (progn
 (loop for kk from 4 to (+ rz 1) do

 (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia sigmy 'si kk *f1*)
 )
 )
)
 (loop for kk from 2 to (+ rz 2) do

        (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia Vlecki 'tr kk *f1*)
)

(if (> rz 1)
 (loop for kk from 2 to rz do

 (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia OdwVlecki 'otr kk *f1*)

 )
)
(if (> ii 0)
 (progn
 (loop for kk from 0 to (+ rz 2) do

        (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia WspAn an kk *f1*)

        )
 )
)
```

```
(if (> rz 2)
 (progn
 (loop for kk from 1 to (- rz 2) do

 (PodstNtyTensorZHashTableDoWyrazenia WspAn anPlusJeden kk *f1*)

        )
 )
)
(ZamienIndeksZZakresuNaZakres 14 39 41 60 *f1*)
(ZamienIndeksZZakresuNaZakres 100 100 41 60 *f1*)
(ZamienIndeksZZakresuNaZakres 200 200 41 60 *f1*)
(PomnozTensorPrzezLiczbe *f1* (/ -1 (+ rz 1 ii)))
(UsunTensorRzedu *f1* anPlusJeden rz)
(RiemSymind *f1*)
(sortujtensory *f1*)
(SumujDuplikaty *f1* 0)
(makroKopiaVektoraDoHashTable *f1* WspAn anPlusJeden rz)
)
)
(defparameter sigma*n*ToString (concatenate 'string
"LispA"(write-to-string (+ 1 *n*))))
(with-open-file (my-stream sigma*n*ToString :direction :output :if-exists
:supersede)
(print *f1* my-stream))
```

8.7.5 Język Perl

Program „Form->MT" oparty na języku Perl występujący w projekcie służącym do obliczeń ogólnej postaci tensora energii-pędu z definicji.

```
use warnings;
$/=undef;
$ww=<stdin>;
$ww=~tr/ \n//d;
$ww=~s/.*\=(.*?)\;.*/$1/gsm;
@LU=(L,U);
@ss=("l","u");
```

```
@litery=("x",”a"..”0");
$ww=~s<U16><u$litery[12]>gs;
$ww=~s<U17><u$litery[13]>gs;

for $tab (0..1) {
for (1..11) {
$ww=~s<$LU[$tab]$ _ ><$ss[$tab]$litery[$ _]>gs;
 }; };

for (1..6) {
my $c;
$c=$ _+8;
$ww=~s<Lx$ _ ><l$litery[$c]>gs;
 };

for (1..6) {
my $c;
$c=$ _+8;
$ww=~s<Ux$ _ ><u$litery[$c]>gs;
 };

$ww=~s/R\((.*?)\)/Riem[$1]/gs;
$ww=~tr/()/[]/;
$ww=~s/gg/g/gs ;

$ww=~s<Riem\[(\w+),(\w+),(\w+),(\w+?)\]><RiemannR[$1,$2,$3,$4]>gs;
$ww=~s<RRic\[(\w+),(\w+)\]><RicciR[$1,$2]>gs;
$ww=~s<RRscal><ScalarR>gs;

$ww=~s<Riem\[(\w+),(\w+),(\w+),(\w+),(.*?)\]><CD[
RiemannR[$1,$2,$3,$4],$5]>gs;
$ww=~s<RRic\[(\w+),(\w+),(.*?)\]><CD[RicciR[$1,$2],$3]>gs;
$ww=~s<ScalarR\[(.*?)\]><CD[ScalarR,$1]>gs;


$ww=~s/Pi\^-2/Pi^(-2)/gs;
$ww=~s/mu\^-2/mu^(-2)/gs;


print "$ww";
```

8.7.6 Język C++ (pakiet GiNaC)

Fragment programu „$\mathcal{R}^k$" oparty na języku C++ (pakiet GiNaC) występujący w projekcie służącym do obliczeń jawnej postaci obiektow $\mathcal{R}^k$.

```
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <ginac/ginac.h>
using namespace std;
using namespace GiNaC;
int main() {
matrix M(2,2);
symbol Ri(”Ri"),Rj(”Rj"),R(”R");
symbol ii1("i1"),ii2("i2"),ii3("i3"),ii4("i4"),ii5("i5"),ii6("i6"),ii7("i7"),
ii8("i8"),ii9("i9");
symbol jj1("j1"),jj2("j2"),jj3("j3"),jj4("j4"),jj5("j5"),jj6("j6"),jj7("j7"),
jj8("j8"),jj9("j9");


int n=2;


matrix MM(2*n,2*n);
matrix Mi(1,9);
matrix Mj(1,9);
idx i1(ii1,4),i2(ii2,4),i3(ii3,4),i4(ii4,4),i5(ii5,4),i6(ii6,4),i7(ii7,4),
i8(ii8,4),i9(ii9,4);
idx j1(jj1,4),j2(jj2,4),j3(jj3,4),j4(jj4,4),j5(jj5,4),j6(jj6,4),j7(jj7,4),
j8(jj8,4),j9(jj9,4);
Mj=indexed(Rj,j1),indexed(Rj,j2),indexed(Rj,j3),indexed(Rj,j4),indexed(Rj,j5),
indexed(Rj,j6),indexed(Rj,j7),indexed(Rj,j8),indexed(Rj,j9);
Mi=indexed(Ri,i1),indexed(Ri,i2),indexed(Ri,i3),indexed(Ri,i4),indexed(Ri,i5),
indexed(Ri,i6),indexed(Ri,i7),indexed(Ri,i8),indexed(Ri,i9);
ex MM2;
for (int jj=0; jj<=(2*n-1);jj++)
{
 for (int ii=0; ii<=(2*n-1);ii++)
 {


 ex chwila=(Mi[1,ii]*Mj[1,jj]);
```

```
 MM(ii,jj)=chwila.subs(indexed(Ri,idx(wild(1),4))*indexed(Rj,
idx(wild(2),4))==delta_tensor(idx(wild(1),4),idx(wild(2),4)));
 }
}
matrix RR(1,3);


RR= indexed(R, sy_symm(sy_anti(0, 1), sy_anti(2, 3)),i1,i2,j1,j2)
 ,indexed(R, sy_symm(sy_anti(0, 1), sy_anti(2, 3)),i3,i4,j3,j4)
 ,indexed(R, sy_symm(sy_anti(0, 1), sy_anti(2, 3)),i5,i6,j5,j6);
ex iloczRiem=1;


for (int ii=0; ii<=(n-1);ii++)
{
 iloczRiem*=RR[1,ii];
}
.
.
.
.
.
.
.
.
.
outf<<f3;
outf.close();
std::cout<<f3;
 return 0;
 }
```

8.7.7 Język C

Program „Program główny” oparty na języku C występujący w projekcie służącym do obliczeń pochodnej kowariantnej.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdbool.h>
```

```
#include ”naglowek.h"
int main()
{
 struct ElementSumy PoczatekWyrazenia;
 PoczatekWyrazenia.licznik=1;
 PoczatekWyrazenia.mianownik=1;
 PoczatekWyrazenia.WskaznikDoTensora=NULL;
 PoczatekWyrazenia.WskaznikNextElementSumy=NULL;
struct ElementSumy *jj=DodajElementSumy(&PoczatekWyrazenia);
jj->licznik=-1;
jj->mianownik=2;
jj->WskaznikDoTensora=NULL;
jj->WskaznikNextElementSumy=NULL;
struct Tensor *ww=DodajTensorDoElementSumy(jj);
ww->NazwaTensora="DDD";
struct Indeks *pp=DodajIndeksDoTensora(ww);
(*pp).WartoscIndeksu=18;
int n=(*pp).WartoscIndeksu;
struct Tensor *uy=DodajTensorDoTensora(ww);
uy->NazwaTensora=”si";
struct Indeks *pi=DodajIndeksDoTensora(uy);
(*pi).WartoscIndeksu=11;
struct Tensor *uu=DodajTensorDoTensora(uy);
uu->NazwaTensora=”si";
struct Indeks *ki=DodajIndeksDoTensora(uu);
(*ki).WartoscIndeksu=11;
ZamienDDDnaIloczynDD(jj);
while (ZnajdzPochodne(&PoczatekWyrazenia))
{
PochRaz2((&PoczatekWyrazenia));
};
printf(”Rownanie \n\n D(n)*D(n-1)*...*D(1)*si(11)*si(11)\n\n dla n=%d
\n\npo wykonaniu jawnie pochodnych D(i) ma postac:\n\n",n);
printf("\n\nLiczba elementow rownania to:  ");
WyswietlLiczbeElementowRownania(&PoczatekWyrazenia);
printf("\n\n");
 return 0;
```

Literatura

[1] M. Campanelli, C. O. Lousto, and J. Audretsch, Phys. Rev. D **51**, 6810 (1995).

[2] E. Ayon-Beato and A. Garcia, Phys. Lett. **B464**, 25 (1999).

[3] K. A. Bronnikov, Phys. Rev. D **63**, 044005 (2001).

[4] K. Bronnikov, Phys. Rev. Lett. **85**, 4641 (2000).

[5] B. S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields* (Gordon and Breach, New York, 1965).

[6] I. G. Avramidi, *Heat Kernel and Quantum Gravity* (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

[7] I. Avramidi, Nucl. Phys. **B355**, 712 (1991).

[8] I. G. Avramidi, Nucl. Phys. **B509**, 557 (1998).

[9] P. Amsterdamski, A. Berkin, and D. O'Connor, Class. Quant. Grav. **6**, 1981 (1989).

[10] K. Schwarzschild, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. K1. Math.-Phys. Tech. (1916).

[11] J. L. Synge, Proc. Roy. Irish. Acad. **A53**, 83 (1950).

[12] D. Finkelstein, Phys. Rev. **110**, 965 (1958).

[13] C. Fronsdal, Phys. Rev. **116**, 778 (1959).

[14] M. D. Kruskal, Phys. Rev. **119**, 1743 (1960).

[15] G. Szekeres, Publ. Mat. Debrecent **7**, 285 (1960).

[16] I. D. Novikov, Astron. Zh. **40**, 772 (1963).

[17] I. D. Novikov, Soobshch. GA1SH No. **132**, 3, 43 (1964).

[18] L. Flamm, Phys. Z. **17**, 448 (1916).

[19] H. Weyl, Ann. Physik **54**, 117 (1917).

[20] A. S. Eddington, Nature **113**, 192 (1924).

[21] G. Lemaitre, Ann. Soc. Bruxelles **A53**, 51 (1933).

[22] A. Einstein and N. Rosen, Phys. Rev. **48**, 73 (1935).

[23] S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **74**, 81 (1931).

[24] L. D. Landau, Physikalische Zeitschrift Sowjetunion **1**, 285 (1932).

[25] W. Baade and F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Set **20**, 259 (1934).

[26] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).

[27] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).

[28] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963).

[29] I. D. Novikov and Y. B. Zel'dovich, Nuovo Cim. Snppl. **4**, 810 (1966).

[30] I. S. Shklovsky, Astron. Zh. **44**, 930 (1967).

[31] G. R. Burbidge, Comm. Astrophys. Space. Sci. **4**, 105 (1972).

[32] K. S. Thorne, *Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy* (W.W. Norton Co., Cambridge, New York).

[33] R. D. Blandford, K. S. Thorne, S. W. Hawking, and W. Israel, editors, *General Relativity, An Einstein Centenary Survey* (Cambridge Univ. Press, New York, 1979).

[34] G. R. Riegler and R. D. Blandford, editors, *Proceedings of AIP Conference, The Galactic Center* (Caltech, N. Y., 1982).

[35] M. Begelman and M. Rees, editors, *Gravity's Fatal Attraction: Black Holes in the Universe* (Scientific Americal Library, 1996).

[36] H. C. Ford *et al.*, Astrophys. J. **435**, L27 (1994).

[37] R. J. Harms *et al.*, Astrophys. J. **435**, L35 (1994).

[38] V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics* (Kluwer, Dordrecht, 1998).

[39] S. Hawking and G. Ellis, *The Large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1975).

[40] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).

[41] R. Geroch, G. T. Horowitz, S. W. Hawking, and W. Israel, editors, *General Relativity, An Einstein Centenary Survey* (Cambridge Univ. Press, New York, 1979).

[42] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).

[43] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. Hawking, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).

[44] M. Visser, Phys. Rev. D **46**, 2445 (1992).

[45] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15**, 2752 (1977).

[46] M. Visser, Phys.Rev. **D48**, 583 (1993).

[47] M. Visser, Phys. Rev. D **48**, 5697 (1993).

[48] D. V. Fursaev, Phys.Rev. **D59**, 064020 (1999).

[49] T. Jacobson, G. Kang, and R. C. Myers, (1994), arXiv:gr-qc/9502009.

[50] R. M. Wald, Phys. Rev. D **48**, R3427 (1993).

[51] V. Iyer and R. M. Wald, Phys. Rev. D **50**, 846 (1994).

[52] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie* (Springer-Verlag, Berlin, 1921).

[53] E. Pechlaner and R. Sexl, Comm. Math. Phys. **2**, 165 (1966).

[54] K. Stelle, Gen. Rel. Grav. **9**, 353 (1978).

[55] H.-J. Schmidt, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **4**, 12 (2006).

[56] Supernova Search Team, A. G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998).

[57] Supernova Cosmology Project, S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999), The Supernova Cosmology Project.

[58] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and M. Sasaki, Phys. Rev. D **71**, 123509 (2005).

[59] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rept. **373**, 1 (2003).

[60] P. Kanti, J. Rizos, and K. Tamvakis, Phys. Rev. D **59**, 083512 (1999).

[61] R. Utiyama and B. S. DeWitt, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).

[62] R. Kerner, Gen. Rel. Grav. **14**, 453 (1982).

[63] V. P. Frolov and A. I. Zel'nikov, Phys. Rev. D **29**, 1057 (1984).

[64] P. R. Anderson, W. A. Hiscock, and D. A. Samuel, Phys. Rev. D **51**, 4337 (1995).

[65] B. S. DeWitt, Phys. Rep. **17**, 297 (1975).

[66] B. Wardell, *Green Functions and Radiation Reaction From a Spacetime Perspective* (PhD thesis University College Dublin, 2009).

[67] W. G. Anderson and A. G. Wiseman, Classical and Quantum Gravity **22**, S783 (2005).

[68] T. C. Quinn, Phys.Rev. **D62**, 064029 (2000).

[69] S. A. Fulling, *Aspect of quantum field theory in curved space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).

[70] Y. Pinchover and J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations* (Cambridge University Press, New York, 2005).

[71] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations* (Yale University Press, New Haven, 1923).

[72] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. **B91**, 99 (1980).

[73] M. Green, J. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[74] D. Tong, *String Theory* , http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string/string.pdf.

[75] D. Lovelock, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).

[76] L. Parker and J. Z. Simon, Phys. Rev. D **47**, 1339 (1993).

[77] E. Cartan, J. Math. Pure Appl. **1**, 141 (1922).

[78] H. Vermeil, Nachr. Ges. Wiss. Gotingen , 334 (1917).

[79] D. Lovelock, Aequationes Math. **4**, 127 (1970).

[80] J. Z. Simon, Phys. Rev. D **41**, 3720 (1990).

[81] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).

[82] J. Z. Simon, Phys. Rev. D **43**, 3308 (1991).

[83] D. Hochberg, T. W. Kephart, and J. W. York, Phys. Rev. D **49**, 5257 (1994).

[84] M. Lu and M. B. Wise, Phys. Rev. D **47**, R3095 (1993).

[85] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **63**, 084004 (2001).

[86] E. C. de Rey Neto, O. D. Aguiar, and J. C. de Araujo, Class. Quant. Grav. **20**, 2025 (2003).

[87] J. W. York, Phys. Rev. D **31**, 775 (1985).

[88] J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949).

[89] P. A. Dirac, Proc.Roy.Soc.Lond. **A167**, 148 (1938).

[90] M. Campanelli, C. O. Lousto, and J. Audretsch, Phys. Rev. D **49**, 5188 (1994).

[91] A. Economou and C. O. Lousto, Phys. Rev. D **49**, 5278 (1994).

[92] C. W. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).

[93] J. Matyjasek and D. Tryniecki, Phys. Rev. D **69**, 124016 (2004).

[94] A. Dobado and A. L. Maroto, Phys. Lett. **B316**, 250 (1993).

[95] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **61**, 124019 (2000).

[96] B. E. Taylor, W. A. Hiscock, and P. R. Anderson, Phys. Rev. D **61**, 084021 (2000).

[97] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **76**, 084003 (2007).

[98] W. Berej and J. Matyjasek, Phys. Rev. D **66**, 024022 (2002).

[99] D. Garfinkle, G. T. Horowitz, and A. Strominger, Phys. Rev. D **43**, 3140 (1991).

[100] J. Matyjasek, Acta Phys.Polon. **B34**, 3921 (2003).

[101] W. Berej and J. Matyjasek, Acta Phys.Polon. **B34**, 3957 (2003).

[102] B. Bertotti, Phys. Rev. **116**, 1331 (1959).

[103] I. Robinson, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. **7**, 351 (1959).

[104] L. Romans, Nucl. Phys. **B383**, 395 (1992).

[105] J. Matyjasek and O. B. Zaslavskii, Phys. Rev. D **71**, 087501 (2005).

[106] T. Jacobson, G. Kang, and R. C. Myers, Phys. Rev. D **49**, 6587 (1994).

[107] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **74**, 104030 (2006).

[108] R.-G. Cai, Phys. Rev. D **65**, 084014 (2002).

[109] D. Birmingham, Class. Quant. Grav. **16**, 1197 (1999).

[110] R.-G. Cai and Q. Guo, Phys. Rev. D **69**, 104025 (2004).

[111] D. L. Wiltshire, Phys. Rev. D **38**, 2445 (1988).

[112] T. Torii and H. Maeda, Phys. Rev. D **72**, 064007 (2005).

[113] M. Born and L. Infeld, Proc. Roy. Soc. Lond. **A144**, 425 (1934).

[114] E. Fradkin and A. A. Tseytlin, Phys. Lett. **B163**, 123 (1985).

[115] M. Aiello, R. Ferraro, and G. Giribet, Phys. Rev. D **70**, 104014 (2004).

[116] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).

[117] C. V. Vishveshwara, Phys. Rev. D **1**, 2870 (1970).

[118] E. Papantonopoulos, *Physics of Black Holes: A Guided Tour* (Springer, Berlin Heidelberg, 2009).

[119] G. Dotti and R. J. Gleiser, Class. Quant. Grav. **22**, L1 (2005).

[120] G. Dotti and R. J. Gleiser, Phys. Rev. D **72**, 044018 (2005).

[121] R. J. Gleiser and G. Dotti, Phys. Rev. D **72**, 124002 (2005).

[122] P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, Phys. Rev. D **57**, 6255 (1998).

[123] R.-G. Cai and N. Ohta, Phys.Rev. **D74**, 064001 (2006).

[124] J. T. Wheeler, Nucl. Phys. **B268**, 737 (1986).

[125] J. T. Wheeler, Nucl. Phys. **B273**, 732 (1986).

[126] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, Phys. Rev. D **49**, 975 (1994).

[127] J. P. Muniain and D. Píriz, Phys. Rev. D **53**, 816 (1996).

[128] R.-G. Cai and K.-S. Soh, Phys. Rev. D **59**, 044013 (1999).

[129] R.-G. Cai, Phys. Lett. **B582**, 237 (2004).

[130] R. Zegers, J. Math. Phys. **46**, 072502 (2005).

[131] T. Takahashi and J. Soda, Prog. Theor. Phys. **124**, 911 (2010).

[132] T. Takahashi and J. Soda, Phys. Rev. D **79**, 104025 (2009).

[133] T. Takahashi and J. Soda, Phys. Rev. D **80**, 104021 (2009).

[134] T. Takahashi and J. Soda, Prog. Theor. Phys. **124**, 711 (2010).

[135] N. Birrell and P. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[136] E. Poisson, Living Rev. Rel. **7**, 6 (2004).

[137] J. Synge, *Relativity: The General theory* (The Netherlands, North-Holland, Amsterdam, 1960).

[138] J. Synge, Proc. London Math. Soc. **32**, 175 (1985).

[139] B. S. DeWitt and R. W. Brehme, Annals Phys. **9**, 220 (1960).

[140] Y. Décanini and A. Folacci, Phys. Rev. D **73**, 044027 (2006).

[141] P. R. Garabedian, *Partial Differential Equations* (Wiley, New York, 1964).

[142] F. G. Friedlander, *The Wave Equation on a Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1975).

[143] T. Sakai, Tohoku Math. J. **23**, 589 (1971).

[144] A. Z. Petrov, *Einstein spaces* (Pergamon Press, New York, 1969).

[145] L. Brewin, Class.Quant.Grav. **26**, 175017 (2009).

[146] A. Hatzinikitas, arXiv:hep-th/0001078.

[147] E. Calzetta, S. Habib, and B. L. Hu, Phys. Rev. D **37**, 2901 (1988).

[148] S. Minakshisundaram and A. Pleijel, Can. J. Math. **1**, 242 (1949).

[149] L. Parker, *Recent Developments In Gravitation* (Academic Press, New York, 1979).

[150] D. J. O'Connor, *Quantum field theory in curved spacetime: the effective action and finite size effects* (PhD thesis University Maryland, 1985).

[151] I. Avramidi, Phys. Lett. **B238**, 92 (1990).

[152] S. W. Hawking, H. G. T., and R. S. F., Phys. Rev. D **51**, 4302 (1995).

[153] C. Teitelboim, Phys. Rev. D **51**, 4315 (1995).

[154] D. Loranz, W. A. Hiscock, and P. R. Anderson, Phys. Rev. D **52**, 4554 (1995).

[155] D. Loranz, W. A. Hiscock, and P. R. Anderson, Phys. Rev. Lett. **74**, 4365 (1995).

[156] A. Strominger and C. Vafa, Phys. Lett. B **379**, 4365 (1996).

[157] R. Corless, G. Gonnet, D. Hare, D. Jeffrey, and D. Knuth, Adv. Comput. Math. **5**, 329 (1996).

[158] J. Matyjasek, Phys. Rev. D **70**, 047504 (2004).

[159] K. S. Stelle, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).

[160] B. Holdom, Phys. Rev. D **66**, 084010 (2002).

[161] W. Berej, J. Matyjasek, D. Tryniecki, and M. Woronowicz, Gen. Rel. Grav. **38**, 885 (2006).

[162] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. J. Marinov, *Integrals and Series, vol. 1 Elementary Functions* (Fizmatlis, Moscow, 2003).

[163] L. Levin, *Structural Properties of Polylogarithms* (American Mathematical Society, Providence, 1991).

[164] L. Levin, *Polylogarithms and Associated Functions* (North Holland, New York, 1981).

[165] P. B. Gilkey, J. Diff. Geom. **10**, 601 (1975).

[166] A. E. van de Ven, Class. Quant. Grav. **15**, 2311 (1998).

[167] A. C. Ottewill and B. Wardell, Phys.Rev. **D84**, 104039 (2011).

[168] J. Matyjasek, D. Tryniecki, and K. Zwierzchowska, Phys. Rev. D **81**, 124047 (2010).

[169] M. Brown, Class. Quant. Grav. **2**, 535 (1985).

[170] J. Matyjasek, D. Tryniecki, and M. Klimek, Mod.Phys.Lett. **A23**, 3377 (2009).

[171] S. Fulling, R. King, B. Wybourne, and C. Cummins, Class. Quant. Grav. **9**, 1151 (1992).

[172] J. M. Martin-Garcia, R. Portugal, and M. L., Comm. Math. Phys. **177**, 640 (2007).

[173] J. M. Martin-Garcia, D. Yllanes, R. Portugal, and M. L., Comm. Math. Phys. **179**, 586 (2008).

[174] L. Parker and S. M. Christensen, *MathTensor: A System for Doing Tensor Analysis by Computer* (Addison-Wesley, Wesley, 1994).

[175] S. B. Edgar and A. Hoglund, J. Math. Phys. **43**, 659 (2002).

[176] R. S. Palaise, Comm. Math. Phys. **69**, 19 (1979).

[177] S. Deser and B. Tekin, Class. Quant. Grav. **20**, 4877 (2003).

[178] J. Matyjasek and D. Tryniecki, Phys. Rev. D **79**, 084017 (2009).

[179] H. Nariai, Rep. Tohoku Univ. Ser. I. **34**, 160 (1950).

[180] H. Nariai, Rep. Tohoku Univ. Ser. I. **35**, 62 (1951).

[181] P. H. Ginsparg and M. J. Perry, Nucl. Phys. B **222**, 245 (1983).

[182] B. Bertotti, Phys. Rev. **116**, 1331 (1959).

[183] I. Robinson, Phys. Rev. **7**, 351 (1959).

[184] O. J. C. Dias and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. D **68**, 104010 (2003).

[185] M. Caldarelli, L. Vanzo, and Z. Zerbini, arXiv:hep-th/0008136.

[186] N. Dadhich, arXiv:gr-qc/0003026.

[187] J. F. Plebanski and S. Hacyan, J. Math. Phys. **20**, 1004 (1979).

[188] J. Matyjasek, Acta Phys.Polon. **B39**, 3 (2008).

[189] J. Matyjasek and D. Tryniecki, Mod. Phys. Lett. **A24**, 2517 (2009).

[190] L. Kofman and V. Sahni, Phys. Lett. **B127**, 197 (1983).

[191] V. Sahni and L. Kofman, Phys. Lett. **A117**, 275 (1986).

[192] F. Tangherlini, Nuovo Cim. **27**, 636 (1963).

[193] R. C. Myers and M. Perry, Annals Phys. **172**, 304 (1986).

[194] S. Deser, J. Franklin, and B. Tekin, Class. Quant. Grav. **21**, 5295 (2004).

[195] S. Deser and J. Franklin, Am. J. Phys. **73**, 261 (2005).

[196] R. Padmanabhan, *Gravitation Foundations and Frontiers* (Cambridge University Press, Cambridge, 2010).

[197] R. Emparan and H. S. Reall, Living Rev. Relativity **11**, 6 (2008).

[198] S. Tomizawa and H. Ishihara, arXiv:hep-th/1104.1468.

[199] N. A. Obers, Lect.Notes Phys. **769**, 211 (2009).

[200] J. Matyjasek, M. Telecka, and D. Tryniecki, Phys. Rev. D **73**, 124016 (2006).

[201] T. Clunan, S. F. Ross, and D. J. Smith, Class. Quant. Grav. **21**, 3447 (2004).