LITERATURA: Bender, Orszag, Rozdział I.

1 Przegląd typów równań różniczkowych zwyczajnych

Równanie różniczkowe zwyczajne n-tego rządu zapisujemy w postaci

$$y^{(n)}(x) = F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)]\,. \tag{1}$$

Funkcja F może w ogólności być funkcją nieliniową względem y i pochodnych y. Poniżej, skrót rr oznacza równanie różniczkowe.

Równania separowalne

P r z y k ł a d. 1.
Separowalne rr.

$$y'(x) = a(x)b(y)\,.$$

Rozwiązanie ogólne dostaniemy wykonując bezpośrednie całkowanie

$$\int^y \frac{dt}{b(t)} = \int^x a(s)ds + c_1\,.$$

Równania jednorodne i niejednorodne

Liniowe rr zwyczajne.

$$Ly(x) = f(x)\,,$$

gdzie

$$L = p_0(x)d/dx + \ldots p_{n-1}d^{n-1}/dx^{n-1} + d^n/dx^n$$

nazywa się **jednorodnym** jeśli $f(x) = 0$ i **niejednorodnym** w przypadku $f(x) \neq 0$.

Równania nieliniowe

Przykładem **nieliniowego** równania różniczkowego jest równanie Riccatiego.

P r z y k ł a d. 2.
Równanie Riccatiego.

$$y' = \frac{A^2}{x^4} - y^2$$

ma ogólne rozwiązanie

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{A}{x^2}\frac{c_1 - e^{2A/x}}{c_1 + e^{2A/x}}\,.$$

Równania bezskalowe

Równania, których nie zmienia transformacja $x \to ax$, gdzie a jest stałą, są tzw. równaniami bezskalowymi.

P r z y k ł a d. 3.

$$y'' = yy'/x \,.$$

Rozwiązaniem ogólnym jest

$$y(x) = 2c_1 \tan(c_1 \ln x + c_2) - 1) \,.$$

Istnieje specjalne rozwiązanie tego równania, mianowicie $y = c_3$, którego nie da się otrzymać z rozwiązania ogólnego.

Układy równań pierwszego rzędu

Równanie (1) jest równoważne układowi równań pierwszego rzędu. Wprowadzając oznaczenie $y_k(x) = d^k/dx^k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

$$\frac{d}{dx} y_k(x) = y_{k+1}(x),, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2 \,,$$

$$\frac{d}{dx} y_{n-1}(x) = F[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)] \,.$$

Odwrotnie, układ równań pierwszego rzędu

$$\frac{dz_k}{dx} = f_k(x, z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad k = 1, 2, \ldots n \,,$$

można zapisać w postaci równania różniczkowego n-tego rzędu. Różniczkując kolejno z_1 po x dostaniemy

$$\frac{d^j}{dx^j} z_j = f_1^{(j)}(x, z_1, z_2, \ldots, z_n) \,, \quad j = 1, 2, \ldots, n \,.)$$

Zagadnienie początkowe i brzegowe

W zagadnieniu początkowym stałe, które pojawiają się w rozwiązaniach równań różniczkowych wyznacza się na podstawie zadanych y i $n-1$ pochodnych $y', \ldots, y^{(n-1)}$ w jednym punkcie $x = x_0$

$$y(x_0) = a_0 \,, \quad y'(x_0) = a_1 \,, \ldots, y(n-1) = a_{n-1} \,.$$

W zagadnieniu brzegowym, stałe wyznacza się z bardziej złożonych warunków, np.

$$y(x_1) = a_0, y'(x_2) = a_2, \ldots, y'''(x_1) + [y(x_2)]^2 = a_5] \,,$$

itd. Zagadnienie brzegowe jest w swojej naturze zagadnieniem globalnym. Problemy początkowe są zazwyczaj łatwiejsze od problemów brzegowych.

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności obu zagadnień dokładnie określają warunki przy których zagadnienia te są rozwiązywalne. Nie będziemy się tym problemem zajmować. Słuchaczy odsyłamy do bogatej literatury przedmiotu .

P r z y k ł a d. 4.
Zagadnienia początkowe z jednoznacznym rozwiązaniem.
(a) $y' = sin(xy)[y(0) = 1]$
(b) $y' = (x + y)x^2y^2[y(0) = 1]$
(c) $y' = e^x x/y[y(0) = 1]$
(d) $y'' = y^2 + e^x[y(0) = y'(0) = 0]$
(e) $y''' = e^{xyy'}[y(0) = y'(0) = y''(0) = 0]$
Pomimo tego, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania, nie znamy ich analitycznej postaci.

W przypadku gdy F nie jest funkcją ciągłą wówczas twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania może nie być spełnione.

P r z y k ł a d. 5.
Niejednoznaczne rozwiązania równania różniczkowego: $y' = y^{1/3}[y(0) = 0]$. Równanie to ma dwa rozwiązania $y = 0$ i $y = (2x/3)^{3/2}$.

2 Elementy teorii jednorodnych równań różniczkowych

Dokonamy krótkiego przeglądu teorii liniowych jednorodnych równań różniczkowych zwyczajnych.

Niezależność liniowa rozwiązań

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_0(x)y = 0\,, \tag{2}$$

jest postaci

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j y_j(x) \tag{3}$$

gdzie c_j są stałymi całkowania, a funkcje $\{y_j(x)\}$ tworzą zbiór liniowo niezależnych rozwiązań równania (2). W obszarze gdzie współczynniki $p_0(x), \ldots, p_{(n-1)}$ są ciągłymi funkcjami x, istnieje dokładnie n liniowo niezależnych rozwiązań równania (2).

Wrońskian

Wrońskianem nazywamy wyznacznik

$$W(x) = W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

gdzie $\{y_j(x)\}$ jest zbiorem funkcji określonych na zadanym przedziale I.

Wrońskian znika tożsamościowo na I wtedy i tylko wtedy gdy funkcje $\{y_j(x)\}$ są na I liniowo zależne. Jeśli $\{y_j\}$ są liniowo niezależne, wówczas $W(x)$ nie znika, z wyjątkiem, być może, punktów izolowanych.

P r z y k ł a d. 6.
Zależność liniowa. Ponieważ $W[e^x, e^{-x}, \cosh x] \equiv 0$ dla wszystkich x, więc funkcje $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$ tworzą zbiór funkcji liniowo zależnych.

P r z y k ł a d. 7.
Niezależność liniowa. W celu sprawdzenia czy rozwiązanie $y(x) = c_1 e^x + c_2(1+x)x$ równania $y'' - y'(1+x)/x + y/x = 0$ jest ogólne, obliczamy Wrońskian: $W[1+x, e^x] = xe^x$. $W[]$ znika tylko w punkcie $x = 0$. Stąd wnosimy, że dla wszystkich x, funkcje $\{1+x, e^x\}$ są liniowo niezależne.

Jednorodne równania liniowe posiadaję bardzo ważną własność: Wrońskian W dla dowolnych n rozwiązań równania spełnia proste równanie pierwszego rzędu

$$W'(x) = -p_{n-1}(x)W(x)\,.$$

Jego rozwiązanie (z dokładnością do stałego czynnika) nosi nazwą formuły Abela-Liouville'a

$$W(x) = \exp[-p_{n-1}(t)dt]\,. \qquad (5)$$

Wynika stąd, że Wrońskian można obliczyć bez znajomości rozwiązań jednorodnego, liniowego równania różniczkowego.

Z a d a n i e 1.
Pokazać słuszność wzoru Abela-Liouville'a (5).

3 Równania niejednorodne

Niejednorodne liniowe równania różniczkowe są tylk trochę trudniejsze od równań jednorodnych. Jest tak dlatego, iż różnica dowolnych dwu rozwiązań równania $Ly = f(x)$ jest rozwiązaniem równania $Ly = 0$. Dlatego rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą dowolnego rozwiązania szczególnego równania $Ly = f(x)$ i ogólnego rozwiązania równania $Ly = 0$.

P r z y k ł a d. 8.
Znając rozwiązania $y = x$, $y = x^2$ i $y = x^3$ równania $Ly = f(x)$ drugiego rzędu można, nie znając L oraz f skonstruować rozwiązanie ogólne. Ponieważ różnice $x - x^2$ i $x^2 - x^3$ są rozwiązaniami równania $Ly = 0$ i są liniowo niezależne, więc ogólnym rozwiązaniem równania $Ly = 0$ jest $y = c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^3)$. Ogólnym rozwiązaniem równania $Ly = f(x)$ jest natomiast $y = c_1(x - x^2) + c_2(x^2 - x^3) + x$.

Równania różniczkowe pierwszego rzędu rozwiązuje się znajdując dla nich czynnik całkujący $I(x)$. Jest to funkcja tylko zmiennej x. Dla równania $y'(x) + p_0(x)y(x) = f(x)$ czynnik całkujący jest równy $y(x) = \exp[\int^x p(t)dt]$. Mnożąc równania przez $I(x)$ dostajemy $I(x)y' + p_0(x)y(x)I(x) = (d/dx)[I(x)y(x)] = I(x)f(x)$. Całkowanie daje

$$y(x) = \frac{c_1}{I(x)} + \frac{1}{I(x)} \int^x f(t)I(t)dt\,.$$

P r z y k ł a d. 9.
Równanie $y' = y/(x+y)$ nie jest liniowe w Y lecz jest liniowe w x. Pokazuje to zmiana zmiennej niezależnej x ze zmienną zależną y.

$$\frac{d}{dy}x(y) = \frac{x(y)+y}{y}\,.$$

Czynnik całkujący jest równy $I(y) = 1/y$. Stąd $(d/dy)(x/y) = 1/y$ i $x(y) = y \ln y + c_1$.

Istnieje wiele technik standardowych rozwiązywania niejednorodnych równań wyższych rzędów. Są to:

- metoda wariacji parametrów
- metoda funkcji Greena
- metoda redukcji rzędu równania
- metoda parametrów nieoznaczonych

Metody te scharakteryzowane są w części: Metody rozwiązywania równań

4 Problemy własne

Problemami własnymi nazywamy problemy brzegowe, które posiadają nietrywialne rozwiązania tylko dla specjalnych wartości parametru, powiedzmy E, od którego zależy równanie.

P r z y k ł a d. 10.
Prosty problem własny. Równanie

$$y'' + Ey = 0[y(0) = y(1) = 0]\,, \tag{6}$$

posiada dla każdego E trywialne (zerowe) rozwiązanie $y(x) = 0$. Tylko dla specjalnych wartości E istnieją rozwiązania niezerowe.

$$E = E_n = (n\pi)^2\,, \quad y(x) = A_n \sin n\pi x\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Funkcje $\sin n\pi x$ są funkcjami własnymi, a E_n są wartościami własnymi równania.

Łatwo pokazać, że nie istnieją inne wartości własne. Ogólnym rozwiązaniem równania (6) jest $y = A\sin(x\sqrt{E}) + B\cos(x\sqrt{E})$. Z warunku $y(0) = 0$ wynika, że $B = 0$, natomiast warunek $y(1) = 0$ prowadzi do równania $A\sin\sqrt{E} = 0$. Jeśli $A = 0$ to $y(x) \equiv 0$, a więc jest to rozwiązanie zerowe. Warunkiem na istnienie rozwiązań niezerowych jest $\sin\sqrt{E} = 0$ lub $E = (n\pi)^2(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Zauważymy, że $E = 0$ nie jest wartością własną bo wtedy $y(x) \equiv 0$.

Jeśli E jest wartością własną jednorodnego zagadnienia brzegowego, wówczas rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Oprócz rozwiązania $y(x) = 0$ istnieje nieskończenie wiele rozwiązań ędących iloczynem stałei i funkcji własnej. Z drugiej strony, jeśli E nie jest wartością własną, to to rozwiązanie trywialne $y(x) \equiv 0$ jest jednoznaczne.

P r z y k ł a d. 11.

$$y'' + Ey = 0[y(0) = 0\,, y'(1) = 0],.$$

Ogólnym rozwiązaniem spełniającym warunek $y(0) = 0$ jest $y(x) = A\sin(x\sqrt{E})$. Warunek $y'(1) = 0$ wymaga aby $A\sqrt{E}\cos\sqrt{E} = 0$. Stąd, wartości własne są równe $E = (1/2\pi)^2$, $(3/2\pi)2$, $(5/2\pi)^2$,. . .

P r z y k ł a d. 12.
Zagadnienie własne na dziedzinie nieskończonej.

$$y'' + (E - 1/4x^2)y = 0\,, -\infty < x < \infty, [y(\pm\infty) = 0]\,.$$

Jest to tzw. oscylator kwantowy. Dla każdego E problem posiada rozwiązanie trywialne $y(x) = 0$. Wartości własne równania są $E = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$ Wartości własnej $E = n + 1/2$ odpowiada funkcja własna

$$y(x) = AH_n(x)e^{-x^2/4}\,,$$

gdzie A jest stałą, a $H_n(x)$ są wielomianami Hermite'a stopnia n $[H_0(x) = 1, H_1(x) = x, H_2(x) = x^2 - 1, \ldots]$ Wartości $E = n + 1/2$ są jedynymi wartościami własnymi równania.

P r z y k ł a d. 13.
Transcendentne wartości własne. Ogólnym rozwiązaniem równania

$$y'' + (E - x)y = 0\,, (0 \le x < \infty)[y(0) = 0\,, y(\infty) = 0]$$

znikającym w nieskończoności, jest

$$y(x) = A\mathrm{Ai}(x - E)\,,$$

gdzie Ai są funkcjami Airy'ego. Warunek brzegowy $y(x) = 0$ daje równanie na wartości własne

$$\mathrm{Ai}(-E) = 0,.$$

Otrzymane równanie na funkcje własne jest równaniem transcendentnym i zera musimy wyznaczyć numerycznie. Oto kilka pierwszych, przybliżonych zer równania na wartości własne: $E_0 = 2.333\,, E_1 = 4.088\,, E_2 = 5.521\,, E_3 = 6.787\,, E_4 = 7.944\,, E_5 = 9.023$.

P r z y k ł a d. 14.
Skończona liczba wartości własnych zagadnienia własnego. W przypadku równania

$$y'' + (E + v\sec h^2 x)y = 0\,, \quad y \to 0 \text{ przy } |x| \to \infty\,,$$

liczba wartości własnych jest skończona. Są one dane równaniem

$$E = -\frac{1}{4}(2n + 1 - \sqrt{1+4V})^2\,,$$

gdzie $V = (\sqrt{1+4V})/2$ i n jest liczbą całkowitą. Dokładne rozwiązanie dyskutowanego tutaj równania własnego można znaleźć w podręczniku Landaua i Lifszyca, §23.

P r z y k ł a d. 15.
Zagadnienie własne Sturma-Liouville'a. Problem własny

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + d(x)Ey(x) = 0\,, \quad [y(\alpha) = y(\beta) = 0]$$

można zawsze przetransformować do tzw. problemu Sturma-Liouvilla postaci

$$\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx} + [q(x) + Er(x)]y = 0\,, \quad [y(\alpha) = y(\beta) = 0]\,.$$

Dowodzi się, że jeśli

$$p(x) > 0\,, \quad q(x) \le 0\,, \quad \alpha \le x \le \beta\,,$$

to istnieje nieskończenie wiele wartości własnych $E = E_0, E_1, E_2, \ldots$, które wszystkie są rzeczywiste i dodatnie. Funkcje własne $y_n\,, (n = 10, 1, 2, \ldots)$ można znormalizować tak, że tworzą one układ ortonormalny względem funkcji wagowej $r(x$

$$\int_\alpha^\beta r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \delta_{mn}\,.$$

P r z y k ł a d. 16.
Zagadnienie własne Schrödingera. Jeśli $V(x)$ jest funkcją dodatnią taką, że

$$V(x) \to \infty \text{ przy } |x| \to \infty$$

to problem własny Schrödingera

$$-y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x)\,, \quad y(\pm\infty) = 0$$

ma nieskończenie wiele dodatnich wartości własnych – energii cząstki w potencjale $V(x)$. Istnieje wąska grupa funkcji V – potencjałów, dla których problem posiada rozwiązania analityczne.

5 Równania różniczkowe w płaszczyźnie zespolonej

Niezależną zmienną zespoloną będziemy oznaczać przez z. W obszarze gdzie istnieją pochodne zespolone $y'(z)$ funkcji $y(z)$, zarówno funkcja $y(z)$ jak i jej wszystkie pochodne są funkcjami analitycznymi. Ogranicza to rodzaje równań różniczkowych, które można sformułować na płaszczyźnie zespolonej.

P r z y k ł a d. 17.
Równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Równanie $dy/dx = |x|$ ma sens na osi rzeczywistej. Jego rozwiązaniem jest $y(x) = 1/2x|x| + c_1$. W przypadku zmiennej zespolonej z, równanie to traci sens gdyż $y' = |z|$ nie jest funkcją analityczną, a zapisując $y'(z)$ rozumiemy, że zarówno $y(z)$ jak i $y'(z)$ są analityczne.

W ogólnym przypadku, zapis $dy/dz = g(z)$ ma sens wtedy gdy w jakimś obszarze funkcja $g(z)$ jest analityczna.