1 Klasyfikacja osobliwości liniowych równań różniczkowych zwyczajnych

Rozważamy równanie

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0\,. \tag{1}$$

Zmienna niezależna x może być rzeczywista lub urojona.

Definicja 1 *Punkt x_0 nazywamy* zwykłym *lub* zwyczajnym *punktem równania gdy wszystkie współczynniki $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ są w jego otoczeniu funkcjami analitycznymi.*

P r z y k ł a d. 1.
a) Równanie $y'' = e^x y$. Wszystkie punkty tego równania z wyjątkiem $x_0 = \infty$ są punktami zwykłymi gdyż funkcja e^x jest holomorficzna.

b) Wszystkie punkty x_0 równania $x^5 y''' = y$, z wyjątkiem punktu $x_0 = 0$ są punktami zwyczajnymi.

c) Równanie $y' = |x|y$ nie posiada punktów zwykłych w zespolonej płaszczyźnie x ponieważ x nie jest nigdzie analityczna w zespolonej płaszczyźnie x.

Fuchs udowodnił (1866), że wszystkie liniowo niezależne rozwiązania (1) są analityczne w otoczeniu punktu zwyczajnego. Rozwiązanie w otoczeniu x_0 można rozwinąć w szereg Taylora. Promień zbieżności szeregu jest co najmniej równy odległości do najbliższej osobliwości któregoś ze współczynników $p_i(x)$ równania (1). Osobliwości rozwiązania równania pokrywają się z osobliwościami jego współczynników. Rozwiązanie w punkcie zwyczajnym x_0 ma więc postać

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\,. \tag{2}$$

P r z y k ł a d. 2.
Szeregi Taylora w obszarze punktów zwyczajnych. Równanie $(x^2+1)y' + 2xy = 0$ posiada punkt zwyczajny w $x_0 = 0$. Rozwiązanie $y = c/(1+x^2)$ można tu rozwinąc w szereg Taylora o promieniu zbieżności równym 1. Jest to odległość do osobliwości współczynnika (stojącego przy y'), $x = \pm i$.

Definicja 2 *Punkt x_0 nazywa się* regularnym punktem osobliwym *(RPO) równania jeśli nie wszystkie współczynniki $p_k(x)$ równania są w jego otoczeniu analityczne, natomiast analitycznymi w otoczeniu x_0 są iloczyny $(x-x_0)^{n-k}p_k(x)$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$.*

P r z y k ł a d. 3.
a) Równanie $(x-1)y''' = y$ posiada RPO w punkcie $x = 1$.

b) Równanie $x^2y'' + xy' = y$ ma RPO w $x = 0$.
c) $x^3y' = (x+1)y$ nie posiada RPO w $x = 0$.

Rozwiązanie równania (1) może być analityczne w RPO. Jeśli nie jest analityczne to jego osobliwość jest biegunem, osobliwością logarytmiczną albo algebraicznym punktem rozgałęzienia. Fuchs pokazał, że zawsze istnieje co najmniej jedno rozwiązanie postaci

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x)\,, \tag{3}$$

gdzie $A(x)$ jest funkcją analityczną i posiada rozwinięcie Taylora o promieniu zbieżności, który jest co najmniej równy odległości do najbliższej osobliwości.

P r z y k ł a d. 4.
Szereg Taylora w otoczeniu RPO. Równanie $y' = y/\sin\ \mathrm{h}x$ posiada RPO w zerze. Rozwiązanie $y(x) = c\ \tan\ \mathrm{h}(x/2)$ jest analityczne lecz posiada bieguny w punktach $x = \pm i\pi$. Promień zbieżności jest więc równy π. Jest to odległość do najbliższej osobliwości funkcji $1/\sin\ \mathrm{h}x$ w płaszczyźnie zespolonej.

Jeśli równanie (1) jest rzędu $n \geq 2$ to istnieje drugie, liniowo niezależne rozwiązanie. Może ono mieć jedną z następujących postaci

$$y(x) = (x - x_0)^\beta B(x)\,, \tag{4}$$

lub

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) \ln(x - x_0) + C(x)(x - x_0)^\beta\,, \tag{5}$$

gdzie funkcje $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ są analityczne.

W ogólności, każde liniowo niezależne rozwiązanie (n-te) jest postaci

$$y(x) = (x - x_0)^\gamma \sum_{i=0}^{n-1} \left[\ln(x - x_0)^i A_i(x)\right]\,, \tag{6}$$

gdzie $A_i(x)$ są analityczne w otoczeniu x_0. Fuchs udowodnił, że jeśli istnieje n rozwiązań postaci (3) do (6) wówczas w najgorszym razie x_0 jest RPO równania.

Definicja 3 *Punkt x_0 ($x_0 \neq \infty$) nazywa się* nieregularnym punktem osobliwym *równania (1) (w skrócie NPO) jeśli nie jest to ani punkt zwyczajny równania ani regularny punkt osobliwy.*

W NPO rozwiązania mogą posiadać istotną osobliwość często w połączeniu z biegunem albo rozgałęzieniem algebraicznym lub logarytmicznym. Nie jest to jednak regułą. Pewne rozwiązania mogą nie posiadać osobliwości i mogą być analityczne w NPO.

Klasyfikacja punktów $x_0 = \infty$

Stosując transformację $x = 1/t$, można odwzorować punkt $x_0 = \infty$ w zero

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{t}, \\
\frac{d}{dx} &= -t^2 \frac{d}{dt}, \\
\frac{d^2}{dt^2} &= t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t^3 \frac{d}{dt}. \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Zamiast klasyfikować ∞ klasyfikujemy punkt zerowy otrzymanego równania. Punkt $x_0 = \infty$ nazywa się PZ, RPO lub NPO jeśli takim punktem jest punkt $t = 0$.

P r z y k ł a d. 5.
Rozpatrzmy następujące równania. Z lewej strony podane są równania oryginalne, a zprawej przetransformowane do współrzędnej $t = 1/x$.

$$(a) \quad \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{2}y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{y}{2t^2} \tag{7}$$

$$(b) \quad \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{2x}y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{y}{2t} = 0, \tag{8}$$

$$(c) \quad \tfrac{dy}{dx} - \tfrac{1}{2x^2}y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = 0. \tag{9}$$

(a) Każdy punkt (7) jest PZ z wyjątkiem ∞. Punkt ∞ jest NPO. Rozwiązanie $y(x) = c\exp(x/2)$ jest analityczne z wyjątkiem punktu $x = \infty$.
(b) Każdy punkt równania (8) z wyjątkiem punktów 0 i ∞ jest PZ. Punkty 0 i ∞ są RPO. Rozwiązanie $y(x) = cx^{1/2}$ jest analityczne wszędzie z wyjątkiem punktu rozgałęzienia w $x_0 = 0$ oraz $x_0 = \infty$.
(c) Z wyjątkiem punktu $x_0 = 0$, który jest NPO, punkty równania (9) są PZ. Rozwiązanie $y(x) = ce^{-1/2x}$ jest analityczne wszędzie wyjąwszy punkt $x_0 = 0$.

P r z y k ł a d. 6.
Szereg Taylora w otoczeniu punktu zwykłego. Równanie $y'(x) = y/(x-1)$ posiada regularny punkt osobliwy w $x_0 = 1$ i w $x_0 = \infty$. Rozwiązanie $y = c/(1-x)$ ma biegun w 1 i ∞. Promień zbieżności szeregu Taylora w otoczeniu $x_0 = 0$, $y = c\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest równy 1, a odleg/lość do osobliwości wynosi 1.

P r z y k ł a d. 7.
Szereg Taylora, który zbiega się w kole o promieniu większym niż odległość do najbliższej osobliwości. Równanie $(x-1)(2x-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ posiada RPO w punktach $1/2$, 1, ∞. jednym z rozwiązań równania jest $y(x) = 1/(x-1)$. Szereg Taylora tego rozwiązania w otoczeniu punktu zwyczajnego $x = 0$ ma promień zbieżności większy niż odległość do $x = 1/2$ lecz psuje się przy $|x| = 1$. Drugim liniowo niezależnym rozwiązaniem jest $y = x$. Jego szereg Taylora jest zbieżny dla wszystkich x.

P r z y k ł a d. 8.
Istotnie osobliwe zachowanie w pobliżu nieregularnego punktu osobliwego. Równanie $y'' + 3y'/2x + y/4x^3 = 0$ ma NPO w $x = 0$ oraz RPO w ∞. Dwa liniowo niezależne rozwiązania równania są dane przez $y(x) = \sin(1/\sqrt{x})$, $y(x) = \cos(1/\sqrt{x})$. Oba rozwiązania posiadają istotną osobliwość w zerze. Pierwsze z nich posiada również rozgałęzienie w zerze i w nieskończoności. Drugie z rozwiązań nie posiada rozgałęzień i jest analityczne w $x = \infty$.

P r z y k ł a d. 9.
Szereg Taylora zbieżny poza najbliższą osobliwość. równanie $(x-1)(2x-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ posiada punkty osobliwe regularne $1/2$, 1 i ∞. Jednym z jego rozwiązań jest $y(x) = 1/(x-1)$. Rozwinięcie Taylora rozwiązania w zerze zbiega się poza najbliższą osobliwość równą $1/2$.

P r z y k ł a d. 10.
Istotnie osobliwe zachowanie w pobliżu NPO. Równanie $y'' + 3y'/2x + y/4x^3 = 0$ posiada NPO w punkcie zero oraz osobliwy punkt regularny w ∞. Dwa liniowo niezależne rozwiązania równania dane są przez $y(x) = \sin(1/\sqrt{x})$ i $y(x) = \cos(1/\sqrt{x})$. Oba posiadają istotną osobliwość w punkcie zero. Pierwsze posiada rozgałęzienie w $x = 0$ i $x = \infty$. Drugie jest bez rozgałęzień i jest analityczne w ∞.

P r z y k ł a d. 11.
Rozwiązanie analityczne w pobliżu osobliwości. W otoczeniu RPO lub NPO jedno lub kilka rozwiązań megą być analityczne. Równanie $y'' + (1-x)y'/x - y/x = 0$ posiada RPO w $x = 0$ oraz NPO w $x = \infty$. Jedno z rozwiązań $y(x) = (e^x - 1 - x)/x$ jest analityczne w $x = 0$, lecz posiada istotną osobliwość w $x = \infty$. Liniowo niezależne, drugie rozwiązanie równania jest $y(x) = (1+x)/x$. Posiada ono biegun w zerze lecz jest analityczne w nieskończoności.

P r z y k ł a d. 12.
Równanie $y'' - (1-x)y'/x + y/x = 0$ ma RPO w $x = 0$ i NPO w $x = \infty$. Jego oba liniowo niezależne rozwiązania $y(x) = e^x$, $y(x) = 1 + x$ są analityczne w $x = 0$. Pierwsze posiada istotną osobliwość w $x = \infty$.

W ogólności, wszystkie liniowo niezależne rozwiązania mogą być analityczne w RPO, lecz co najmniej jedno z rozwiązań może być osobliwe w NPO.

Czasami udaje się zmienić charakter osobliwości równania różniczkowego poprzez zastosowanie transformacji zmiennej niezależnej lub zmiennej zależnej.

P r z y k ł a d. 13.
Usunięcie osobliwości metodą transformacji zmiennej niezależnej. NPO równania $y' - \frac{1}{2}x^{-1/2}y = 0$ w $x = 0$ znika jeśli wprowadzimy zmienną $t = x^{1/2}$. Prowadzi to do równania $-y + \frac{dy}{dt} = 0$. Równanie to ma w zerze punkt zwyczajny.

P r z y k ł a d. 14.
Usunięcie osobliwości metodą transformacji zmiennej zależnej. Równanie

$$y'' + \frac{2}{x}y' - y = 0$$

posiada RPO w $x = 0$ oraz NPO w $x = \infty$.RPO w zerze można usunąć przez transformację $y(x) = w(x)/x$, gdzie $w(x)$ spełnia równanie $w'' - w = 0$, które wciąż jednak posiada osobliwość w (NPO) $x = \infty$.

Lokalne zachowanie się rozwiązań w pobliżu punktów zwyczajnych jednorodnych LRR

W przypadku gdy punkt jest punktem zwyczajnym równania jego rozwiązanie jest analityczne i w otoczeniu PZ można je zapisać w postaci szeregu Taylora

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Po wstawieniu szeregu do równania otrzymuje się ciąg zależności na współczynniki a_n. Stąd znajduje się a_n.

P r z y k ł a d. 15.
Rozwiązanie w PZ równania różniczkowego. Punkt $x = 0$ równania $y' = 2xy$ jest PZ. Rozwiązania szukamy więc w postaci $y = \sum a_n x^n$. Po podstawianiu do równania otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

lub inaczej

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-1} .$$

Z powodu jednoznaczności rozkładu funkcji w szereg Taylora wynika, że współczynniki przy potęgach x po obu stronach równości są jednakowe. Stąd

$$n a_0 = 0\,, \quad n = 0, 1\,,$$

$$n a_n = 2 a_{n-2}\,, \quad n = 2, 3, \ldots$$

i dalej

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/n! = a_0 \exp(x^2)\,.$$

P r z y k ł a d. 16.
Równanie Airy'ego. Rozważmy rozwiązanie równania $y'' = xy$ w punkcie $x = 0$. Jest to punkt zwyczajny. Podstawimy więc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,.$$

Otrzymamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Porównując współczynniki przy równych potęgach x otrzymamy

$$\begin{aligned} a_n n(n-1) &= 0, \quad n = 0,1,2, \\ a_n n(n-1) &= a_{n-3}, \quad n = 3,4,\ldots \end{aligned}$$

Współczynniki a_0 i a_1 są dowolnymi stałymi, a $a_2 = 0$. Dalej

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{a_0}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\ldots 9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} \\ &= \frac{a_0}{3^n n! 3^n (n-1/3)(n-1-1/3)(n-2-1/3)\ldots(5/3)(2/3)} \\ &= \frac{a_0\Gamma(2/3)}{3^n n! 3^n \Gamma(n+2/3)}. \end{aligned}$$

Podobnie,

$$a_{3n+1} = \ldots = \frac{a_0\Gamma(4/3)}{3^n n! 3^n \Gamma(n+4/3)}.$$

$$a_{3n+2} = 0.$$

Jeśli zdefiniujemy $c_1 = a_0\Gamma(2/3)$, $c_2 = a_1\Gamma(4/3)$, to ogólnym rozwiązaniem równania Airy'ego jest

$$y(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+2/3)} + c_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+4/3)}.$$

Otrzymaliśmy dwa liniowo niezależne rozwiązania pomnożone przez dowolne stałe całkowania (pomimo tego, że rozpoczęliśmy od jednego szeregu Taylora). Promień zbieżności szeregu jest nieskończony gdyż równanie Airy'ego nie posiada punktów osobliwych w płaszczyźnie zespolonej.

Stałe c_1 i c_2 wyznacza się z warunku początkowego dla $x = 0$

$$c_1 = \Gamma(2/3)y(0), \qquad c_2 = \Gamma(4/3)y'(0),$$

lub numerycznie z warunków zadanych inaczej.

Standardowo zdefiniowane liniowo niezależne rozwiązania równania Airy'ego są następujące:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(x) &= 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+2/3)} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+4/3)} \\ \mathrm{Bi}(x) &= 3^{-1/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+2/3)} + 3^{-5/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+4/3)}. \end{aligned}$$

Funkcje Ai(x) i Bi(x) noszą nazwę funkcji Airy'ego.

Z a d a n i e 1.

Napisz program sumowania szeregów dla funkcji Airy'ego z określoną dokładnością $\epsilon > 0$. Narysuj funkcje Ai oraz Bi.

Funkcje Airy'ego mają duże zastosowanie w analizie zaburzeniowej równań różniczkowych.

Współczynniki c_1 i c_2 są tak wybrane, że Ai(x) maleje wykładniczo przy $x \to \infty$, a Bi(x) jest przesunięte w fazie względem Ai(x) o $\pi/2$ przy $x \to -\infty$.

Rozwinięcia lokalne w pobliżu RPO

P r z y k ł a d. 17.
Szereg Taylora nie wystarcza do opisu rozwiązań w pobliżu RPO. Sprawdzimy to na podstawie równania $y'' + y/4x^2 = 0$. Wstawiając tu szereg $y = \sum a_n x^n$ otrzymamy szereg zerowy!

Wyniki Fuchsa sugerują, że w regularnych punktach osobliwych rozwiązanie ma postać $y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x)$, gdzie $A(x)$ jest funkcją analityczną w otoczeniu x_0. Oznacza to, że możemy zapisać

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha A(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \,.$$

Prawa strona nosi nazwę *szeregu Frobeniusa*. Umownie zakłada się, że $a_0 \neq 0$, co jest zapewnione przez właściwy wybór α. Szereg Taylora jest szczególnym przypadkiem szeregu Frobeniusa.

P r z y k ł a d. 18.
Lokalna analiza RPO. Zastosujmy szereg Frobeniusa w $x_0 = 0$ w przypadku równania z poprzedniego przykładu $y'' + y/4x^2 = 0$. Mamy

$$[(n + \alpha)(n + \alpha - 1) + 1/4]a_n = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ponieważ zakładamy $a_0 \neq 0$ to

$$\alpha(\alpha - 1) + 1/4 = 0\,. \quad (n = 0)$$

Stąd $\alpha = 1/2$. Pozostałe równania dają $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$. Szereg Frobeniusa jest więc $y(x) = a_0\sqrt{x}$, gdzie a_0 jest dowolne.

Teoria szeregów Frobeniusa gwarantuje znalezienie tylko jednego rozwiązania. Problem drugiego, liniowo niezależnego rozwiązania wymaga dodatkowej analizy.

Metoda Frobeniusa-Fuchsa dla równań drugiego rzędu

Jeżeli równanie

$$y'' + \frac{p(x)}{x - x_0} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 \tag{10}$$

posiada regularny punkt osobliwy (RPO) w x_0 to $p(x)$ i $q(x)$ są analityczne w x_0. Możemy rozwinąć $p(x)$ i $q(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_0: $p(x) = \sum p_n (x - x_0)^n$, $q(x) = \sum q_n (x - x_0)^n$. Wstawiając do równania (10) i porównując współczynniki przy jednakowych potęgach, dostaniemy

$$(x - x_0)^{\alpha-2} \quad : \quad [\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0]a_0 = 0\,, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}(x - x_0)^{n+\alpha-2} \quad : \quad & [(\alpha + n)^2 + (p_0 - 1)(\alpha + n) + q_0]a_n \\ & = -\sum_{k=1}^{n-1} [(\alpha + k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Ponieważ z założenia $a_0 \neq 0$ to α jest pierwiastkiem równania

$$P(\alpha) = \alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 \,. \tag{13}$$

Następnie rozwiązujemy rekurencję (12). Zauważmy, że lewą stronę (12) można zapisać w postaci

$$P(\alpha + k)a_n \,.$$

Rozwiązanie (12) istnieje więc tylko wtedy dla $k < n$ gdy $P(\alpha + k) \neq 0$. Jeśli warunek ten jest spełniony dla wszystkich dodatnich n to szereg Frobeniusa jest zbieżny w kole o promieniu równym odległości do najbliższej osobliwości $p(x)$ lub $q(x)$.

P r z y k ł a d. 19.
Zmodyfikowane równanie Bessela rzędu ν. Równanie

$$y'' + \frac{1}{x}y' - (1 + \frac{\nu^2}{x^2})y = 0\,, \tag{14}$$

posiada RPO w punkcie $x = 0$. Podstawmy $y(x) = \sum a_n x^{n+\alpha}$. Dostaniemy:

$$\sum_0^\infty (\alpha + n)(\alpha + n - 1)a_n x^{n+\alpha-2} + \sum_0^\infty (\alpha + n)a_n x^{\alpha+n-2} - \sum_0^\infty a_n x^{\alpha+n} - \nu^2 \sum_0^\infty a_n x^{\alpha+n-2} \,.$$

Porównując współczynniki przy x^k dostaniemy

$$\begin{aligned} x^{\alpha-2} &: \quad (\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0\,, \\ x^{\alpha-1} &: \quad [(\alpha+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0\,, \\ x^{\alpha+n-2} &: \quad [(\alpha+n)^2 - \nu^2]a_n = a_{n-2}\,, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Ponieważ $a_0 \neq 0$ to $\alpha = \pm\nu$. Z tego powodu, że ν występuje w kwadracie, możemy założyć, że $\Re\nu \geq 0$. Oznaczmy $\alpha_1 = +\nu$, $\alpha_2 = -\nu$. Mamy stąd $P(\alpha_1 + n) \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i wszystkie a_n można łatwo wyznaczyć.

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0\,, \tag{15}$$

$$a_{2n} = \frac{a_{2n-2}}{2^2 n(\nu + n)} = \frac{a_{2n-4}}{2^4 n(n-1)(\nu - n)(\nu + n - 1)} = \ldots = \frac{a_0 \Gamma(\nu + 1}{2^{2n} n! \Gamma(nu + n + 1)} \,. \tag{16}$$

Stąd

$$y(x) = a_0 \Gamma(\nu + 1) x^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \,. \tag{17}$$

Umownie wprowadza się $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(\nu + 1)$. Wynikiem jest rozwinięcie Frobeniusa zmodyfikowanej funkcji Bessela $I_\nu(x)$:

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \,. \tag{18}$$

Podobnie znajduje się funkcje $I_{-\nu}(x)$. Trudniejszym zadaniem jest znalezienie rozwiązań równania Bessela dla ν całkowitych. Przedyskutujemy to w jednej z dalszych części.

W przypadku $\alpha_1 \neq \alpha_2$ musimy dokonać dodatkowej analizy problemu. Jeśli $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ jest liczbą całkowitą różną od zera, to relacja (12) jest postaci ($\alpha = \alpha_2, n = N$):

$$0 \cdot a_N = -\sum_{k=0}^{N-1} [(\alpha + k)p_{N-k} + q_{N-k}]a_k \,. \tag{19}$$

Mamy dwia możliwości

1. Prawa strona (19) jest różna od zera, a_N nie istnieje. Istnieje potrzeba dalszej analizy.
2. Prawa strona (19) znika. Mamy $0 = 0$, co nie pozwala znaleźć a_n. a_N jest dowolną stałą. Możemy wyznaczyć $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ w funkcji a_0 i a_N.

Podsumowanie

(I) $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_2 \neq N = 0, 1, 2, \ldots$ Istnieją dwa liniowo niezależne rozwiązania w postaci szeregu Frobeniusa.

(II) $\alpha_1 - \alpha_2 = N = 0, 1, 2, \ldots$ (całkowita)

- a) $\alpha_1 = \alpha_2$. Jedno rozwiązanie w postaci szeregu Frobeniusa. Drugie rozwiązanie wymaga dodatkowej analizy.
- b) $\alpha_1 - \alpha_2 = 1, 2, 3, \ldots$
  - (i) Prawa strona (19) $\neq 0$. Jedno rozwiązanie w postaci szeregu Frobeniusa. Drugie wymaga dodatkowych analiz.
  - (ii) Prawa strona (19) = 0. Dwa rozwiązania w postaci szeregu Froeniusa.

Punkty istotnie osobliwe. Analiza lokalna rozwiązań.

Dlaczego szeregi Frobeniusa (uogólnione szeregi Taylora) nie wystarczają przy opisie rozwiazań równań różniczkowych w otoczeniu nieregularnych punktów osobliwych? W otoczeniu RPO co najmniej jedno rozwiązanie równania nie posiada szeregu Frobeniusa. Popatrzmy na przykłady.

P r z y k ł a d. 20.
Brak rozwiazań typu szeregu Frobeniusa. Równanie $y' = x^{1/2}y$ posiada PIO (punkt istotnie osobliwy, NPO) w $x = 0$. Rozwiązaniem równania jest $y(x) = a_0 \exp(2x^{3/2}/3) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (2x^{3/2}/3)^n/n!$. Nie jest to szereg Frobeniusa. Szeregi Frobeniusa zawierają tylko całkowite potęgi zmiennej niezależnej.

P r z y k ł a d. 21.
Brak szeregu Frobeniusa. Co sie stanie gdy rozwiniemy rozwiązanie równania $x^3y = y$ w szereg Frobeniusa w $x = 0$? Jeśli taki szereg istnieje to $\sum_n (n + \alpha)(n + \alpha - 1)a_n x^{n+\alpha-1} = \sum_n a_n x^{n+\alpha}$. Z

założenia $a_0 \neq 0$. Porównanie współczynników przy jednakowych potęgach daje natomiast $a_0 = 0$. Mamy więc sprzeczność. Nie istnieje wobec tego szereg Frobeniusa w otoczeniu $x = 0$.

W następnym przykładzie problem braku szeregu Frobeniusa pojawia się w bardziej subtelny sposób niż to widzieliśmy dotychczas.

P r z y k ł a d. 22.
NPO, w którym brak szeregu Frobeniusa. Równanie $x^2y'' + (1+3x)y' + y = 0$ ma NPO w $x = 0$. Co się stanie gdy spróbujemy rozwinąć rozwiązanie równania w szereg Frobeniusa $(y = \sum a_n x^{n+\alpha})$? Mamy

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} + (1+3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} = 0\,.$$

Porównanie współczynników przy równych potęgach x prowadzi do równań:

$$\begin{aligned} x^{\alpha-1} &: \quad \alpha a_0 = 0\,, \\ x^{n+\alpha} &: \quad (n+\alpha+1)a_{n+1} + (n+\alpha+1)^2 a_n = 0, \quad n = 1,2.\dots\,. \end{aligned}$$

Ponieważ w szeregu Frobeniusa $a_0 \neq 0$ to stąd $\alpha = 0$. Dalej $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ dla $n = 0,1,2,\dots$, czyli $a_n = (-1)^n n! a_0$ i rozwiązanie

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^n\,.$$

Znaleźliśmy szereg Frobeniusa, lecz jak się okazuje jego promień zbieżności jest równy zero! Nie jest to więc szereg Frobeniusa.

Pojawienie się szeregu rozbieżnego jest typowe przy analizie równań różniczkowych w pobliżu PIO. Nie jest to jednak całkiem bezwartościowe. Szeregi takie używane są w celu znalezienia dokładnych rozwiązań.