1 Krótkie wprowadzenie do analizy asymptotycznej

Wprowadzimy dwa symbole, które wyrażają względne zachowanie sie dwu funkcji.

1. Piszemy
$$f(x) << g(x)\,, \quad x \to x_0\,,$$
co czytamy "$f(x)$ jest dużo mniejsza od $g(x)$ przy $x \to x_0$"jeśli
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0\,.$$

2. Oznaczamy
$$f(x) \sim g(x)\,, \quad x \to x_0\,,$$
co czytamy "$f(x)$ jest asymptotyczna $g(x)$ przy x dążącym do x_0"jeśli względny błąd f i g dąży do zera przy $x \to x_0$:
$$f(x) - g(x) << g(x)\,, \quad x \to x_0\,,$$
a więc
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0\,,$$
lub
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Uwaga: Jeśli $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$ to $g(x) \sim f(x)(x \to x_0)$.

P r z y k ł a d. 1.
Relacje asymptotyczne.

1. $x << 1/x(x \to 0)$.
2. $x^{1/2} << x^{1/3}(x \to 0)$.
3. $(log x)^5 << x^{1/4}(x \to \infty)$
4. $x^{1/2} \sim 2(x \to 4)$.
5. $e^x + x \sim e^x(x \to \infty)$. Zauważmy, że różnica pomiędzy lewą i prawą stroną tej relacji, x, dąży do ∞ przy $x \to \infty$. Stąd, nawet jeśli funkcje są asymptotyczne to nie musza byc równe.
6. $x^2 \sim x(x \to 0)$ ponieważ obie funkcje osiągają zero w różnym tempie. W tym przypadku, pomimo tego, że zarówno x jak i x^2 są w przybliżeniu równe zeru przy $x \to 0$ nie są one asymptotyczne.
7. Błędem jest przyjęcie, że funkcja jest asymptotyczna z zerem. Np. równanie asymptotyczne $x^3 \sim 0(x \to 0)$ jest błędne; z definicji żadna niezerowa funkcja nie może być asymptotyczna zeru.
8. $x << -10(x \to 0^+)$ pomimo różnicy znaków.