1 Zachowanie się rozwiązań w otoczeniu NPO

Równanie

$$x^3y'' = y \tag{1}$$

nie daje się rozwiązać metodą szeregów Frobeniusa.

Z a d a n i e 1.
Sprawdzić, że równanie $x^3y'' = y$ nie daje się rozwiązać metodą szeregów Frobeniusa.

Każde równanie różniczkowe II rzędu ma dwa liniowo niezależne rozwiązania. Opiszemy krótko procedurę, która pozwala znaleźć lokalne zachowanie rozwiązań w pobliżu NPO. W przypadku równania (1) jest to punkt $x = 0$. Rozwiązanie jest

$$y(x) \sim C_1x^{3/4}\exp(2x^{-1/2})\,(x \to 0^+) \tag{2}$$

$$y(x) = C_2x^{3/4}\exp(-2x^{-1/2})\,(x \to 0+)\,. \tag{3}$$

Zauważmy, że rozwiązania zawieraja funkcję wykładniczą z funkcji, która jest osobliwa w nieregularnym punkcie osobliwym równania różniczkowego. Posiadają więc istotne osobliwości w $x = 0$.

Pierwszy krok w wyznaczeniu głównego zachowania się rozwiązania w okolicy NPO polega na identyfikacji tzw. *czynnika kontrolnego*. Jest to najczęściej exponenta. Sugeruje to następujące podstawienie (Carlini 1817, Liouville 1837 Green 1837):

$$y(x) = \exp S(x)\,. \tag{4}$$

Sprowadza to liniowe równanie różniczkowe n-tego rzędu do przybliżonego równania 1-go rzędu dla $S(x)$, które jest zazwyczaj słuszne w obszarze NPO.

W celu prześledzenia metody zastosujemy podstawienie (4) dla znalezienia czynnika kontrolującego w rozwiązaniu równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\,, \tag{5}$$

w pobliżu nieregularnego punktu osobliwego x_0. Podstawmy $y = \exp S$. Mamy

$$S'' + (S')^2 + p(x)S' + q(x) = 0\,. \tag{6}$$

Równanie to jest tak samo trudne jak równanie (5) lecz zazwyczaj upraszcza się z powodu faktu, że w okolicy NPO

$$S'' << (S')^2\,,\ \ x \to x_0\,. \tag{7}$$

Załóżmy, że czynnik kontrolny rozwiązania jest postaci $\exp[-a(x-x_0)^{-b}]$, gdzie $b > 0$ tak, że $y(x)$ ma w pobliżu x_0 istotną osobliwość. Mamy wtedy $(S')^2 \sim a^2b^2(x-x_0)^{-2b-2}$ i $S'' \sim ab(b+1)(x-x_0)^{-b-2}$. Założenie (7) jest więc słuszne bo $b > 0$. Zróżniczkowaliśmy tutaj relację asymptotyczną. Procedura ta zostanie uprawomocniona później.

Asymptotyczne równanie różniczkowe

$$(S')^2 \sim -p(x)S' - q(x)\,, \;\; x \to x_0\,, \tag{8}$$

które otrzymuje sie po odrzuceniu S'', łatwo rozwiązać. Rozwiązania można następnie użyć do sprawdzenia relacji (7). (Zauważmy, że przenieśliśmy dwa człony na prawą stronę równania (8) po to by uniknąć stwierdzenia, że funkcja jest asymptotyczna z zerem.) Istnieją przypadki gdy (7) nie zachodzi. Relacja ta nie jest też spełniona w ZPO lub RPO.

P r z y k ł a d. 1.
Czynnik kontrolujący w otoczeniu NPO w zerze. Weźmy równanie $x^3y'' = y$. Znajdziemy czynnik kontrolujący w otoczeniu zera, które jest NPO równania. Równanie (8) jest

$$(S'^2) \sim x^{-3}\,, \;\; x \to x_0\,.$$

Mamy dwa możliwe rozwiązania: $S'(x) \sim \pm x^{-3/2}$ $(x \to x_0)$, a stąd

$$S(x) \sim \pm 2x^{-1/2}\,, \;\; x \to x_0^+\,. \tag{9}$$

Zauważmy, że całkowaliśmy relację asymptotyczną dla S postaci $f(x) \sim g(x)$ $x \to x_0$.

Jeśli całkowanie dotyczyłoby równości to całki różniłyby się o stałą. W przypadku relacji asymptotycznej całki różni funkcja $C(x)$, której pochodna jest mała w porównaniu z f i g przy $x \to x_0$. Obie całki są asymptotyczne przy przy $x \to x_0$ wtedy gdy $C(x) << \int^x f(x)dx$ lub $\int^x g(x)dx$. Istnieją przypadki, w których $C(x)$ nie jest mniejsza ani od $\int^x f(x)dx$ ani od $\int^x g(x)dx$. Jeśli jednak $f \sim a(x-x_0)^{-b}$ $(x \to x_0)$, gdzie $b > 1$, to

$$\int^x f(x)dx \sim [a/(1-b)](x-x_0)^{1-b}\,, \;\; x \to x_0\,;$$

Jeśli $b < 1$ to

$$\int^x f(x)dx \sim c(\text{const}) \text{ przy } x \to x_0\,;$$

Jeśli $b = 1$

$$\int^x f(x)dx \sim a \ln|x - x_0|\,, \;\; x \to x_0\,.$$

P r z y k ł a d. 2.
Zachowanie główne w pobliżu NPO. Znaleźliśmy dwie wartości czynnika kontrolującego (9). Wynika to stąd, że równanie drugiego rzędu ma dwa liniowo niezależne rozwiązania. Skoncentrujemy sie na przypadku $S \sim +2x^{-1/2}$ $(x \to 0^+)$. Drugie rozwiązanie traktuje się podobnie. Ulepszymy rozwiazanie znajdując funkcję $C(x)$. To znaczy

$$S(x) = 2x^{-1/2} + C(x)\,, \;\; C(x) << 2x^{-1/2} \; (x \to 0^+)\,. \tag{10}$$

Nie możemy spodziewać się, że znajdziemy dokładną funkcję $C(x)$. Byłoby to równoważne z dokładnym rozwiązaniem równania. Wyznaczymy $C(x)$ tylko asymptotycznie.
Wstawmy (10) do oryginalnego równania (6) z $p(x) = 0$ i $q(x) = -x^{-3}$. otrzymamy $\frac{3}{2}x^{-3/2} + C'' -$

$2x^{-3/2}C' + (C')^2 = 0$. Równanie to możemy rozwiązać asymptotycznie korzystając z (10). Mamy $S' \sim -x^{-3/2}$ $(x \to 0^+)$ lub równoważnie $C' << x^{-3/2}$ $(x \to 0^+)$. Stąd $(C')^2 << x^{-3/2}C'$ $(x \to 0^+)$. Prowadzi to do równania asymptotycznego

$$\frac{3}{2}x^{-3/2} + C'' \sim 2x^{-3/2}C' .$$

Równanie to daje sie rozwiązać, lecz dla treningu uprościmy je jeszcze raz stosując przybliżenie asymptotyczne. Ponieważ $C' << x^{-3/2}$ $(x \to 0^+)$ to różniczkując tę relację (o ile można) dostaniemy $C'' << x^{-5/2}$ $(x \to 0^+)$. Stąd

$$\frac{3}{5}x^{-5/2} \sim 2x^{-3/2}C' , \;\; x \to 0^+ .$$

Rozwiązaniem jest więc

$$C \sim \frac{3}{4} \ln x \;\; (x \to 0^+) . \tag{11}$$

Zauważmy, że różniczkowanie (11) daje $C' \sim \frac{3}{4}x^{-2}$ $(x \to 0^+)$, a więc $C'' << x^{-5/2}$ $(x \to 0^+)$ tak jak założono.
Wstawiając do (10) dostaniemy

$$S(x) \sim 2x^{-1/2} + \frac{3}{4} \ln x + D(x) , \tag{12}$$

gdzie $D(x)$ jest funkcją (wynikającą z całkowania relacji asymptotycznej), która spełnia relację

$$D(x) << \ln x , \;\; x \to 0^+ . \tag{13}$$

Spróbujmy znaleźć $D(x)$. Podobnie jak w przypadku funkcji C wstawimy (12) do (6) przy $p = 0$, $q = -x^{-3}$. Dostaniemy

$$-3x^{-2}/16 + D'' + (D')^2 - 2x^{-3/2}D' + 3x^{-1}D'/2 = 0 .$$

Biorąc pod uwagę, że $x^{-1} << x^{-3/2}$ $(x \to 0^+)$, otrzymamy

$$3x^{-1}D'/2 << 2x^{-3/2}D' , \;\; x \to 0^+ .$$

Po drugie $D' << x^{-1}$ $(x \to 0^+)$, co dostajemy różniczkując (13), a więc

$$(D')^2 << x^{-1}D' , \;\; x \to 0^+ .$$

Różniczkując (13) dwa razy mamy

$$D'' << x^{-2} , \;\; x \to 0^+ .$$

Na podstawie tych związków, równanie asymptotyczne dla D możemy zastąpić równaniem

$$-2x^{-3/2}D' \sim 3x^{-2}/16 \;\; x \to 0^+ ,$$

lub

$$D' \sim -3x^{-1/2}/32 , \;\; x \to 0^+ .$$

Biorąc całkę nieoznaczoną z obu stron tej relacji, dostaniemy

$$D - d \sim -3x^{1/2}/16 , \;\; x \to 0^+ ,$$

gdzie d jest stałą. Inaczej mówiąc, mamy

$$D(x) = d + \delta(x)\,, \tag{14}$$

gdzie

$$\delta(x) \sim -3x^{1/2}/16 \;\; (x \to 0^+)\,.$$

Do dyskusji funkcji $\delta(x)$ wrócimy później. Zwróćmy uwagę, że wyznaczyliśmy wszystkie wkłady do $S(x)$, które nie znikaja dla $x \to 0^+$. Ostatnia poprawka $\delta(x)$ znika dla $x \to 0^+$.

Udokładnimy teraz definicję składowej wiodącej.

Definicja 1 *Wiodące zachowanie sie rozwiązania $y(x)$ wyznaczają człony z $S(x)$, które nie znikają dla x dążących do nieregularnego punktu osobliwego rozwiązania.*

W rozważanym przykładzie wiodące zachowanie jest

$$y(x) \sim \exp[2x^{-1/2} + \frac{3}{4}\ln x + d] \;\; x \to 0^+\,,$$

lub

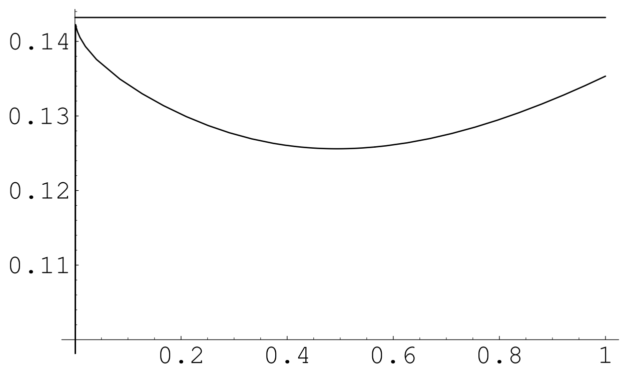
$$y(x) \sim C_1 x^{3/4} \exp(2x^{-1/2}) \;\; (x \to 0^+)\,,$$

gdzie $C_1 = e^d$.

Z a d a n i e 2.
Powtórzyć postępowanie dla $S(x) \sim -2x^{-1/2}$.

Z a d a n i e 3.
Rozwiązać numerycznie równanie $x^3 y'' = y$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$ na przedziale $(0, 1)$. Kładąc $e^{\delta(x)} = 1 + \epsilon(x)$, gdzie $\epsilon \to 0$ przy $x \to 0^+$, sprawdzić, że $\epsilon \to 0$ jeśli $x \to 0^+$.

Rozwiązanie równania (1) jest liniową kombinacja rozwiazań, z których jedno eksponencjalnie maleje przy $x \to 0^+$, a drugie eksponencjalnie rośnie do ∞.



Wykres zależności $y(x)/(x^{3/4} \exp(2x^{-1/2}))$ gdzie y jest rozwiązaniem równania $x^3 y'' = y[y(1) = 1, y'(1) = 0]$.

P r z y k ł a d. 3.
Na podstawie wyników poprzedniego zadania wiemy jak zachowuje się wiodący człon rozwiązania przy $x \to 0^+$. Funkcja $\epsilon(x)$ zdefiniowana równością $e^{\delta(x)} = 1 + \epsilon(x)$ dąży do zera. Rozwiązaniem równania $x^3 y'' = y$ jest kombinacja liniowa dwu rozwiązań. Jedno z nich rośnie do nieskończoności, a drugie maleje do zera w granicy $x \to 0^+$ (patrz (2,3)). Przy przyjętych warunkach początkowych całkowania numerycznego, $y(0) = 1, y'(0) = 0$, współczynnik przy rozwiązaniu rosnącym jest różny od zera. Ponieważ rozwiązanie rosnące przewyższa rozwiązanie malejące to jego wkład dominuje nad składową malejącą w granicy asymptotycznej. Wkład wiodącego członu

$$y(x) = c_1 x^{3/4} \exp(2x^{-1/2})[1 + \epsilon(x)]\,, \tag{15}$$

możemy oszacować, porównując je z rozwiązaniem numerycznym. Aby to zrobić, na rysunku pokazano funkcję $y(x)/(x^{3/4}\exp(2x^{-1/2}))$ w funkcji x dla $0 < x < 1$. Wartość tego stosunku wynosi $c_1 = 0.1432...$ przy $x \to 0^+$. Odległość pomiędzy tą wartością graniczną i narysowaną krzywą jest proporcjonalna do funkcji $\epsilon(x)$. Rysunek ten ilustruje siłę analizy asymptotycznej. Pomimo tego, że funkcja $y(x)$ zmienia się o rzędy wielkości, wiodące zachowanie $y(x)$ jest dobrym przybliżeniem $y(x)$ na całym odcinku $0 \leq x \leq 1$. Rysunek pokazuje też, że błąd względny $\epsilon(x)$ jest co najwyżej równy 15%. Główne zachowanie rozwiązania poprawia się dla $x \to 0^+$. Widzimy, że oszacowanie funkcji $\epsilon(x)$ może poprawić rozwiązanie.

Zanim będziemy kontynuować rozważania dotyczące przykładu, dokonamy przeglądu metody, która doprowadziła do jego przybliżonego rozwiązania. Jest to metoda dominacji (dominującej równowagi). Polega ona na identyfikacji tych członów równania, które można zaniedbać w granicy asymptotycznej. Jej realizacja odbywa się w trzech etapach.

1. Odrzucamy w równaniu wszystkie człony które są małe i zastępujemy równanie relacją asymptotyczną.

2. Zastępujemy relację asymptotyczną równaniem zamieniając znak ˜ znakiem równości = i dokładnie rozwiązujemy tak otrzymane równanie. Otrzymane rozwiązanie automatycznie spełnia relację asymptotyczną chociaż nie jest to jedyna spełniająca ją funkcja.

3. Sprawdzamy teraz czy otrzymane rozwiązanie jest zgodne z warunkiem przyjętym w (1). Jeśli zachodzi zgodność to musimy jeszcze pokazać, że równanie dla funkcji otrzymanej metodą eliminacji rozwiązania dominującego z rozwiązania dokładnego ma rozwiązanie, które zmienia się wolniej niż rozwiązanie dominujące. Kiedy tak jest wnioskujemy, że czynnik dominujący jest taki sam jak w rozwiązaniu dokładnym.

P r z y k ł a d. 4.
(c.d.) Poprawki do zachowania głównego w pobliżu początku układu. Wciąż pozostajemy przy równaniu $x^3 y'' = y$. Jego rozwiązanie jest ciągle niepełne gdyż można znaleźć cały szereg przybliżeń, które je poprawiają w granicy $x \to 0^+$. Znajdziemy kolejne przybliżenia do funkcji $\epsilon(x)$ w rozwiązaniu

(15). Najpierw znajdziemy równanie, które spełnia $1+\epsilon(x)$. Następnie znajdziemy jego rozwiązanie w postaci formalnego szeregu potęgowego

$$1+\epsilon(x) = 1 + a_1 x^{\alpha} + a_2 (x^{\alpha})^2 + a_3 (x^{\alpha})^3 + \dots, \tag{16}$$

gdzie $\alpha > 0$. Kiedy znajdziemy współczynniki a_k tego szeregu, rozwiązanie (1) przy $x \to 0^+$ będzie kompletne. Otrzymamy reprezentację $y(x)$ w postaci szeregu zawierającego funkcje elementarne. Wstawiając (16) do (15) otrzymamy rozwiązanie w postaci uogólnionego szeregu Frobeniusa. Jest to uogólnienie polegające na tym, że po pierwsze szereg ten zawiera exponentę która jest istotnie osobliwa. Po drugie, nie jest to szereg całkowitych potęg x; okaże się, że $\alpha = 1/2$. Po trzecie, szereg (16) jest rozbieżny dla $x \to 0^+$. Interpretację tego faktu odłożymy na później. Wyliczmy współczynniki a_k, $k = 1, 2, \dots$ oraz α. Znajdziemy w tym celu równanie, które spełnia $w(x) = 1 + \epsilon(x)$. Wstawiając (15) do (1) dostaniemy

$$w'' + (\frac{3}{2x} - \frac{2}{x^{3/2}})w' - \frac{3}{16x^2}w = 0\,. \tag{17}$$

Zastąpienie $y(x)$ przez $w(x)$ pozwoliło wydzielić wiodący człon rozwiązania. Zadanie wydzielenia wiodącego członu jest w analizie asymptotycznej konstrukcja rozwiązania, które zachowuje sie asymptotycznie jak stała. Nie eliminuje to z równania NPO. Z (2) i (15) lub na podstawie analizy lokalnej równania (17) wynika, że możliwym czynnikiem wiodącym $w(x)$ jest 1 lub $\exp(-4x^{-1/2})$. Zacznijmy obliczenia od znalezienia wiodącego zachowania $\epsilon(x)$. W tym celu wstawmy $w(x) = 1 + \epsilon(x)$ do (17). Mamy

$$\epsilon'' + (\frac{3}{2x} - \frac{2}{x^{3/2}})\epsilon' - \frac{3}{16x^2} - \frac{3\epsilon}{16x^2} = 0\,.$$

Zauważmy, że $\epsilon << 1,\ x \to 0^+$, a więc

$$\frac{3\epsilon'}{16x^2} << \frac{3}{16x^2}\ \ x \to 0^+\,.$$

Jednocześnie

$$\frac{3}{2x} << \frac{2}{x^{-3/2}}\ \ x \to 0^+\,.$$

Prowadzi to do równania

$$\epsilon'' - \frac{2}{x^{3/2}}\epsilon' \sim \frac{3}{16x^2}\ \ x \to 0^+\,, \tag{18}$$

które należy rozwiązać przy warunku $\epsilon \to 0,\ x \to 0^+$. Zastosujemy metodę dominujacej równowagi. Argumentujemy, że przy $x \to 0^+$ dowolny składnik równania (18) nie może być większy od dwu pozostałych bez naruszenia warunków, przy których to równanie jest relacją asymptotyczną. Mamy cztery możliwe przypadki. Rozważymy je w kolejności. Warunek, który nie prowadzi do sprzeczności to warunek ostatni, $\epsilon(x) \sim 3x^{1/2}/16$, $x \to 0^+$. Wynik ten poznaliśmy już w (14).

(a) $\epsilon'' \sim 3x^{-2}/16$ i $2x^{-3/2}\epsilon' << 3x^{-2}/16$, $x \to 0^+$. Dwukrotnie całkując pierwszą z relacji, dostaniemy $\epsilon \sim -3\ln x/16$, $x \to 0^+$. Jest to sprzeczne z warunkiem $\epsilon \to 0$, $x \to 0^+$.

(b) $\epsilon''/\epsilon' \sim 2x^{-3/2}$ i $3x^{-2}/16 << 2x^{-3/2}\epsilon$, $x \to 0^+$. Całkowanie pierwszej relacjidaje $\ln\epsilon' \sim -4x^{-11/2}$, $xx \to 0^+$. Jest to sprzeczne z założeniem, że $3x^{-2} << 2x^{-3/2}\epsilon'$, $x \to 0^+$.

(c) Nie można zaniedbać żadnego ze składników w porównaniu z dwoma pozostałymi.

(d) $-2x^{-3/2}\epsilon' \sim 3x^{-2}/16$ i $\epsilon'' << 2x^{-3/2}\epsilon$, $x \to 0^+$. Z pierwszej relacji mamy $\epsilon \sim -3x^{1/2}/16$. Pominięta została stała całkowania gdyż $\epsilon \to 0$ przy $x \to 0^+$. Otrzymany wynik nie jest sprzeczny ponieważ $\epsilon'' << 2x^{-3/2}\epsilon$, $x \to 0^+$. Jest to więc jedyny niesprzeczny warunek dominującej równowagi w tym zagadnieniu.

Pokazaliśmy, że

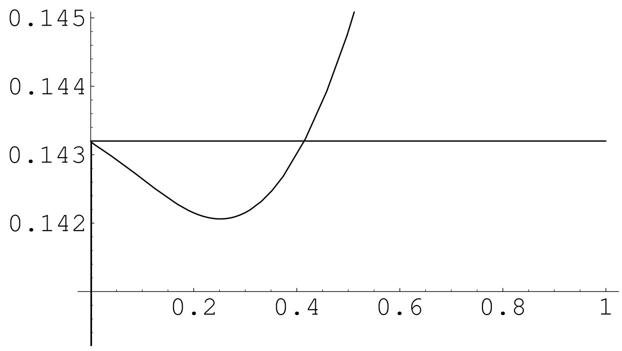
$$w(x) - 1 \sim -3x^{1/2}/16 \;\; (x \to 0^+)$$

lub

$$w(x) = 1 - 3x^{1/2}/16 + \epsilon_1(x)$$

gdzie $\epsilon_1(x) << 3x^{1/2}/16$, $x \to 0^+$.

Wróćmy do wyników numerycznych (patrz zadanie) pokazanych na poprzednim rysunku. Zaskoczeniem może się okazać fakt, że nachylenie krzywej $\epsilon(x)$ przy $x \to 0^+$ jest pionowe! Wyjaśnia sie to jesli popatrzymy na funkcję $3x^{1/2}/16$, której nachylenie przy $x \to 0^+$ jest nieskończone. Włączając do rozwiązania wiodący wkład od $\epsilon(x)$ otrzymujemy znaczną poprawę sytuacji. Nowe rozwiązanie asymptotyczne pokazano na następnym rysunku.



Wykres zależności $y(x)/(x^{3/4}\exp(2x^{-1/2})(1 - 3/16x^{1/2}))$ *gdzie* y *jest rozwiązaniem równania* $x^3y'' = y[y(1) = 1, y'(1) = 0]$.

Możemy terez znaleźć wiodące zachowanie $\epsilon_1(x)$. Postępując podobnie jak poprzednio otrzymamy

$$\epsilon_1(x) = -15x/512 + \epsilon_2(x)\,, \;\; \epsilon_2 << 15x/512\,, \;\; x \to 0^+\,.$$

Proces ten można kontynuowac w nieskończoność. Ponieważ jednak formalna struktura szeregu została odkryta (jest to szereg potęg wielkości $x^{1/2}$), mozna postąpić inaczej. Zapiszemy

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n/2}\,, \;\; (a_0 = 1)$$

i wstawmy to bezpośrednio do (18). Znajdziemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1)a_n x^{n/2-2} + \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n/2-2}$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} a_n x^{n/2-5/2} - \frac{3}{16}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n/2-2} = 0\,.$$

Porównując współczynniki przy jednakowych potęgach dostaniemy rekurencję

$$a_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n+3)}{16(n+1)} a_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Mamy więc $a_0 = 1$, $a_1 = -3/16$, $a_2 = -15/512$, itd. Ogólnie

$$a_n = -\frac{\Gamma(n-1/2)\Gamma(n+3/2)}{\pi 4^n n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Kończy to analizę lokalną rozwiązania równania (1), którego wiodącye zachowanie jest postaci

$$y(x) \sim -c_1 x^{3/4} \exp(2x^{-1/2}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-1/2)\Gamma(n+3/2)}{\pi 4^n n!} x^{n/2}, \quad x \to 0^+ . \tag{20}$$

Można sprawdzić, że promień zbieżności otrzymanego szeregu jest zerowy:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{16(n+1)}{(2n-2)(2n+3)} \right| = 0 .$$

Szereg (20) jest rozbieżny dla wszystkich x! Jest to jednakowoż szereg asymptotyczny i dla $x \to 0^+$ będzie on dobrym przybliżeniem $y(x)$.

W podobny sposób dostajemy drugie rozwiazanie rozpatrywanego równania

$$y(x) \sim -c_1 x^{3/4} \exp(2x^{-12}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n-1/2)\Gamma(n+3/2)}{\pi 4^n n!} x^{n/2}, \quad x \to 0^+ . \tag{21}$$

Podsumujmy metodę, którą zastosowaliśmy w przytoczonym przykładzie. Po pierwsze, podstawienie $y = e^S$ pozwoliło otrzymać przebieg $S(x)$ z dokładnością do członów, które znikają przy $x \to x_0$. Wyznaczyło to wiodące zachowanie $y(x)$. W następnym kroku *wyizolowaliśmy* to wiodące zachowanie rozwiązania i pozostałą część rozwiązania rozwinęliśmy w szereg ułamkowych potęg $(x - x_0)$.

Zastosowana tutaj metoda jest bardzo ogólną metodą postepowania, która pracuje dla szerokiej klasy równań różniczkowych.

P r z y k ł a d. 5.
Lokalny przebieg rozwiązań równania Schroedingera n-tego rzędu w pobliżu nieregularnych punktów osobliwych. Znajdziemy ważny wzór na wiodący przebieg rozwiązania równania Schroedingera n-tego rzędu

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Q(x) y(x) , \tag{22}$$

w pobliżu istotnej osobliwości równania x_0.

Podstawienie $y(x) = e^{S(x)}$ oraz przybliżenie asymptotyczne $d^k S/dx^k << (S')^k$, $x \to x_0$, $k = 2, 3, \dots, n$, dają asymptotyczne równanie rózniczkowe dla S: $(S')^n \sim Q(x)$, $x \to x_0$. Stąd $S(x) \sim \omega \int^x [Q(t)]^{1/n} dt$, gdzie ω jest n-tym pierwiastkiem z jedności. Wynik ten wyznacza n możliwych czynników kontrolnych dla $y(x)$. W zwykły sposób znajdujemy główny przebieg $y(x)$:

$$y(x) \sim c[Q(x)]^{(1-n)/2n} \exp\left\{ \omega \int^x [Q(t)]\, dt \right\}, \quad x \to x_0 .$$

Jeśli $x_0 \neq \infty$ to (22) jest słuszne gdy $|(x - x_0)^n Q(x)| \to \infty$ przy $x \to x_0$. Jeżeli $x_0 = \infty$ to (22) słuszne jest jeśli $|x^n Q(x)| \to \infty$. Otrzymany wzór stanowi podstawę metody WKB. Jeżeli $Q(x) < 0$ to rozwiązanie $y(x)$ oscyluje przy $x \to \infty$.

Z a d a n i e 4.

Pokazać, że asymptotycznymi rozwiązaniami podanych równań są funkcje wypisane obok tych równań.

(a) $y'' = y/x^5$; $y(x) \sim cx^{5/4} \exp(\pm 2x^{-3/2}/3)$, $(x \to 0^+)$.

(b) $y'' = xy$; $y(x) \sim cx^{-1/3} \exp(3\omega x^{4/3}/3)$, $(x \to \infty)$, $\omega^3 = 1$.

(c) $y^{(iv)} = (x^4 + \sin x)y$; $y(x) \sim cx^{-3/2} \exp(\omega x^2/2)$, $(x \to \infty)$, $\omega = \pm 1, \pm i$.