LITERATURA: F. Bowman; prawie dosłowny przekład §61-§63

1 Funkcja Gamma $\Gamma(n)$ Eulera

Funkcja $\Gamma(n)$ odgrywa ważną rolę w teorii funkcji specjalnych. Przypomnimy jej definicję i podstawowe własności.

Definicja całkowa

Kiedy n jest dodatnie i całkowite funkcja Γ jest zdefiniowana całką:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx\,, \quad (n > 0) \tag{1}$$

Warunek $n > 0$ zapewnia zbieżność całki w $x = 0$.

Całkując przez części mamy

$$\Gamma(n) = [-e^{-x} x^{n-1}]_0^\infty + (n-1) \int_0^\infty e^{-x} x^{n-2} dx\,, \tag{2}$$

a więc

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)\,, \tag{3}$$

lub

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1\Gamma(1)\,. \tag{4}$$

Ponieważ

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1\,, \tag{5}$$

więc mamy

$$\Gamma(n+1) = n!\,. \tag{6}$$

Wstawiając w (1) $x \to x^2$ mamy również

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-1} dx\,. \tag{7}$$

Całka

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta \tag{8}$$

daje się przedstawić za pomocą funkcji Gamma. W tym celu wyliczymy na dwa sposoby całkę podwójną

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} x^{2m-1} y^{2n-1} dx dy\,. \tag{9}$$

Z równania (7) mamy

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m-1} \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2n-1} = \frac{1}{4}\Gamma(m)\Gamma(n)\,. \tag{10}$$

Z drugiej strony, po przejściu do współrzędnych biegunowych

$$\begin{aligned} u \qquad &= \textstyle\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} (r\,\cos\theta)^{2m-1} (r\,\sin\theta)^{2n-1} \\ &= \textstyle\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m+2n-1} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1\theta} \sin^{2n-1}\theta\, d\theta\,, \end{aligned}$$

co wynika z (7). Porównując oba wyniki mamy

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta\, \sin^{2n-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)}\,. \tag{11}$$

Wynika stąd, że dla $m > -1$, $n > -1$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m\theta\, \sin^n\theta\, d\theta = \frac{\Gamma((m+1)/2)\Gamma((n+1)/2)}{2\Gamma((m+n)/2)}\,. \tag{12}$$

W szczególności dla $m = 0$, $n = 0$, mamy

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\Gamma(1/2)^2}{2\Gamma(1)} = \Gamma(1/2)^2/2\,. \tag{13}$$

Z równania (3) mamy w szczególności

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \Gamma(1/2)/2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,, \\ \Gamma(7/2) &= \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\sqrt{\pi}\,, \\ \Gamma(5/2) &= \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\sqrt{\pi}\,, \end{aligned}$$

itd.

Z równania (4)

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}\,. \tag{14}$$

Stąd wynika, że $\Gamma(n) \to +\infty$ jeśli $n \to +0$.

Załóżmy teraz, że (14) jest spełnione dla $-1 \le n \le 0$, następnie dla $-2 \le n \le -1$, dalej dla $-3 \le n \le -2$ itd. W ten sposób funkcja Gamma została zdefiniowana dla wszystkich rzeczywistych wartości n. Np. z (14) i (13) mamy

$$\begin{aligned} \Gamma(-\frac{1}{2}) &= \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}\,, \\ \Gamma(-\frac{3}{2}) &= \frac{\Gamma(1/2)}{-3/2} = \frac{2^2}{1\cdot 3}\,, \end{aligned} \tag{15}$$

itd.

Oprócz definicji Γ danej równaniem (1) można podać inne definicje równoważne.

Formuła graniczna Eulera

Tzw. wzorem granicznym dla $\Gamma(z)$ jest wyrażenie

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! z^n}{z(z+1)\dots(z+n)} \tag{16}$$

Pokażemy jak otrzymać formułę graniczną. Wychodzimy z formuły całkowej Eulera.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 - x/n)^n z^{z-1} dx \tag{17}$$

Przejdziemy do nowej zmiennej $u = x/n$ i otrzymaną całkę obliczymy przez części

$$\int_0^1 (1-u)^n (nu)^{z-1} n du = n^z \left[\frac{u^z}{z} (1-u)^n |_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \right] . \tag{18}$$

Pierwsza składowa znika. Kontynuując obliczenia przez części dostajemy

$$\int_0^1 (1-u)^n (nu)^{z-1} n du = \frac{n^z n(n-1)\dots(1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \tag{19}$$

Stąd, składając mamy formułę graniczną (16). Formuła graniczna pokazuje, że tak zdefiniowana funkcja $\Gamma(z)$ jest określona wszędzie w płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktów $z = 0, -1, -2$, gdzie funkcja posiada proste bieguny.

Formuła Weierstrassa

Wzór albo formuła Weierstrasa podaje jeszcze inną postać Γ

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{z\gamma} \lim_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{s}\right) e^z , \tag{20}$$

gdzie γ jest stałą Eulera-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] \approx 0.5772156649. \tag{21}$$

Aby pokazać słuszność wzoru Weierstrassa (20) zauważmy, że

$$\frac{1 \cdot 2 \dots \cdot n}{(z+1)(z+2)\dots(z+n)} = \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{s}{s+z} \right) = \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{s+z}{s} \right)^{-1} . \tag{22}$$

Odwracając graniczny wzór Eulera można więc napisać

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} z \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{s}\right) n^{-z} . \tag{23}$$

Zapisując $n^{-z} = e^{-z \ln n}$, mnożąc i dzieląc przez

$$\exp\left[(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})z\right] = \prod_{s=1}^{n} e^{-z/s}, \tag{24}$$

dostaniemy

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left\{\lim_{n\to\infty} \exp\left[(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n)z\right]\right\}\left\{\lim_{n\to\infty} \prod_{s=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{s}\right)^{-z/s}\right\}. \tag{25}$$

Pierwszy czynnik $\{...\}$ jest równy stałej γ. Otrzymaliśmy więc wzór (20).

Wzór Stirlinga

Przytoczymy bez dowodu asymptotyczny szereg Stirlinga dla Γ.

$$\ln(z!) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + (z + \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} + \ldots) \tag{26}$$

Tutaj $z! = \Gamma(z+1)$. Szereg Stirlinga wraz z formułami redukcyjną i odbiciową jest wygodny do obliczeń Γ dla dowolnych z.

Zadania

Z a d a n i e 1.

Oblicz residua funkcji Γ w punktach 0, -1, -2, ...

Z a d a n i e 2.

Otrzymać wzór podwajania $\sqrt{\pi}\Gamma(2x) = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)$ oraz wzór odbiciowy $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$.

Z a d a n i e 3.

Mając $\Gamma(1/4) \approx 3.62561$ i $\Gamma(1/3) \approx 2.67894$ wyznaczyć $\Gamma(2/3)$, $\Gamma(3/4)$, $\Gamma(1/6)$, $\Gamma(5/6)$.

Z a d a n i e 4.

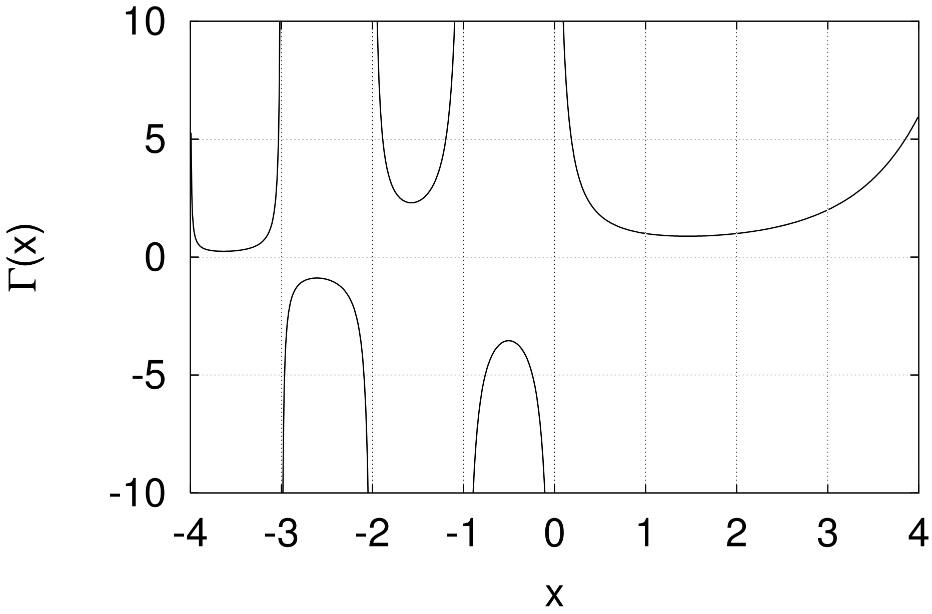
Napisać program, który oblicza $\Gamma(n)$ dla dowolnego, rzeczywistego n. W przypadku niepowodzenia(!) wykorzystać wyniki poprzedniego zadania lub następującą tablicę zawierającą kilka wartości funkcji $\Gamma(n)$ dla n z przedziału $[1, 2]$.[1]

n	Γ
1 00	1.00000 00000
1.25	0.90640 24771
1.50	0.88622 69255
1.75	0.91906 25268
2.00	1.00000 00000

[1] Co wiesz o aproksymacji wielomianowej?

Sprawdź dokładność obliczeń. Jak zwiększyć dokładność?

Z a d a n i e 5.
Sporządzić grafik $\Gamma(n)$ dla $n \in [-4, 4]$. Wynik powinien przypominać grafik pokazany poniżej.



Funkcja $\Gamma(n)$. *Rysunek wykonano programem* `gnuplot`.

Z a d a n i e 6.
Porównać napisany program numeryczny z moim , gdzie wykorzystano przybliżenie Hastingsa $\Gamma(x+1) = 1 + \sum_1^8 b_n x^n$. Współczynniki b_n, $n = 1, \ldots, 8$ podane zostały w programie (patrz również Arfken). Wartości Γ dla ujemnych argumentów obliczane są z formuły odbiciowej. Dla dużych x zastosowano szereg Stirlinga.

Z a d a n i e 7.
Napisz program obliczający $\Gamma(z)$ z szeregu Stirlinga (dla dowolnych z). Porównaj wyniki z wynikami otrzymanymi z poprzednich programów. U w a g a: W celu osiągnięcia dobrej dokładności obliczeń ...