1 Metody rozwiązywania równań jednorodnych

Omówimy pokrótce sposoby rozwiązywania różnych typów **zwyczajnych równań różniczkowych**. .

Równania o stałych współczynnikach

Równanie różniczkowe o stałych współczynnikach $p_j = const$ rozwiązujemy wstawiając do równania $y(x) = e^{rx}$. W wyniku podstawienia dostajemy $L[e^{rx}] = e^{rx}P(r)$, gdzie

$$P(r) = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_j r^j$$

jest wielomianem stopnia n. Rozwiązania równania $Ly = 0$, odpowiadające różnym pierwiastkom $r_1, r_2, \ldots, r_n$ równania $P(r) = 0$ są

$$y = e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, . \tag{1}$$

W przypadku istnienia wielokrotnych pierwiastków wielomianu $P(r)$ zbiór rozwiązań dany przez (1) nie stanowi zbioru zupełnego rozwiązań. W celu skonstruowania pozostałych rozwiązań założymy, że r_1 jest m-krotnym pierwiastkiem. Wówczas

$$L[e^{rx}] = e^{rx}(r - r_1)^m Q(r)\,,$$

gdzie $Q(r)$ jest wielomianem stopnia $n - m$. Jeśli prawa strona tego równania znika, to e^{rx} jest rozwiązaniem $Ly = 0$. Kładąc $r = r_1$ widzimy, że rzeczywiście $[e^{r_1 x}]$ jest rozwiązaniem równania. Aby otrzymać więcej rozwiązań obliczamy kolejne pochodne po r i kładziemy w otrzymanych wynikach $r = r_1$. W ten sposób dostajemy m rozwiązań

$$y = e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{r_1 x}\,.$$

Kombinacja liniowa wszystkich rozwiązań (1) i (1) jest ogólnym rozwiązaniem równania różniczkowego.

P r z y k ł a d. 1.
Równania o stałych współczynnikach.
(a) $y'' - 5y + 4y = 0$. Wstawiając $y = e^{rx}$ dostajemy równanie kwadratowe $(r-1)(r-4) = 0$. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego jest $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.
(b) Wstawiając do równania $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ $y = e^{rx}$ dostajemy równanie kubiczne na r, $(r-1)^3 = 0$. Ogólne rozwiązanie ma więc postać $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$.

Równania Eulera

Równania, które są niezmiennicze względem transformaji skalowania $x \to ax$ noszą nazwę równań Eulera lub równań równowymiarowych. Współczynniki tych równań są postaci $p_j(x) = q_j/x^j$, gdzie q_j są stałymi. Równania Eulera można przetransformować w równania o stałych współczynnikach stosując zamianę zmiennych:

$$x = e^t, \quad x\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\,.$$

Alternatywny sposób rozwiązywania polega na podstawieniu do równania funkcji $y = x^r$. Stąd dostaje się $L[x^r] = P(r)x^{r-m}$, gdzie $P(r)$ jest wielomianem stopnia n zmiennej r. Rozwiązania mają postać

$$y = x^{r_1}, x^{r_2}, x^{r_3}, \ldots$$

W przypadku gdy $P(r)$ posiada wielokrotny pierwiastek r_1, to zupełny układ rozwiązań dostaniemy różniczkując kolejno związek $L[x^r] = P(r)x^{n-m}$ po r i podstawiając $r = r_1$. Zupełny układ rozwiązań jest

$$y = x^{r_1}, x^{r_1}\ln x, x^{r_1}(\ln x)^2, \ldots$$

P r z y k ł a d. 2.
Równanie Eulera. Wstawmy $y = x^r$ do równania $y'' + y/4x^2 = 0$. Otrzymamy $(r-1/2)^2 = 0$. Ogólnym rozwiązaniem jest więc $y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}\ln x$.

Równania dokładne

Równanie dokładne jest pochodną równania niższego rzędu: $Ly = (d/dx)(My) = 0$. Całkowanie po x prowadzi do równania niejednorodnego $My = c_1$.

P r z y k ł a d. 3.
Równanie $y'' + xy' + y = 0$ można przedstawić jako $(y' + xy)' = 0$. Stąd $y' + xy = c_1$. Rozwiązaniem tego równania jest

$$y = \left(c_1\int_0^x \exp(t^2/2)dt + c_2\right)\exp(-x^2/2)\,.$$

Czynnikiem całkującym równania jest taka funkcja x i y, która po pomnożeniu przez nią równania czyni je dokładnym.

P r z y k ł a d. 4.
Czynnik całkujący. Równanie $y'' + y'(1+x)/x + y(x-1)/x^2 = 0$ po pomnożeniu przez czynnik e^x staje się równaniem dokładnym $(d/dx)(e^x y' + e^x y/x) = 0$. Stąd

$$e^x y' + e^x y/x = c_1\,.$$

Rozwiązaniem ogólnym tego równania jest $y(x) = -c_1(1+x)e^{-x}/x + c_2/x$.

Redukcja rzędu równania

W przypadku gdy jakieś rozwiązanie $y_1(x)$ równania $Ly = 0$ zostało znalezione można obniżyć stopień równania wstawiając za y wyrażenie $y = y_1(x)u(x)$, w którym funkcja $u(x)$ jest nieznana. Otrzymane w wyniku tego równanie ma postać $Mu = 0$. Urok tego podstawienia polega na tym, że otrzymane równanie nie posiada członu w rodzaju $p_0(x)u(x)$. Równanie $Mu = 0$ jest więc jednorodnym równaniem rzędu $n-1$ na funkcję $v = u'(x)$.

P r z y k ł a d. 5.
Suma współczynników równania $y'' - y(1+x)/x + y/x = 0$ wynosi 0. Wynika stąd, że jednym z rozwiązań równania jest $y_1(x) = e^x$. Podstawiając $y = y_1(x)u(x)$ dostajemy $u'' + u'(x-1)/x = 0$. Jest to równanie pierwszego rzędu na $u'(x)$. Ogólne rozwiązanie jest postaci $y(x) = c_1 e^x + c_2(1+x)$.

Transformacja do równania znanego typu

Jeśli zawodzą różne sposoby, można spróbować przekształcić równanie do jednego z równań fizyki matematycznej. Pewne często występujące równania to równanie Airy'ego

$$y'' = -xy\,,$$

równanie parabolicznego walca (Webera-Hermite'a)

$$y'' + (\nu + 1/2 - 1/4x^2)y = 0$$

oraz równanie Bessela

$$y'' + y'/x + (1 - \nu^2/x^2)y = 0\,.$$

2 Metody rozwiązywania równań niejednorodnych

Równania różniczkowe niejednorodne są tylko trochę bardziej skomplikowane w porównaniu z jednorodnymi. Jest tak, ponieważ różnica dwu rozwiązań równania $Ly = f(x)$ jest rozwiązaniem równania $Ly = 0$. Wynika stąd, że rozwiązanie ogólne równania $Ly = f$ jest sumą szczególnego rozwiązania równania $Ly = f(x)$ i ogólnego rozwiązania równania jednorodnego $Ly = 0$.

P r z y k ł a d. 6.
Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego. Załóżmy, że $y = x$, $y = x^2$ i $y = x^3$ spełniają równanie drugiego rzędu $Ly = f(x)$. Czy można zbudować rozwiązanie ogólne równania nie znając L i $f(x)$? Różnice $x - x^2$ i $x - x^3$ są rozwiązaniami $Ly = 0$. Funkcje te są liniowo niezależne, więc rozwiązaniem ogólnym $Ly = 0$ jest $y(x) = c_1(x - x^2) + c_2(x - x^3)$. Stąd, ogólnym rozwiązaniem równania $Ly = f(x)$ jest $y(x) = c_1(x - x^2) + c_2(x - x^3) + x$.

Opiszemy krótko inne niż podane wcześniej metody rozwiązywania równań niejednorodnych.

Metoda wariacji parametrów

Znajomość rozwiązania odpowiadającego problemy jednorodnego pozwala uprościć zadanie znalezienia rozwiązania ogólnego równania niejednorodnego do znalezienia jednego rozwiązania szczególnego.

Rozpatrzmy równanie drugiego rzędu. Niech $y_1(x)$ i $y_2(x)$ będą liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego $Ly = 0$, gdzie $L = d^2/dx^2 + p_1(x)d/dx + p_0(x)$. Poszukujemy rozwiązania szczególnego $Ly = f(x)$ postaci

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\,. \tag{2}$$

POnieważ u_1 i u_2 nie są zdefiniowane więc możemy zażądać by spełniały pewne warunki, które uproszczą otrzymane równania. Założymy, że

$$u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = 0\,. \tag{3}$$

Różniczkując (2) dwa razy, wstawiając do $Ly = f$ oraz wykorzystując $Ly_1 = Ly_2 = 0$ dostaniemy

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x)\,.$$

Wykorzystaliśmy też nałożony na u_1 i u_2 warunek (2). Rozwiązaniem równań (3) i(2) jest

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -\tfrac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \\ u_2'(x) &= \tfrac{f(x)y_1(x)}{W(x)}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie $W(x)$ jest wrońskianem $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)]$ i jest różny od zera gdyż założyliśmy niezależność liniową rozwiązań y_1 i y_2.

Całkowanie (4) prowadzi do

$$y(x) = -y_1(x)\int^x \frac{f(x)y_2(x)}{W(x)}dt + y_2(x)\int^x \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}dt\,. \tag{5}$$

Funkcje Greena

Funkcją Greena równania $Ly(x) = f(x)$ nazywa się funkcję $G(x,a)$ spełniająca równanie

$$LG(x,a) = \delta(x = a)\,, \tag{6}$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją dela Diraca. Jej podstawową własnością jest

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a)\,. \tag{7}$$

Znajomość G pozwala wypisać rozwiązanie równania w postaci

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,a)f(a)da\,. \tag{8}$$

Z a d a n i e 1.

Pokazać, że (8) rozwiązuje równanie $Ly = f$. Funkcję G łatwo jest otrzymać jeśli znamy rozwiązania równania jednorodnego $Ly = 0$. Zrobimy to dla równanie drugiego rzędu

$$LG(x,a) = \left[\frac{d^2}{dx^2} + p_1(x)\frac{d}{dx} + p_0(x)\right] G(x,a) = \delta(x-a)\,. \tag{9}$$

Oznaczmy liniowo niezależne rozwiązania równania $Ly = 0$ przez $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Ponieważ dla $x \neq a$ prawa strona równania (9) dla G znika, więc

$$\begin{aligned} G(x,a) &= a_1y_1(x) + a_2y_2(x)\,, \quad x < a\,, \\ G(x,a) &= b_1y_1(x) + b_2y_2(x)\,, \quad x > a\,. \end{aligned}$$

Można pokazać, ż funkcja G w ponkcie $x = a$ jest ciągła, a jej pochodna dG/dx posiada w $x = a$ skok równy jedności. Stąd

$$a_1y_1(a) + a_2y_2(a) = b_1y_1(a) + b_2y_2(a)\,,$$

$$b_1y_1(a) + b_2y_2 - a_1y_1(a) - a_2y_2(a) = 1\,.$$

Rozwiązując te równania dostaniemy

$$b_1 - a_1 = -\frac{y_2(a)}{W[y_1(a), y_2(a)]}\,, \tag{10}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{y_1(a)}{W[y_1(a), y_2(a)]}\,, \tag{11}$$

$G4$ jest wyznaczona z dokładnością do stałych a_1 i a_2. Kładąc $a_1 = a_2 = 0$ mamy w końcu

$$G(x,a) = \frac{-y_2(a)y_1(x) + y_1(a)y_2(x)}{W[y_1(a), y_2(a)]}\,, \quad x \geq a\,, \tag{12}$$

oraz $G(x,a) = 0$ dla $x < a$.

Wstawienie tego wzoru do równania (8) odtwarza wzór otrzymany w metodzie wariacji parametrów (5).

P r z y k ł a d. 7.
Funkcja Greena dla problemu brzegowego $y''(x) = f(x)$ $[y(0) = 0,\ y'(1) = 0]$ jest zdefiniowana równaniem

$$(\partial^2 G/\partial x^2(x,a) = \delta(x-a)\,, \quad G(0,a) = 0\,, \quad (\partial G/\partial x)(1,a) = 0\,.$$

G spełnai te same warunki brzegowe co y. Rozwiązanie jest $G(x,a) = -x$ dla $x < a$ i $G(x,a) = -a$ dla $xgea$ gdzie $0 < a < 1$. Stąd $y(x) = \int_0^1 G(x,a)f(a)da$.

Redukcja rzędu równania

Podobnie jak w przypadku równań jednorodnych, redukcja rzędu równania upraszcza problem znajdowania rozwiązań. Jest ona szczególnie przydatna w przypadku równań drugiego rzędu gdyż prowadzi do równań rzędu pierwszego, które można prosto i zawsze scałkować.

Metoda nieokreślonych współczynników

P r z y k ł a d. 8.
$y'' + y = e^x \sin x$. Zgadujemy rozwiązanie w postaci $y = ae^x \sin x + be^x \cos x$. Aby wyznaczyć współczynniki wstawiamy rozwiązanie do równania różniczkowego. Stąd $a = -1/5$, $b = -2/5$.

3 Nieliniowe równania pierwszego rzędu

Równania nieliniowe są dużo trudniejsze do rozwiązanie w porównaniu z liniowymi z wyjątkiem kilku równań specjalnych. Są to równania Bernouliego i niektóre równania Riccatiego.

Równanie Bernouliego

Równanie Bernouliego jest postaci

$$y' = a(x)y + b(x)y^p \,, \tag{13}$$

gdzie p jest dowolne. W szczególnych przypadkach gdy $p = 0$ lub $p = 1$ mamy do czynienia z równaniami liniowym lub separowalnym. W ogólnym przypadku podstawienie

$$y(x) = [u(x)]^1/(1-p)$$

redukuje równanie do postacj

$$u'(x) = (1-p)a(x)u + (1-p)b(x) \,, \tag{14}$$

które jest rozwiązywalne gdyż jest liniowe w u.

Równania Riccatiego

Równaniem Riccatiego nazywa się równanie różniczkowe

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \,. \tag{15}$$

W przypadku $a = 0$ równanie jest liniowe, a w przypadku $c = 0$ jest to równanie Bernouliego. Nie ma ogólnej metody rozwiązywania równań Riccatiego. Podstawienie

$$y(x) = \frac{w'(x)}{a(x)w(x)}\,, \tag{16}$$

zamienia równanie Riccatiego w równanie drugiego rzędu dla $w(x$:

$$w'' + \left[\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right] w'(x) + a(x)c(x)w(x) = 0\,. \tag{17}$$

Transformacja działa również w stronę przeciwną.

Wiele równań Riccatiego daje się jednak rozwiązać. Załóżmy, że znamy jakieś rozwiązanie $y_1(x)$ równanie Riccatiego. Wstawimy do równanie pierwotnego wyrażenie

$$y(x) = y_1(x) + u(x)\,, \tag{18}$$

Wynikiem jest równanie dla $u(x)$

$$u' = [b(x) + 2a(x)y_1(x)]u(x) + a(x)u^2(x)]\,. \tag{19}$$

To równanie można rozwiązać. Jest to równanie Bernouliego.

P r z y k ł a d. 9.
Równanie Riccatiego. Można spostrzec, że $y_1(x) = x$ spełnia następujące równanie Riccatiego

$$y' = y^2 - xy + 1\,.$$

Nie jest to jednak rozwiązanie ogólne. Podstawmy: $y = y_1 + u(x)$. Mamy następujące równanie dla u: $u' = u^2 + xu$. Jest to równanie Bernouliego z $p = 2$. Podstawiając $u(x) = 1/v(x)$ dostaniemy następujące równanie dla $v(x)$:

$$v'(x) + xv(x) + 1 = 0\,.$$

Równanie to posiada czynnik całkujący $I(x) = \exp(\int_0^x tdt) = \exp(x^2/2)$, a więc

$$d/dx(v\exp(x^2/2) + \exp(x^2/2) = 0\,.$$

Całkowanie daje

$$v(x)\exp x^2/2 = c_1 - \int_9^x \exp(x^2/2)dx\,.$$

Stąd ogólne rozwiązanie równania Riccatiego jest

$$y(x) = x + \exp(x^2/2)/[c_1 - \int_0^x \exp(t^2/2)dt]\,.$$

Równania dokładne

Równanie zupełne pierwszego rzędu można zapisać w postaci

$$M[x,y(x)] + N[x,y(x)]y'(x) = \frac{d}{dx}f[x,y(x)] = 0\,. \tag{20}$$

Rozwiązanie dane jest równaniem $f[x,y(x)] = c-1$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym by równanie było zupełne jest równość:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\,. \tag{21}$$

Równaniami zupełnymi są równania separowalne gdyż są postaci $M(x) + N(y)y' = 0$, a więc spełniają (**??**).

W ogólności znalezienie czynnika całkującego równania nieliniowego jest zadaniem trudnym.

4 Równania nieliniowe wyższych rzędów

Równania autonomiczne

Równaniem autonomicznym nazywamy takie równanie różniczkowe, w którym zmienna niezależna nie występuje jawnie. Przykład: $y'' + y' + y = 0$. Równania autonomiczne są niezmiennicze na translacje $x \to x + a$.

Jeśli w równaniu autonomicznym położymy

$$y'(x) = u(y)\,, \quad y'' = du/dx = (du/dy)(dy/dx) = u'(y)u(y)\,, \ldots$$

itd., to otrzymamy równwnie rzędu $(n-1)$.

Równania bezwymiarowe w x

Równanie nazywamy bezwymiarowym w x jeśli transformacja $x \to ax$ nie zmienia równania. Przykładem jest równanie $y'' = y'''y'x^2$. Można je zamienić na równania autonomiczne podstawiając $x = e^t$,

Równania niezmiennicze względem skalowania

Równanie jest niezmiennicze względem skalowania jeśli istnieje liczba p taka, że transformacja skalowania

$$x \to ax\,, \quad y \to a^p y$$

nie zmienia równania. P r z y k ł a d. 10.

Równanie Thomasa-Fermiego jest postaci: $y'' = y^{3/2}x^{-1/2}$. Równanie to jest niezmiennicze względem transformacji skalowania $x \to ax$, $y \to a^{-3}y$. Równanie niezmiennicze względem skalowania można przetransformować do równania bezwymiarowego w x poprzez podstawienie

$$y(x) = x^p u(x)\,.$$

P r z y k ł a d. 11.
Równanie Thomasa-Fermiego $y'' = y^{3/2}x^{-1/2}$ można przeprowadzić w równwnie bezwymiarowe w x transformacją $y = x^{-3}u$. Dostajemy $x^2u'' - 6xu' + 12u = u^{3/2}$. To ostatnie równanie możemy doprowadzić następnie do autonomicznego, wstawiając $x = e^t$: $u''(t) - 7u'(t) + 12u = u^{3/2}$. Równanie to jest równoważne następującemu: $ww'(u) - 7w + 12u = u^{3/2}$. Jest to równanie pierwszego rzędu. Jego rozwiązanie analityczne nie jest znane.