## Równanie o skończonej liczbie wartości własnych

Równanie Schrödingera dla potencjału

$$U(x) = -\frac{U_0}{cosh^2(\alpha x)} \tag{1}$$

jest

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}\left(E + \frac{U_0}{cosh^2(\alpha x)}\right) y = 0\,. \tag{2}$$

Wykonując podstawienie $\xi = \tan h(\alpha x)$ i oznaczając

$$\epsilon = \sqrt{-2mE}/(\hbar\alpha)\,,$$

$$\frac{2mU_0}{\alpha^2\hbar^2} = s(s+1)\,, \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right)\,,$$

dostaniemy równanie

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dy}{d\xi}\right] + + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon}{1-\xi^2}\right] y = 0\,.$$

Równanie to jest jest równaniem uogólnionych funkcji Lagrange'a. Podstawienie

$$y = (1-\xi^2)^{\epsilon/2} w(x)$$

i zamiana zmiennej $u = (1-\xi)/2$ prowadzą do równania dla funkcji hipergeometrycznej

$$u(1-u)w'' + (\epsilon+1)(1-2u)w' - (\epsilon - s)(\epsilon + s + 1)w = 0\,.$$

Rozwiązanie skończone w punkcie $\xi = 1$ (odpowiada to $x \to \infty$) jest postaci

$$y = (1-\xi^2)^{\epsilon/2} F(\epsilon - s, \epsilon + s + 1, \epsilon + 1, (1-\xi)/2)\,.$$

Funkcja $y$ powinna być również skończona dla $\xi = -1$ (odpowiada to $x \to -\infty$). Aby to zapewnić należy położyć $\epsilon - s = -n$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$ $F(\ldots)$ staje się wtedy wielomianem $n$-tego stopnia.

Poziomy energetyczne wyznacza się z warunku $\epsilon - s = -n$. Daje to

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\left[-(1+2m) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right]^2$$

Liczba poziomów jest określona przez warunek $\epsilon > 0$ tj. $n < s$ i skończona.

## Funkcja hipergeometryczna

Funkcja hipergeometryczna zdefiniowana jest wewnątrz okręgu $|z| < 1$ szeregiem

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots \tag{3}$$

Przedłużenie analityczne tego szeregu poza $|z| < 1$ daje $F$ dla innych $z$. Funkcja $F$ jest szczególnym rozwiązaniem równania różniczkowego

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0\,. \tag{4}$$

Parametry $\alpha$ i $\beta$ są dowolne, a $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$. Funkcja ta oznaczana bywa również jako ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Konfluentna funkcja hipergeometryczna jest zdefiniowana równością

$$F(\alpha, \gamma, z) = \lim_{\beta \to 0} F(\alpha, \beta, \gamma, z/\beta)\,.$$

Drugim, liniowo niezależnym rozwiązaniem równania (4) jest

$$z^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)\,.$$

Rozwiązanie jest osobliwe w $z = 0$.

Następujący szereg jest zbieżny i stanowi przedłużenie analityczne $F$ poza koło $|z| < 1$.

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad &= \quad \frac{\gamma}{\beta - \alpha}(-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{z}) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{z})\,. \end{aligned}$$