

Rozdział 3

Wiadomości uzupełniające

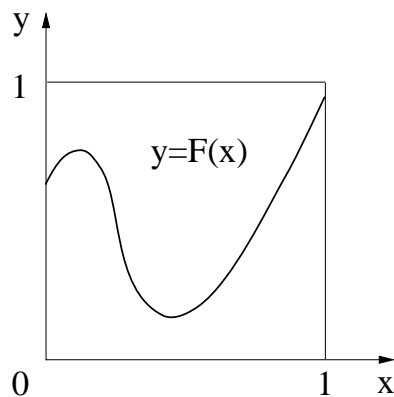
(Fragment z książki: I. Sobol. Metoda Monte Carlo. Moskwa, Nauka, 1985.)

§10. O liczbach pseudolosowych

Większość algorytmów otrzymywania liczb pseudolosowych jest postaci

$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k). \quad (38)$$

Jeśli zadana jest początkowa liczba γ_0 to wszystkie następne $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, wyliczane są według tego samego wzoru (38) dla $k = 1, 2, \dots$, Metoda środka kwadratów z p. 3.3 jest również postaci (38). W jej wypadku zamiast analitycznego wyrażenia $y = F(x)$ podano zbiór operacji, które należy wykonać nad argumentem x w celu otrzymania y .



Rys. 28

10.1. Jaka powinna być funkcja $F(x)$? Następujący przykład pozwala zrozumieć na czym polega podstawowa trudność związana z wyborem $F(x)$.

Przykład Pokażemy, że funkcja $y = F(x)$ przedstawiona na Rys. 28 nie może być używana w procesie generowania liczb pseudolosowych według wzoru (38).

Rozpatrzmy punkty o współrzędnych kartezjańskich

$$(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_3, \gamma_4), (\gamma_5, \gamma_6), \dots$$

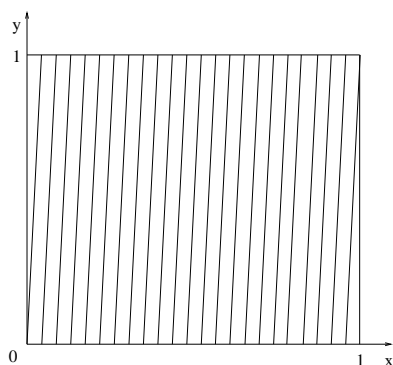
rozmieszczone w jednostkowym kwadracie $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Ponieważ w tym wypadku $\gamma_2 = F(\gamma_1), \gamma_4 = F(\gamma_3), \gamma_6 = F(\gamma_5), \dots$, to wszystkie takie punkty leżą na krzywej $y = F(x)$. Jest to źle gdyż punkty losowe powinny wypełniać równomiernie cały kwadrat.

Z rozpatrzonego przykładu wynika, że używając funkcji $y = F(x)$ we wzorze (38) można spodziewać się sukcesu tylko wtedy, gdy jej grafik dostatecznie gęsto zapełnia cały kwadrat.

Własność taką posiada np. funkcja

$$y = \{gx\}, \quad (39)$$

gdzie g jest dużą liczbą, a $\{z\}$ oznacza ułamkową część liczby z , tzn. $\{z\} = z - [z]$. Na Rys. 29 pokazano wykres takiej funkcji przy $g = 21$. Czytelnik może sobie wyobrazić, jak taki wykres wygląda w przypadku $g = 5^{17}$.



Rys. 29

10.2. Metoda porównań (metoda residuów) Najbardziej powszechną metodą generowania liczb pseudolosowych jest metoda zaproponowana przez D. Lemmera. Podstawę algorytmu stanowi funkcja (39), jednakże dla wygody, jej realizacja na komputerze przebiega nieco inaczej.

Definiuje się ciąg liczb całkowitych m_k , w którym zadana jest liczba początkowa $m_0 = 1$, a następne, m_1, m_2, \dots są wyliczane według tego samego wzoru

$$m_{k+1} = 5^{17} m_k \pmod{2^{40}} \quad (40)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Z liczb m_k otrzymuje się liczby pseudolosowe

$$\gamma_k = 2^{-40} m_k. \quad (41)$$

Formuła (40) mówi, że liczba m_{k+1} jest równa reszcie z dzielenia liczby $5^{17} m_k$ przez 2^{40} . W teorii porównań (patrz dowolny podręcznik z teorii liczb) taką resztę nazywa się *najmniejszym dodatnim residuum modulo* 2^{40} . Stąd pochodzą obie nazwy algorytmu *metoda porównań* i *metoda residuów*. Spotykany termin *metoda kongruencji* jest wynikiem błędnego tłumaczenia. Angielski termin *congruence* posiada dwa znaczenia i oznacza zarówno kongruencję jak też równość modulo.

Formuły (40) i (41) dają się łatwo realizować na komputerach pracujących z liczbami 40 bitowymi z wykorzystaniem polecenia mnożenia liczb podwójnej precyzji. Należy wykorzystać młodsze cyfry iloczynu. Okres ciągu m_0, m_1, m_2, \dots , pokrywa się z odcinkiem aperiodyczności: $P = L = 2^{38}$. Zawarte są w nim wszystkie liczby postaci $4n + 1$ nie większe niż 2^{40} .

10.3. Komputer serii EC Większość maszyn cyfrowych tej serii pracuje z liczbami 31 bitowymi. W ich oprogramowanie matematyczne wchodzi generator RANDU polecany przez specjalistów IBM. Również tutaj realizowana jest metoda residuów:

$$m_{k+1} = g m_k \pmod{2^{31}}, \quad \gamma_k = 2^{-31} m_k, \quad m_0 = 1.$$

Czynnik $g = 65539 = 2^{16} + 3$ został jednak wybrany tak niezręcznie, że generator jest, praktycznie biorąc, zły. Zostało to pokazane przez wielu obliczeniowców dużo wcześniej nim udowodniono nieprzydatność generatora.¹

W tym przypadku można polecić czynnik $g = 5^{15}$. Ciekawe, że liczby z grupy $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ dla $N = 100$ są jawnie źle rozmieszczone w przedziale $(0, 1)$.² Jednak przy wzroście N rozkład poprawia się i przy $N \geq 500$ jest całkowicie zadowalający. Dla rozpatrywanego ciągu $P = L = 2^{29}$.

¹ Forsyth J., Malcolm M., Moular K., *Komputerowe metody obliczeń matematycznych*. M., Mir, 1980. Tłumacz tej książki z niewiadomych powodów uznał za stosowne opatrzyć wezwanie autorów by „nie używać RANDU” następującą uwagą: „To ostrzeżenie odnosi się oczywiście, do amerykańskich czytelników książki” ...

² Pokazał to B. W. Schuhman.

§11. O metodach generowania wielkości losowych

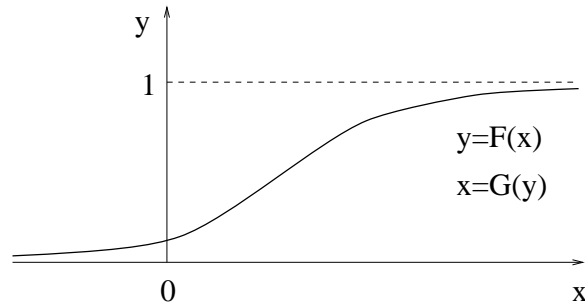
W paragrafie tym przedstawiono najważniejsze metody generowania wielkości losowych. U podstawy klasyfikacji tego rodzaju metod leży ilość liczb losowych potrzebnych do otrzymania jednej wartości ξ . Podstawy klasyfikacji można znaleźć w [3] gdzie pokazano ją po raz pierwszy.

11.1 Przekształcenie postaci $\xi = g(x)$ Pierwsze miejsce wśród tego typu przekształceń zajmuje bezspornie metoda funkcji odwrotnych. Pokażemy, że sposoby generowania dyskretnych i ciągłych wielkości losowych, które zostały pokazane w §4, są szczególnymi przypadkami tej metody.

Przypominamy, że **dystrybuantą (funkcją rozkładu)** dowolnej wielkości losowej nazywa się funkcję

$$F(x) = P\{\xi < x\},$$

określoną dla wszystkich $-\infty < x < \infty$. Oczywiście, $0 \leq F(x) \leq 1$. Łatwo pokazać, że funkcja $F(x)$ nie maleje ze wzrostem x i, że zawsze istnieją granice $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Funkcja $F(x)$ nie musi jednakże być silnie monotoniczna: w pewnych przedziałach może być stała. Nie musi też być ciągła: może posiadać skoki.



Rys. 30

Założmy, że $y = F(x)$ jest ciągła i silnie monotoniczna (Rys. 30). Istnieje wówczas ciągła funkcja odwrotna $x = G(y)$, dla której przy wszystkich $-\infty < x < \infty$ i wszystkich $0 < y < 1$

$$G(F(x)) = x, \quad F(G(y)) = y. \quad (42)$$

Pokażemy, że dystrybuantą zmiennej losowej $G(x)$ jest $F(x)$.

Rzeczywiście,

$$P\{G(\gamma) < x\} = P\{F(G(\gamma)) < F(x)\} = P\{\gamma < F(x)\}.$$

Ponieważ γ ma rozkład jednorodny w przedziale $(0, 1)$, to prawdopodobieństwo $P\{\gamma < F(x)\} = P\{0 < \gamma < F(x)\}$ jest równe długości przedziału $(0, F(x))$, tzn. równa się $F(x)$. Pokazaliśmy więc, że

$$P\{G(\gamma) < x\} = F(x). \quad (43)$$

W konsekwencji, zmienna losowa ξ z ciągłą i monotoniczną funkcją rozkładu $F(x)$ może być generowana według reguły

$$\xi = G(\gamma). \quad (44)$$

Podobnie jak γ , $1 - \gamma$ równomiernie wypełnia przedział $(0, 1)$. Zamiast formuły (44) można więc używać formuły

$$\xi = G(1 - \gamma). \quad (45)$$

Przedstawiona metoda generowania zmiennych losowych według reguły (44) lub (45) nosi nazwę metody funkcji odwrotnych.

Okazuje się, że metodę funkcji odwrotnych można zastosować do generowania liczb losowych ξ dla przypadku dowolnej funkcji rozkładu $F(x)$. W miejscach gdzie funkcja odwrotna (w zwykłym sensie) jest niejednoznaczna lub, gdy nie jest określona dla wszystkich $0 < y < 1$, należy ją rozsądnie rozszerzyć. W ten sposób $x = G(y)$ stanie się jednoznaczna i niemalejąca, i chociaż nie można zagwarantować, że przy wszystkich $-\infty < x < \infty$ i $0 < y < 1$ będą spełnione równości (42) to będzie spełnione żądanie słabsze, a mianowicie nierówności $G(y) \geq x$ i $y \geq F(x)$.

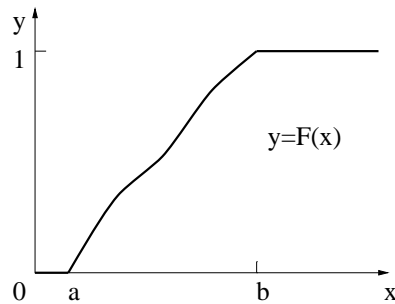
To wystarczy by zamiast (43) zapisać

$$P\{G(\gamma) < x\} = 1 - P\{G(\gamma) \geq x\} = 1 - P\{\gamma \geq F(x)\} = P\{\gamma < F(x)\}.$$

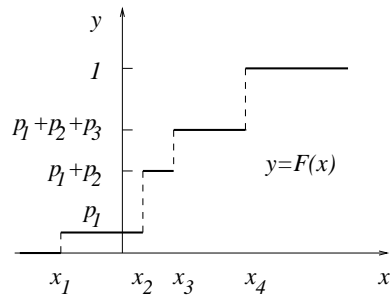
P r z y k ł a d Rozpatrzmy ciągłą wielkość losową ξ z p. 4.2. Łatwo pokazać, że krzywa przedstawiona na Rysunkach 12 i 13 jest częścią dystrybuanty. Jeśli $a < x < b$ to

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{a < \xi < x\} = \int p(x) dx. \quad (46)$$

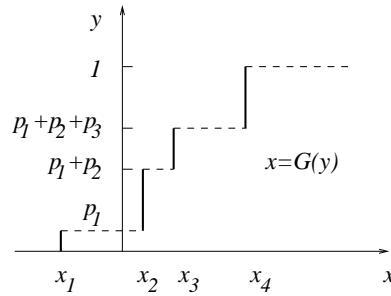
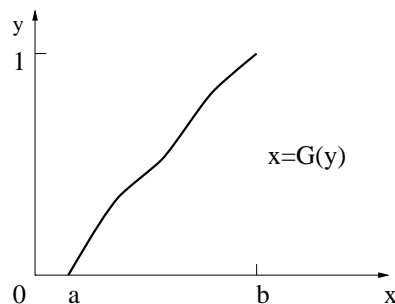
Pełna dystrybuanta została przedstawiona na Rys.31. Pokazano też funkcję odwrotną $x = G(y)$. W przykładzie tym rozsądne rozszerzenie funkcji odwrotnej sprowadziło się do tego, że fragment funkcji $y = F(x)$ uzupełniono przy $x < a$ i $x > b$. Jest rzeczą oczywistą, że metoda z p. 4.2 (patrz (23)) pokrywa się z metodą funkcji odwrotnych (patrz (44)).



Rys. 31



Rys. 32



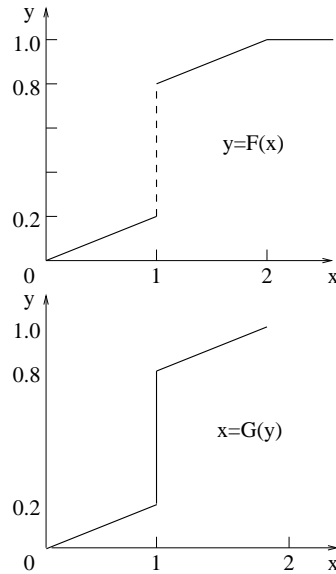
P r z y k ł a d Rozpatrzmy dyskretną zmienną losową ξ z p. 4.1. Funkcję rozkładu tej zmiennej w szczególnym przypadku $n = 4$ pokazuje Rys.32. Wybierając dowolną wartość γ na osi y , zawartą między zerem i jednością stwierdzamy, że odpowiadająca jej wartość $G(\gamma)$ jest równa jednej z wartości x_i takiej, że

$$P\{G(\gamma) = x_i\} = p_i.$$

Widać stąd, że metoda z p. 4.1 jest również metodą funkcji odwrotnych.

P r z y k ł a d Rozpatrzmy wielkość losową ξ typu mieszanego, której rozkład z prawdopodobieństwem 0.4, jest równomierny w przedziale $0 < x < 2$ i z prawdopodobieństwem 0.6 zmienna ta przyjmuje wartość 1. Na Rys.33 pokazano nieciągłą dystrybuantę $F(x)$ tej zmiennej oraz funkcję odwrotną $G(y)$. Ponieważ

$$F(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 < x < 1, \\ 0.2x + 0.6, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

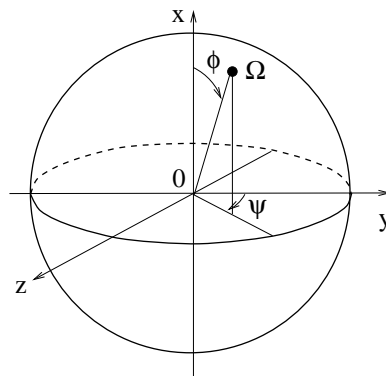


Rys. 33

to z (44) otrzymujemy następującą regułę losowania ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 5\gamma, & 0 < \gamma < 0.2, \\ 1, & 0.2 < \gamma < 0.8, \\ 5(\gamma - 0.6), & 0.8 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Wybór losowego kierunku w przestrzeni Kierunek będziemy zadawać za pomocą wektora jednostkowego wystawionego w początku układu współrzędnych. Końce takich wektorów leżą na sferze jednostkowej. Powiedzenie *dowolny kierunek* jest równoważne stwierdzeniu, że koniec wektora kierunkowego reprezentuje losowy punkt Ω o rozkładzie równomiernym na powierzchni sfery. Prawdopodobieństwo tego, że Ω wypadnie w dowolnym elemencie powierzchni dS jest równe $dS/(4\pi)$.



Rys. 34

Wyberzmy na sferze współrzędne sferyczne (ϕ, ψ) z osią biegunową Ox (Rys.34). Wówczas

$$dS = \sin \phi d\phi d\psi,$$

gdzie $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$.

Oznaczmy przez $p(\phi, \psi)$ gęstość punktu losowego (ϕ, ψ) . Z żądania

$$p(\phi, \psi) d\phi d\psi = dS/(4\pi)$$

i poprzedniej równości wynika, że

$$p(\phi, \psi) = (4\pi)^{-1} \sin \phi.$$

Na podstawie wspólnej gęstości ϕ i ψ można wyznaczyć oddzielne gęstości obu tych wielkości

$$\begin{aligned} p_1(\phi) &= \int_0^{2\pi} p(\phi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \sin \phi, \\ p_2(\psi) &= \int_0^\pi p(\phi, \psi) d\phi = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Równość $p(\phi, \psi) = p_1(\phi)p_2(\psi)$ pokazuje, że zmienne ϕ i ψ są niezależne. Jest jasne, że ψ ma rozkład równomierny w przedziale $(0, 2\pi)$ i formuła losowania ψ jest

$$\psi = 2\pi\gamma. \quad (47)$$

Formułę wyboru ϕ otrzymamy z metody funkcji odwrotnych (45):

$$F(\phi) = \int_0^\phi p_1(\phi) d\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) = 1 - \gamma,$$

a stąd

$$\cos \phi = 2\gamma - 1. \quad (48)$$

Formuły (47), (48) pozwalają wybrać losowy kierunek. Oczywiście jest, że wartości γ występujące w tych formułach, powinny być niezależne od siebie.

Przekształcenie typu $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$ Ten rodzaj przekształceń obejmuje bardzo często spotykaną w praktyce, metodę superpozycji.

Założymy, że dystrybuanta $F(x)$ wielkości losowej ξ może być przedstawiona jako superpozycja wielu funkcji rozkładu:

$$F(x) = \sum_{k=1}^m c_k F_k(x), \quad (49)$$

gdzie wszystkie $c_k > 0$ i $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 1$. Założymy jednocześnie, że wielkości losowe zadane przez dystrybuanty $F_k(x)$ potrafimy modelować, np. przy pomocy metody funkcji odwrotnych $G_k(x)$.

Wprowadźmy pomocniczą zmienną losową

$$\kappa \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix},$$

tak, że $P\{\kappa = k\} = c_k$. Pokażemy, że jeśli wybierzemy dwie liczby losowe γ_1 i γ_2 i według γ_1 wylosujemy numer κ , a następnie wyliczymy $G_\kappa(\gamma_2)$, to dystrybuantą tej wielkości będzie $F(x)$.

Rzeczywiście, ze znanego wzoru na całkowite prawdopodobieństwo wynika, że

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m P\{G_k(\gamma_2) < x | \kappa = k\} P\{\kappa = k\}.$$

Występujące tutaj prawdopodobieństwo warunkowe jest

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x | \kappa = k\} = P\{G_k(\gamma_2) < x\} = P\{\gamma_2 < F_k(x)\} = F_k(x).$$

W konsekwencji dostajemy

$$P\{G_\kappa(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m F_k(x) c_k = F(x).$$

Jeśli istnieją odpowiadające gęstości to zamiast superpozycji (49) można rozpatrywać superpozycję gęstości:

$$p(x) = \sum_{k=1}^m c_k p_k(x).$$

Przykład w procesie rozpraszania fotonu na zimnym elektronie cosinus kąta rozpraszania $\mu = \cos\theta$ jest wielkością losową o gęstości

$$p(x) = (3/8)(1 + x^2), \quad -1 < x < 1;$$

jest to tzw. prawo Rayleigha. Jeśli zastosujemy metodę funkcji odwrotnych, to otrzymamy równanie sześciennne

$$(1/8)(\mu^3 + 3\mu + 4) = \gamma.$$

Skorzystamy z metody superpozycji kładąc $p(x) = 0.75p_1(x) + 0.25p_2(x)$, gdzie $p_1(x) = 0.5$ jest gęstością stałą, a $p_2(x) = 1.5x^2$. Odpowiadające tym gęstościom funkcje rozkładu są bardzo proste

$$F_1(x) = (x + 1)/2, \quad F_2(x) = (x^3 + 1)/2.$$

Funkcje odwrotne pozwalają zapisać następującą, końcową formułę modelowania

$$\mu = \begin{cases} 2\gamma_2 - 1, & \gamma_1 < 0.75, \\ \sqrt[3]{2\gamma_2 - 1}, & \gamma_1 > 0.75. \end{cases}$$

Przykład Rozpatrzmy dyskretną zmienną losową

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Założymy, że wszystkie prawdopodobieństwa w (50) są postaci $p_i = m_i 2^{-s}$, gdzie m_i są liczbami całkowitymi, $(1 \leq m_i \leq 2^s - 1)$, i wartość s jest wielokrotnie mniejsza niż n . Wówczas, może okazać się rzeczą wygodną przedstawienie ξ w postaci superpozycji nie więcej niż s zmiennych losowych o jednakowo prawdopodobnych wartościach (w p. 4.1 obserwowaliśmy, że takie wielkości łatwo jest modelować).

Wyjaśnimy tę możliwość w konkretnym przykładzie. Niech w (50) $n = 19$ i wszystkie $p_i = m_i/64$. Liczniki m_i przedstawione są w tabelicy 3. Z prawej strony te m_i zapisane są w systemie dwójkowym, v_k oznacza liczbę jedynek w k -tej kolumnie.

T a b l i c a 3

i	m	k					
		1	2	3	4	5	6
1	6			1	1	0	
2	6			1	1	0	
3	5			1	0	1	
4	5			1	0	1	
5	5			1	0	1	
6	5			1	0	1	
7	4			1	0	0	
8	4			1	0	0	
9	3				1	1	
10	3				1	1	
11	3				1	1	
12	3				1	1	
13	3				1	1	
14	2					1	0
15	2					1	0
16	2					1	0
17	1						1
18	1						1
19	1						1
v_k			8	10	12		

Wynika stąd, że ξ można zapisać w postaci superpozycji trzech zmiennych losowych $\xi^{(k)}$ przy $k = 4, 5, 6$: $\xi^{(4)}$ przyjmuje wartości x_1-x_8 z prawdopodobieństwem $1/8$; $\xi^{(5)}$ przyjmuje wartości x_1, x_2, x_9-x_{16} z prawdopodobieństwami $1/10$; $\xi^{(6)}$ przyjmuje wartości $x_3-x_6, x_9-x_{13}, x_{17}-x_{19}$ z prawdopodobieństwami $1/12$.

Współczynniki c_k odpowiadające tym wielkościom, wyliczone według wzoru $c_k = v_k 2^{-k}$, są równe $c_4 = 1/2, c_5 = 5/16, c_6 = 3/16$.

W celu zapisania ostatecznej reguły wybierania ξ wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_{10}) &= (x_1, x_2, x_9, x_{10}, \dots, x_{16}), \\ (z_1, z_2, \dots, z_{12}) &= (x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, \dots, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}). \end{aligned}$$

Otrzymamy formułę

$$\xi = \begin{cases} x_i, & i = 1 + [8\gamma_2], \quad \gamma_1 < 1/2, \\ y_i, & i = 1 + [10\gamma_2], \quad 1/2 < \gamma_1 < 13/16, \\ z_i, & i = 1 + [12\gamma_2], \quad 13/16 < \gamma_1. \end{cases}$$

Jeśli do tego przykładu zastosujemy metodę modelowania z p. 4.1, to okaże się, że trzeba wielokrotnie porównywać γ z $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3$, itd.

Modelowanie zmiennej losowej normalnej Niech ξ będzie normalną zmienną losową z parametrami $a = 0$, $\sigma = 1$. Niech η będzie taką samą zmienną losową niezależną od ξ . Gęstość punktu losowego o współrzędnych kartezjańskich (ξ, η) na płaszczyźnie (x, y) równa się wówczas iloczynowi gęstości ξ i η :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Przejdźmy do współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Niech ρ , θ będą losowymi współrzędnymi biegunowymi punktu (ξ, η) :

$$\xi = \rho \cos \phi, \quad \eta = \rho \sin \phi.$$

Wspólna gęstość ρ , θ jest

$$\bar{p}(r, \phi) = p(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} \right| = \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}.$$

Gęstości ρ , θ wylicza się w prosty sposób

$$\begin{aligned} p_1(r) &= \int_0^{2\pi} \bar{p}(r, \phi) d\phi = r e^{-r^2/2}, \\ p_2(\phi) &= \int_0^\infty \bar{p}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\bar{p}(r, \phi) = p_1(r)p_2(\phi)$, to ρ i θ są niezależne i łatwo je modelować według ich dystrybuant. Funkcje te są w miarę proste:

$$F_1(r) = 1 - e^{-r^2/2}, \quad F_2(\phi) = \phi/(2\pi),$$

gdzie $0 < r < \infty$, $0 < \phi < 2\pi$. Z równań $F_1(\rho) = 1 - \gamma_1$, $F_2(\theta) = \gamma_2$ otrzymamy formuły modelowania:

$$\rho = \sqrt{-2 \ln \gamma_1}, \quad \phi = 2\pi \gamma_2.$$

Końcowe formuły

$$\xi = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cos 2\pi \gamma_2, \quad \eta = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \sin 2\pi \gamma_2$$

pozwalają, na podstawie dwóch liczb γ_1 i γ_2 , wyliczać dwie niezależne wartości normalnej zmiennej losowej z parametrami $a = 0$, $\sigma = 1$. Każda z tych formuł ma jednakże postać $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$.

11.3. Przekształcenie postaci $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ *Przykład.* Wielkość losową ξ , której dystrybuanta $F(x) = x^n$ dla $0 < x < 1$, można wyznaczyć według reguły

$$\xi = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (51)$$

gdzie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ są liczbami losowymi.

W samej rzeczy, jasne jest, że

$$P\{\xi < x\} = P\{\max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i < x\} = P\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\},$$

i ponieważ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ są niezależne, to

$$P\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\} = P\{\gamma_1 < x\} \dots P\{\gamma_n < x\} = x^n$$

Jeśli będziemy modelować ξ metodą funkcji odwrotnych (44), to z równania $\xi^n = \gamma$ otrzymamy, że

$$\xi = \sqrt[n]{\gamma}. \quad (52)$$

Porównując (51) z (52) dochodzimy do następującego wniosku: *zamiast wyciągać n -ty pierwiastek z liczby losowej można znajdować największą spośród n liczb losowych.*

P r z y k ł a d W p. 5.2 rozpatrzono prosty strumień zgłoszeń, w przypadku, którego przedział czasu τ między dwoma kolejnymi zawiadomieniami jest eksponencjalną wielkością losową. W bardziej złożonych strumieniach, nazywanych *strumieniami Erlanga*, przedział τ jest wielkością losową o gęstości

$$p(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}, \quad (53)$$

w której $0 \leq x < \infty$. Ponieważ funkcja

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

nazywa się funkcją *gamma*, to również gęstość (53) nazywana jest *rozkładem gamma*. Okazuje się, że wielkość (53) można losować według wzoru

$$\xi = -(1/a) \ln(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n).$$

Nie będziemy go dowodzić. Zauważymy tylko, że formuła (27) jest szczególnym przypadkiem ostatniego wzoru dla $n = 1$.

Wykorzystanie statystyk porządkowych Wybierzmy n liczb losowych $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ i uporządkujmy je w kolejności rosnącej:

$$\gamma_{(1)} \leq \gamma_{(2)} \leq \dots \leq \gamma_{(s)} \leq \dots \leq \gamma_{(n)}.$$

Wielkość $\gamma_{(s)}$ nazywana jest *s-tą porządkową statystyką rozkładu równomiernego*. Jest jasne, że $\gamma_{(s)}$ zależy od wszystkich $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Gęstość rozkładu $\gamma_{(s)}$ jest znana³: dla $0 < x < 1$ gęstość jest równa

$$p(x) = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}. \quad (54)$$

Oznacza to, że różne wielkości losowe o takich gęstościach można modelować za pomocą statystyk porządkowych.

Niech będą zadane liczby naturalne s i t . Połóżmy $n = s + t - 1$. Gęstość (54) przejdzie w tzw. *rozkład beta*:

$$p(x) = x^{s-1} (1-x)^{t-1} / B(s, t), \quad 0 < x < 1, \quad (55)$$

gdzie $B(s, t)$ jest funkcją *beta*

$$B(s, t) = \Gamma(s)\Gamma(t)/\Gamma(s+t) = (s-1)!(t-1)!/(s+t-1)!.$$

W celu modelowania wielkości losowej ξ o rozkładzie beta należy wziąć liczby losowe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s+t-1}$ i spośród nich wybrać $\gamma_{(s)}$. Zauważmy, że nadrzędną statystyką porządkową $\gamma_{(n)}$ jest rozpatrywana wcześniej wielkość losowa $\max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.

Sposoby modelowania rozkładów beta i gamma o parametrach ułamkowych rozpatrywane są w [4].

11.4. Przekształcenia postaci $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$ Do tej klasy należą przekształcenia, w których liczba zmiennych losowych używanych przy

³ Schemat dowodu. Wybierzmy dowolny przedział $(x, x + \Delta x)$. Z każdą wartością γ zwiążemy trzy losowe zdarzenia

$$A_1 = \{\gamma < x\}, \quad A_2 = \{x \leq \gamma < x + \Delta x\}, \quad A_3 = \{x + \Delta x \leq \gamma\}.$$

Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są równe $p_1 = x, p_2 = \Delta x, p_3 = 1 - x - \Delta x$.

Rozważmy n niezależnych wartości $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Zdarzenie i wystąpi v_i razy, $v_1 + v_2 + v_3 = n$. Jeśli $m_1 + m_2 + m_3 = n$ i dla wszystkich i $0 \leq m_i \leq n$, to zgodnie z prawem wielomianowym

$$P\{v_1 = m_1, v_2 = m_2, v_3 = m_3\} = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}.$$

Nie jest trudno zrozumieć, że

$$P\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\} = P\{v_1 = s-1, v_2 = 1, v_3 = n-s\} + O((\Delta x)^2).$$

Dzieląc przez Δx i przechodząc do granicy $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymamy poszukiwaną gęstość

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\}}{\Delta x} = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}. \quad (54)$$

obliczaniu jednej wartości ξ jest losowa i dowolnie duża. Średnia liczba zmiennych losowych potrzebnych do wyliczenia pojedynczego ξ musi być oczywiście skończona. Wśród przekształceń tego typu najczęstsze są metody akceptacji. Należy do nich przykładowo, metoda Neumanna opisana w p. 4.3.

Podstawowa właściwość metody akceptacji: oprócz formuły modelowania zadany jest warunek akceptacji; na przykład, $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ przy warunku $h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0$. W celu wybrania ξ tą metodą, należy wziąć liczby losowe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ i jeśli spełniony jest warunek akceptacji wyznaczyć ξ . W przeciwnym wypadku odrzuca się te liczby i wybiera nowe.

Prawdopodobieństwo, że grupa liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ nie zostanie odrzucona, równe

$$\epsilon = P\{h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0\},$$

nazywa się efektywnością metody akceptacji. To bardzo ważna charakterystyka metody. Przy wyborze N grup liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ otrzymuje się średnio ϵN wartości ξ . Oznacza to, że aby otrzymać ϵN losowych wartości ξ zużywa się Nm liczb losowych. Na jedną wybraną wartość ξ zużywa się natomiast średnio m/ϵ liczb losowych. Metoda ta staje się więc nieefektywna dla $\epsilon \rightarrow 0$.

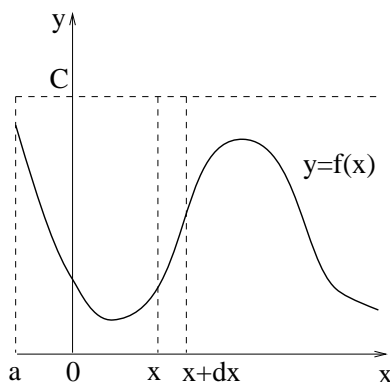
Uogólniona metoda Neumanna Zakładamy, że gęstość $p(x)$ wielkości losowej ξ określonej w przedziale $a < x < b$ da się zapisać w postaci

$$p(x) = p_1(x)f(x),$$

gdzie $p_1(x)$ jest gęstością pomocniczej zmiennej losowej η' , którą potrafimy modelować, a czynnik $f(x)$ jest ograniczony: $f(x) \leq C$. Przedział (a, b) nie musi być skończony.

Wielkość ξ można generować następująco: 1) wybieramy wartość η' oraz losową liczbę γ niezależną od η' i wyliczamy $\eta'' = C\gamma$. 2) Jeśli $\eta'' < f(\eta')$ to kładziemy $\xi = \eta'$, w przeciwnym wypadku odrzucamy η', γ i wybieramy nową parę wartości η', γ .

Dowód. Prawdopodobieństwo, że punkt (η', η'') znajdzie się w pasie $(x, x + dx)$, (Rys. 35), jest równe $p_1(x)dx$. Ponieważ η'' ma w przedziale $0 < y < C$ rozkład równomierny, to prawdopodobieństwo warunkowe, że punkt ten nie zostanie odrzucony jest równe $f(x)/C$, a więc jest proporcjonalne do $f(x)$. W konsekwencji, prawdopodobieństwo znalezienia się wartości $\xi = \eta'$ w przedziale $(x, x + dx)$ jest proporcjonalne do iloczynu $p_1(x)dx \times f(x) = p(x)dx$.



Rys. 35

Prawdopodobieństwo akceptacji można obliczyć drogą sumowania warunkowych prawdopodobieństw akceptacji $f(x)/C$, a mianowicie

$$\epsilon = \int_a^b \frac{f(x)}{C} p_1(x) dx = \frac{1}{C} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{C}.$$

Metoda Neumanna (p. 4.3) jest szczególnym przypadkiem metody uogólnionej, w której wybrano $p_1(x) = 1/(b-a)$ oraz $f(x) = (b-a)p(x)$. Ponieważ $p(x) \leq M_0$ to $f(x) \leq (b-a)M_0$. Efektywność metody Neumanna jest więc $\epsilon = 1/(b-a)M_0$.

Wynik ten można łatwo otrzymać bezpośrednio z Rys. 14 jeśli wyobrazimy, że punkt Γ ma równomierny rozkład w prostokącie $a < x < b$, $0 < y < M_0$. Efektywność losowania jest wtedy równa stosunkowi pola pod krzywą $y = p(x)$ do pola całego prostokąta

$$\epsilon = \frac{1}{(b-a)M_0} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{(b-a)M_0}.$$

P r z y k ł a d Rozpatrzmy gęstość $p(x) = v(x)x^{-1/3}$ dla $0 < x < 1$, gdzie funkcja $v(x)$ jest ograniczona $v(x) \leq A$. Jako gęstość pomocniczą wybierzmy $p_1(x) = (2/3)x^{-1/3}$, którą łatwo jest modelować metodą funkcji odwrotnych: $\eta' = \gamma^{3/2}$. Wówczas $f(x) = p(x)/p_1(x) = (3/2)v(x) \leq (3/2)A$. Warunek akceptacji $\eta' \leq f(\eta')$ można nieco uprościć dzieląc przez $3/2$. Dostajemy następującą metodę losowania ξ z gęstością $p(x)$. 1) Wybiera się γ_1, γ_2 i oblicza się następnie $\eta' = (\gamma_1)^{3/2}$. 2) Jeżeli $A\gamma_2 < v(\eta')$ to należy położyć $\xi = \eta'$, w przeciwnym wypadku wybiera się nowe γ_1, γ_2 .

Tablica A. 400 cyfr losowych*)

86515	90795	66155	66434	56558	12332	94377	57802
68186	03393	42502	99224	88955	53758	91641	18867
41686	42163	85181	38967	33181	72664	53807	00607
86522	47171	88059	89342	67248	09082	12311	90316
72587	93000	89688	78416	27589	99528	14480	50961
52452	42499	33346	83935	79130	90410	45420	77757
76773	97526	27256	66447	25731	37525	16287	66181
04825	82134	80317	75120	45904	75601	70492	10274
87113	84778	45863	24520	19976	04925	07824	76044
84754	57616	38132	64294	15218	49286	89571	42903

Tablica B. 88 liczb normalnych**)

0.2005	1.1922	-0.0077	0.0348	1.0423	-1.8149	1.1803	0.0033
1.1609	-0.6690	-1.5893	0.5816	1.8818	0.7390	-0.2736	1.0828
0.5864	-0.9245	0.0904	1.5068	-1.1147	0.2776	0.1012	-1.3566
0.1425	-0.2863	1.2809	0.4043	0.6379	-0.4428	-2.3006	-0.6446
0.9516	-1.7708	2.8854	0.4686	1.4664	1.6852	-0.9690	-0.0831
-0.5863	0.8574	-0.5557	0.8115	-0.2676	-1.2496	-1.2125	1.3846
1.1572	0.9990	-0.1032	0.5405	-0.6022	0.0093	0.2119	-1.4647
-0.4428	-0.5564	-0.5098	-1.1929	-0.0572	-0.5061	-0.1557	-1.2384
-0.3924	1.7981	0.6141	-1.3596	1.4943	-0.4406	-0.2033	-0.1316
0.8319	0.4270	-0.8888	0.4167	-0.8513	1.1054	1.2237	-0.7003
0.9780	-0.7679	0.8960	0.5154	-0.7165	0.8563	-1.1630	1.8800

*) Liczby losowe imitują wartości wielkości losowej o rozkładzie (22).

**) Liczby normalne imitują wartości normalnej zmiennej losowej (gaussowskiej) ζ , o parametrach rozkładu $a = 0, \sigma = 1$.

LITERATURA

1. Buslenko, N.P., *Metod statystytscheskyh yspytanyi (metod Monte-Karlo)*. Ed. Yu.A. Schreider, Moskwa, Fizmatgiz, 1962.
2. Ermakov, S.M., *Metod Monte-Karlo y smyeznhnye vaprosy*, Moskwa, Nauka, 1975.
3. Sobol, I.M., *Tschyslennye metody Monte-Karlo*, Moskwa, Nauka, 1973.
4. Ermakov, S.M, Mikhaylov, G.A., *Kurs statystytscheskovo modelyrowanya*, Moskwa, Nauka, 1976.