LITERATURA: Bogdanow, Serojad

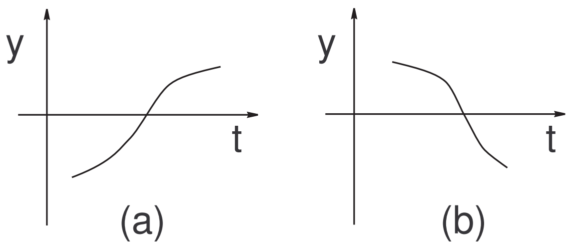
1 Oscylacje rozwiązań liniowych równań różniczkowych

Zajmiemy się liniowym równaniem skalarnym drugiego rzędu

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0\,, \quad t \in I = [a,b]\,, \tag{1}$$

gdzie funkcje p i q są ciągłe na I.

Z twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania wynika, że każdy problem Cauchy'ego (9) posiada jednoznaczne rozwiązanie na I. W szczególności, jeśli rozwiązanie zeruje się wraz z pochodną w jakimś punkcie w I to jest to rozwiązanie zerowe. Dalej zakłada się, że rozwiązanie równania (9) jest niezerowe. Jeżeli więc rozwiązanie y jest zerem w $t_0 \in I$ to $y'(t_0) \neq 0$ i w rezultacie w punkcie wewnętrznym $t_0 \in I$ rozwiązanie zmienia znak przy przechodzeniu przez t_0, a więc jego wykres przecina oś x.



Zera rozwiązania

LEMAT 1 *Żadne z niezerowych rozwiązań równania (9) nie posiada nieskończonej liczby zer na dowolnym przedziale $[\alpha, \beta] \in I$, a więc zera dowolnego rozwiązania są izolowane.*

∘ Jeśli y posiada nieskończenie wiele zer na przedziale $[\alpha, \beta] \in I$ to w punkcie granicznym (skupienia) zbioru zer mamy)

$$y(t_*) = y'(t_*) = 0 \tag{2}$$

i wobec tego rozwiązanie jest zerowe co jest sprzeczne z założeniem. Zera są więc izolowane.∘

Niezależność liniowa

LEMAT 2 *Jeśli dwa rozwiązania równania (9) lub ich pierwsze pochodne znikają w jakimś punkcie odcinka I to rozwiązania te są liniowo zależne, tzn. różnią się stałym czynnikiem.*

○ Wrońskian w rozwiązań y_1 i y_2 jest równy $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Z założenia, w którymś punkcie $t_0 \in I$, $w(t_0) = 0$. Z formuły Liouville'a wynika, że $w(t) = 0 \ \forall t \in I$. Oznacza to, że rozwiązania są liniowo zależne.○

DEFINICJA 1 *Rozwiązanie równania (9) nazywa sie nieoscylującym na przedziale $I_1 \subset I$ jeśli posiada na I_1 nie więcej niż jedno zero. W przeciwnym wypadku rozwiązanie nazywa się oscylującym.*

P r z y k ł a d. 1.
Rozwiązanie równania

$$y'' - \omega^2 y = 0\,, \quad \omega > 0\,. \tag{3}$$

jest nieoscylujące na przedziale $I = (-\infty, +\infty)$ gdyż jest postaci $y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$.

P r z y k ł a d. 2.
Ogólne rozwiązanie równania

$$y'' + \omega^2 = 0\,, \quad \omega > 0 \tag{4}$$

jest postaci $y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ i stąd, odległość między zerami $y(t)$ jest równa π/ω. Na dowolnym odcinku o długości mniejszej niż π/ω rozwiązania są nieoscylujące, a na dłuższych odcinkach są oscylujące.

Wskaźnik braku oscylacji rozwiązań

LEMAT 3 *Każde rozwiązanie (9) jest nieoscylujące na $I_1 \subset I$ jeżeli na I_1 funkcja $q(t) \leq 0$.*

○ Niech y będzie dowolnym rozwiązaniem równania (9). Zbadamy funkcję

$$h(t) \equiv \exp[\int_s^t p(\tau)d\tau] \cdot y(t)y'(t)\,, \tag{5}$$

gdzie s jest punktem początkowym na I.

$$h'(t) = \exp[\int_s^t p d\tau] \cdot [(y'(t)^2 - q(t)y^2(t)]\,. \tag{6}$$

Z założenia wynilka, że $h'(t) \geq 0$ dla wszystkich $t \in I_1$. W rezultacie, funkcja $h(t)$ rośnie (słabo) na I_1. Jeśli istniałyby dwa punkty $t_1, t_2 \in I_1$ i $t_1 < t_2$ takie, że $y(t_1) = y(t_2) = 0$, to $h(t) = 0$ dla wszystkich $t \in [t_1, t_2]$. Stąd wynikałoby, że $y(t)y'(t) = 0 \ \forall t \in [t_1, t_2]$. Na podstawie lematu o zerach rozwiązanie y może posiadać na $[t_1, t_2]$ tylko izolowane zera. Stąd

$$y'(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2] \to y(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2]\,, \tag{7}$$

tzn. rozwiązanie y jest zerowe!? Otrzymana sprzeczność pokazuje, że rozwiązanie y posiada nie więcej niż jedno zero na I_1, jest to więc rozwiązanie nieoscylujące.○

P r z y k ł a d. 3.
Rozwiązanie równania Eulera

$$t^2 y'' + t a_1 y' + a_0 y = 0\,, \quad t > 0 \tag{8}$$

jest nieoscylujące jeśli $a_0 \leq 0$.

Postać kanoniczna równania drugiego rzędu

Jeśli w równaniu

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0\,, \quad t \in I = [a,b]\,, \tag{9}$$

wykonamy podstawienie

$$y = u(x)z \tag{10}$$

to dostaniemy

$$u''z + 2u'z' + uz'' + p(u'z + uz') + quz = 0 \tag{11}$$

i dalej

$$uz'' + (2u' + pu)z' + (u'' + pu' + qu)z = 0\,. \tag{12}$$

Wybierzemy u tak by

$$2u' + pu = 0 \tag{13}$$

i założymy, że $p(t) \in C^1$. Równanie to spełnia funkcja

$$u(t) = e^{-1/2\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\,. \tag{14}$$

Mamy więc

$$u'' + pu' + pu = \ldots = u(\frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} + q) \tag{15}$$

Ponieważ $u \neq 0$ więc dostaniemy

$$z'' + Q(t)z = 0\,, \quad Q = \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2} + q\,. \tag{16}$$

Ta postać równania drugiego rzędu nosi nazwę *postaci kanonicznej*.

P r z y k ł a d. 4.
Równanie Bessela

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\,, \quad x > 0 \tag{17}$$

po zamianie zmiennej $y = x^{-1/2}z$ prowadzi do postaci kanonicznej

$$z'' + (1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2})z = 0\,. \tag{18}$$

(Tutaj $p = 1/x$, $q = (x^2 - n^2)/x^2$. Stąd $Q = 1 - (n^2 - 1/4)/x^2$. Dalej $e^{-1/2\int(1/x)dx} = e^{-1/2\ln x} = x^{-1/2}$. Więc $y = zx^{-1/2}$)

Twierdzenie Sturma o porównaniach

Niech będą dane dwa równania w postaci kanonicznej:

$$x'' + Q(t)x = 0 \tag{19}$$

$$y'' + R(t)y = 0 \tag{20}$$

o współczynnikach (Q, R) ciągłych na I.

TWIERDZENIE 1 *Jeśli t_1 i t_2, $t_1 < t_2$ są zerami rozwiązania równania (19) oraz*

$$Q(t) \leq R(t)\,, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \tag{21}$$

to dowolne rozwiązanie y równania (20) na odcinku $[t_1, t_2]$ posiada co najmniej jedno zero. Jeśli w dodatku t_1 i t_2 nie są jednocześnie zerami rozwiązania y, to y posiada zero w przedziale (t_1, t_2).

∘ Niech y będzie dowolnym rozwiązaniem równania (20). Wstawmy y i x do odpowiednich równań. Otrzymane tożsamości pomnóżmy przez y i x odpowiednio i odejmijmy drugą z nich od pierwszej. Dostaniemy

$$x''(t)y(t) - y''(t)x(t) + (Q(t) - R(t))x(t)y(t) = 0 \tag{22}$$

lub

$$\frac{d}{dt}[x'y - y'x] = [R(t) - Q(t)]xy\,. \tag{23}$$

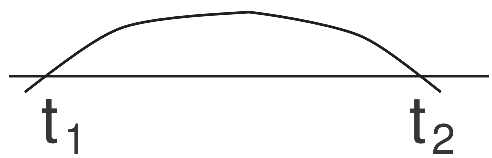
Całkując po t od t_1 do t_2 i wykorzystując warunek

$$x(t_1) = x(t_2) = 0\,, \tag{24}$$

otrzymamy

$$x'(t_2)y(t_2) - x'(t_1)y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (R - Q)xydt\,. \tag{25}$$

Przyjmiemy dalej , że t_1 i t_2 są kolejnymi zerami rozwiązania x. Wobec tego x na przedziale (t_1, t_2) ma jednakowy znak. Ustalmy, że $x(t) > 0$, $\forall t \in (t_1, t_2)$ Ponieważ $x'(t_1) \neq 0$ i $x'(t_2) \neq 0$ to $x'(t_1) > 0$ i $x'(t_2) < 0$.



Założenie, że rozwiązanie y nie znika na przedziale (t_1, t_2) jak również na jednym z jego końców prowadzi do sprzeczności z równością (25). Jeśli bowiem $y > 0$ ($y < 0$) to lewa strona (25) jest ujemna (dodatnia) a prawa jest nieujemna (niedodatnia). Wobec tego każde rozwiązanie równania (20) posiada co najmniej jedno zero na $[t_1, t_2]$. Jeśli rozwiązanie nie zeruje się na końcach przedziału to posiada zero w przedziale otwartym (t_1, t_2).$\circ$

Zauważmy, że jeśli (21) jest silną nierównością przynajmniej w jednym punkcie, to równanie (20) posiada zero w przedziale (t_1, t_2) (wynika to z równania (25)) oraz własności silnej monotoniczności całki).

WNIOSEK 1 *Każde rozwiązanie równania (19) jest nieoscylujące na przedziale I jeśli $Q(t) \leq 0$ na I.*

$\circ$ Jeśli istniałoby rozwiązanie x znikające co najmniej w dwu punktach, to z twierdzenia Sturma wynika, że każde z rozwiązań równania

$$y'' = 0 \quad (R = 0!) \tag{26}$$

powinno być zerem na I co jest fałszem bo istnieją rozwiązania ($y = 1$), które nie posiadają zer na I.$\circ$

WNIOSEK 2 *Zera liniowo niezależnych rozwiązań równania (19) wzajemnie się rozdzielają, tzn. między dwoma zerami jednego z rozwiązań istnieje dokładine jedno zero drugiego rozwiązania.*

$\circ$ Niech x_1 i x_2 będą liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (19). Z lematu o niezależności liniowej wynika, że nie mogą posiadać one wspólnych zer. Z twierdzenia Sturma wynika, że między kolejnymi zerami t_1 i t_2 rozwiązania x_1 leży co noajmniej jedno zero rozwiązania x_2. Zamieniając miejscami x_1 z x_2 w przeprowadzonym rozumowaniu dochodzimy do wniosku, że zera t_1 i t_2 rozwiązania x_1 nie są kolejnymi zerami.$\circ$

Przypadek nieskończonej liczby zer

TWIERDZENIE 2 *Jeśli przedział I jest niewłaściwy i*

$$Q(t) \geq m > 0, \ \forall t \in I\,, \tag{27}$$

to wszystkie rozwiązania równania (19) mają nieskończenie wiele zer.

Dowód przeprowadzamy porównując (19) z równaniem $x'' + mx = 0$ i korzystając z wyników przykładu 2.

P r z y k ł a d. 5.
Rozpatrzmy równanie Bessela w postaci kanonicznej

$$x'' + (1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2})x = 0\,, \quad t > 0\,. \tag{28}$$

Dla $0 \leq n \leq 1/2$ spełniona jest nierówność

$$1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2} \geq 1\,, \quad t > 0 \tag{29}$$

i dlatego wszystkie rozwiązania równania Bessela posiadają nieskończenie wiele zer. Odległość kolejnych zer jest w przypadku $0 \leq n \leq 1/2$ mniejsza niż π. Przy $n \geq 1/2$ istnieje również nieskończona liczba zer, a ich odległość jest większa od π. Ponieważ

$$1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2} \to 1\,, \quad t \to \infty \tag{30}$$

to odległość zer dąży do π.

Warunek (27), zapewniający istnienie nieskończonej liczby zer rozwiązania równania (27) można nieco osłabić.

Twierdzenie 3 *Jeśli przedział $I = [a, \infty)$ i*

$$Q(t) \geq 0\,, \quad \int^{+\infty} Q(\tau) d\tau = 0\,, \tag{31}$$

to wszystkie rozwiązania równania (19) posiadają nieskończenia wiele zer.

○ Załóżmy, że istnieje rozwiązanie x, które nie posiada nieskończonej liczby zer. Jstnieje wtedy taki punkt t_0, że przy $t \geq t_0$ funkcja x ma stały znak. Przyjmijmy

$$x(t) > 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Ponieważ

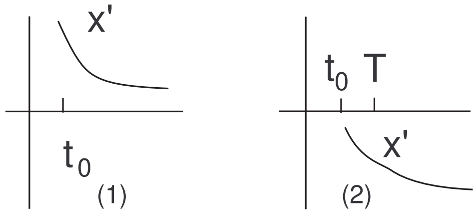
$$x''(t) = -Q(t)x(t)\,, \quad \forall t \geq t_0\,, \tag{32}$$

to $x''(t) \leq 0$, i pochodna x' maleje na przedziale $[t_0, +\infty]$. Mamy dwie możliwości. 1^o $x' \geq 0\,,\ \forall t \geq t_0$. W tym przypadku x rośnie i$x(t) \geq x(t_0)$, $\forall t \geq t_0$. Całkując (32) w granicach od t_0 do t otrzymamy

$$x'(t) - x'(t_0) = -\int_{t_0}^{t} Q(s) ds \leq -x(t_0) \int_{t_0}^{t} Q(s) ds\,, \quad \forall t \geq t_0$$

$$x'(t_0) \geq x(t_0) \int_{t_0}^{t} Q(s) ds \to \infty \text{ przy } t \to +\infty$$

Sprzeczność!



Pochodna $x'(t)$

2^o $x'(t) < 0$ $\forall t \geq T$, $T > t_0$. Ponieważ x' maleje, to

$$x'(t) \leq x'(T), \quad \forall t \geq T.$$

Stąd (po scałkowaniu od T do t) mamy

$$x(t) - x(T) \leq x'(T)(t-T), \quad \forall t \geq T,$$

$$-x(T) \leq x'(T)(t-T) \to -\infty \text{ przy } t \to +\infty.$$

Otrzymane sprzeczności pokazują, że wszystkie rozwiązania równania (19) posiadają nieskończenie wiele zer. ∘

P r z y k ł a d. 6.
Wszystkie rozwiązania równania

$$x'' + \frac{\omega^2}{t^\alpha} x = 0, \quad t > 0, \quad \omega \neq 0$$

dla $\alpha \leq 1$ posiadają nieskończenie wiele zer ponieważ

$$\frac{\omega^2}{t^\alpha} \geq 0 \quad \text{dla } t > 0 \text{ i } \int^{+\infty} \frac{\omega^2}{t^\alpha} = \infty.$$

Dodatek. Wrońskian. Twierdzenie Liouville'a

1) Rozpatrzmy funkcje ψ_k, $k = 1, \ldots, n$ na $I \in R^1$ klasy C^n. Wyznacznik

$$w \equiv \begin{vmatrix} D^0\psi_0 & D^0\psi_1 & \ldots & D^0\psi_n \\ D^1\psi_0 & D^1\psi_1 & \ldots & D^1\psi_n \\ & & \ldots & \\ D^n\psi_0 & D^n\psi_1 & \ldots & D^n\psi_n \end{vmatrix}$$

gdzie $D^k = d/dt^k$, nazywa się wrońskianem (od nazwiska polskiego matematyka, J. Wrońskiego). Wyliczymy Dw, biorąc pochodne z wyznacznika według wierszy i odrzucając wyznaczniki o jednakowych wierszach

$$w \equiv \begin{vmatrix} D^0\psi_0 & D^0\psi_1 & \ldots & D^0\psi_n \\ & & \ldots & \\ D^{n-2}\psi_0 & D^{n-2}\psi_1 & \ldots & D^{n-2}\psi_n \\ D^n\psi_0 & D^n\psi_1 & \ldots & D^n\psi_n \end{vmatrix}$$

Rozpatrzmy równanie różniczkowe

$$L_n x = 0 \tag{33}$$

gdzie operator $L_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D^1 + a_0$, i współczynniki a_k są stałe (operator L_n nazywa się wtedy stacjonarnym).

LEMAT 4 *(Liouville'a). Jeśli ψ_k są rozwiązaniami równania*

$$L_n x = 0 \tag{$*$}$$

gdzie L_n jest stacjonarny, to

$$w(t) = w(0) \exp -a_{n-1} t \,. \tag{L}$$

∘ Funkcje ψ_k (rozwiązania równania) zamieniają (*) w tożsamość. Dlatego

$$D^n \psi_k = -a_{n-1} D^{n-1} \psi_k - \ldots - a_1 D \psi_k - a_0 \psi_k \,, \ \forall t \,.$$

W wyniku (patrz równanie dla Dw) mamy

$$Dw = -a_{n-1} w \,, \ \forall t \,,$$

a to oznacza, że $w(t) = w(0) \exp(-a_{n-1} t)$. ∘

TWIERDZENIE 4 *Rozwiązania ψ_k równania $L_n x = 0$ tworzą układ zupełny (bazę) wtedy i tylko wtedy gdy $w(t) \neq 0 \,, \forall t$.*

∘ Zbudujmy ogólne rozwiązanie równania różniczkowego $n-$tego rzędu $L_n x = 0$.

$$x = \sum_k c_k \psi_k .$$

Utworzymy układ równań algebraicznych dla c_k z pochodnych w punkcie początkowym $t = 0$

$$D^k x(0) = \sum_l c_l D^k \psi_l \xi_k \,, \quad k = 0, \ldots, n \,. \tag{u}$$

Wyznacznikiem układu jest $w(0)$. Jeśli $w(0) \neq 0$ to układ (u) ma jednoznaczne rozwiązania przy dowolnych ξ_k i dlatego ψ_k tworzą bazę.

Odwrotnie, jeśli ψ_k tworzą bazę, to układ równań (u) można rozwiązać dla dowolnych ξ_k, a stąd wynika, że $w(0) \neq 0$, co pociąga za sobą spełnienie nierówności $w(t) \neq 0$, która wynika z lematu Liouville'a (L). ∘