

Popularne wykłady z matematyki

Ilya M. Sobol

Metoda Monte Carlo



AB 13 sierpnia 2017

Tytuł oryginału:

Метод Монте Карло (Metod Monte Carlo)

Autor:

Илья Меерович Соболев (Ilya Meerovich Sobol')

Seria:

Popularne wykłady z matematyki, tom 46

Wydawnictwo:

Moskwa, *Nauka*

Główna Redakcja Literatury Matematyczno-Fizycznej

198

Do użytku wewnętrznego

Z rosyjskiego tłumaczył Andrzej Baran

Spis treści

Spis treści	iii
Wstęp do wydania czwartego	v
Wstęp do wydania pierwszego	v
Przedmowa tłumacza	vii
§1. Ogólne wyobrażenie o metodzie	1
1 Modelowanie zmiennych losowych	7
§2. Zmienne losowe	7
§3. Komputerowe generatory liczb losowych	22
§4. Przekształcenia zmiennych losowych	28
2 Przykłady zastosowań metody MC	39
§5. Systemy obsługi masowej	39
§6. Sprawdzanie jakości i niezawodności produktów	45
§7. Przechodzenie neutronów przez płytke	51
§8. Problem astrofizyczny	59
§9. Obliczanie całek oznaczonych	62
3 Wiadomości uzupełniające	69
§10. O liczbach pseudolosowych	69
§11. Metody modelowania zmiennych losowych	72

§12. O algorytmach Monte Carlo	89
Bibliografia	97
Skorowidz	102

Wstęp

Wstęp do wydania czwartego

W czwartym wydaniu nie zmieniły się tylko §§1, 5 i 6. Jak poprzednio, Rozdziały 1, 2 są wciąż dostępne dla tych czytelników, którzy nie studiowali teorii prawdopodobieństwa. Znajomość jej podstaw zakłada się w nowym Rozdziale 3.

Nowe §§10–12 są poświęcone współczesnym sposobom otrzymywania liczb pseudolosowych, różnorodnym metodom modelowania zmiennych losowych oraz pojęciu pracochłonności algorytmów Monte Carlo. W nowym §8 przedstawiono rozwiązanie pewnego problemu astrofizycznego, z wykorzystaniem metody Monte Carlo.

Moskwa, 1984 r.

I. Sobol

Wstęp do wydania pierwszego

Przed kilku laty zaproponowano mi dwa wykłady na temat metody Monte Carlo dla słuchaczy fakultetu techniki obliczeniowej Uniwersytetu Społecznego. Zgodziłem się. Przed pierwszym wykładem stwierdziłem z przerażeniem, że większość słuchaczy nie zna teorii prawdopodobieństwa. Za późno już było by się wycofać. W biegu należało dołączyć do wykładu dodatkowy

rozdział, który zapoznałby studentów z podstawowymi pojęciami teorii prawdopodobieństwa.

Wykłady były powtarzane przez kilka lat. *Ustalila* się ich treść. Obecne wydanie zawiera również dodany Rozdział 2, o którym chciałbym powiedzieć kilka słów.

Każdemu zdarza się używać słów *prawdopodobieństwo* i *zmienna losowa*. Intuicyjne wyobrażenie o prawdopodobieństwie (jako o częstości zdarzeń) mniej lub bardziej odpowiada prawdziwej treści tego pojęcia. Intuicyjne wyobrażenia o zmiennej losowej jest jednakże dalekie od jej definicji matematycznej. Z tego też względu w §2 zakłada się, że pojęcie prawdopodobieństwa jest znane, a objaśnia się trudniejsze pojęcie zmiennej losowej. Paragraf ten nie zastępuje wykładu teorii prawdopodobieństwa. Jego treść jest uproszczona i podana bez dowodów. Pozwala on jednak na pewne wyobrażenia o zmiennych losowych, wystarczające do zrozumienia najprostszych chwytów metody Monte Carlo.

Podstawowym celem książeczki jest pokazanie specjalistom z bardzo różnych kierunków, że w uprawianych przez nich dziedzinach spotyka się problemy, które dają się rozwiązać metodami Monte Carlo.

Zagadnienia jakie rozważane są w wykładach, są w miarę łatwe i rozmaite. Nie ilustrują one jednak wszystkich dziedzin zastosowań metody. Podam tylko jeden przykład. W całej książce nie ma ani słowa o medycynie. Pomimo tego, metody §7 pozwalają obliczać dawki naświetlań w terapii promienistej. Posiadanie programu obliczającego pochłanianie promieniowania w różnych tkankach ciała, pozwala na bardzo dokładne określenie dawki i kierunku naświetlania, i jednocześnie pozwala uchronić zdrową tkankę przed uszkodzeniami.

W książce znalazł się cały wykładany materiał. Nieco dokładniej potraktowano przykłady oraz dodany został §9.

Moskwa, 1967 r.

I. Sobol

Przedmowa tłumacza

Ta pięknie napisana, mała książeczka przyciągnęła moją uwagę ze względu na proste i swobodne sformułowanie trudnego problemu obliczeń metodą Monte Carlo. Nigdzie więcej nie spotkałem się z tak zwartym i ścisłym potraktowaniem tematu na tak przystępnym poziomie. Czytelnik znajdzie tutaj wszystko co pozwala zrozumieć samą metodę jak też wszystko co ją ilustruje, poczynając od prostych definicji, a kończąc na zaawansowanych matematycznych i fizycznych problemach i ich rozwiązaniach.

Pierwsze wydanie miało miejsce bardzo wcześnie, bo jeszcze w roku 1967, a więc zanim nastąpiła prawdziwa era komputerów. Wydanie drugie pojawiło się w roku 1984 – też dawno. Mimo to wszystkie zagadnienia poruszane w książeczce są ciągle aktualne i wszystkie podane w niej rozwiązania są wciąż *do wzięcia*.

Metoda Monte Carlo znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i życia. Pomógł w tym bez wątpienia rozwój technologii komputerowych, jak i praca matematyków, jak I.M. Sobol.

Lublin, 2017 r.

Andrzej Baran

Wprowadzenie

§1. Ogólne wyobrażenie o metodzie

Metoda Monte Carlo jest liczbową metodą rozwiązywania problemów matematycznych z pomocą modelowania zmiennych losowych.

1.1. Pochodzenie metody Monte Carlo Za datę urodzin metody Monte Carlo przyjęto uważać rok 1949, kiedy to pojawił się artykuł zatytułowany „The Monte Carlo method”. [1, Metropolis, N., Ulam, S.]. Za twórców metody uważa się matematyków amerykańskich, J. Neumanna¹ i S. Ulama² Pierwsze artykuły o metodzie Monte Carlo w Związku Radzieckim były opublikowane w latach 1955-1956.³

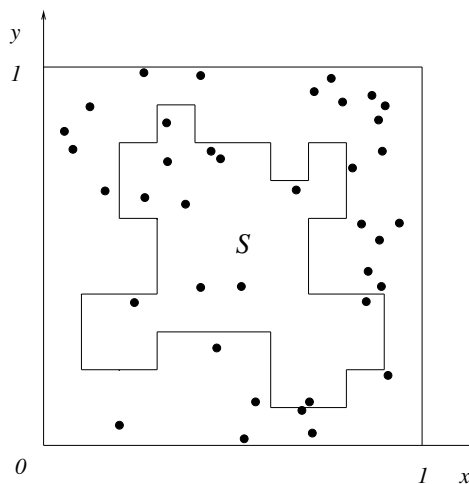
¹John von Neumann (ur. 28 grudnia 1903 w Budapeszcie, zm. 8 lutego 1957 w Waszyngtonie) – węgierski matematyk, inżynier chemik, fizyk i informatyk, pracujący głównie w Stanach Zjednoczonych. Wniósł znaczący wkład do wielu dziedzin matematyki – w szczególności był głównym twórcą teorii gier, teorii automatów komórkowych (w które pewien początkowy wkład miał także Stanisław Ulam) i stworzył formalizm matematyczny mechaniki kwantowej. Uczestniczył w projekcie Manhattan. Przyczynił się do rozwoju numerycznych prognoz pogody. [przypis tłumacza]

²Stanisław Marcin Ulam (ur. 13 kwietnia 1909 we Lwowie, zm. 13 maja 1984 w Santa Fe) – polski i amerykański matematyk, przedstawiciel lwowskiej szkoły matematycznej, współtwórca amerykańskiej bomby termojądrowej. Swoje życie opisuje sam Ulam w książce *Przygody matematyka*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1996. [przypis tłumacza]

³Były to artykuły V.V. Chavchanidze, Yu.A. Schreidera, V.S. Vladimirova.

Ciekawe, że podstawy teoretyczne metody były znane od dawna. W dodatku, pewne problemy statystyczne rozwiązywano za pomocą losowych wyborów, tj. tak naprawdę, metodą Monte Carlo. Jednakże aż do czasu pojawienia się komputerów metoda nie mogła być stosowana szerzej, gdyż ręczne modelowanie zmiennych losowych jest zadaniem bardzo pracochłonnym. Pojawienie się metody Monte Carlo jako całkowicie uniwersalnej metody obliczeń stało się możliwe tylko dzięki pojawieniu się komputerów.

Sama nazwa „Monte Carlo” pochodzi od miasta Monte Carlo w Księstwie Monako, słynnego ze swoich domów gry. Rzecz w tym, że jednym z najprostszych mechanizmów do otrzymywania liczb losowych jest . . . ruletka. O tym będzie mowa w §3. W tym miejscu wypada chyba odpowiedzieć na często zadawane pytanie: „Czy metoda Monte Carlo pomaga wygrać w ruletkę?” Niestety, nie pomaga. I nawet się tym nie zajmuje.



Rysunek 1

1.2 Przykład 1.

By czytelnik łatwo mógł zrozumieć o czym będzie mowa, rozpatrzmy prosty przykład. Założymy, że musimy obliczyć pole powierzchni figury płaskiej S . Może to być dowolna figura z brzegiem krzywoliniowym, zadany graficznie

lub analitycznie, jednorodna, lub złożona z wielu części. Niech to będzie figura pokazana na Rys. 1, i założmy, że jest ona zawarta w jednostkowym kwadracie. Weźmy N punktów losowo rozmieszczonych we wnętrzu kwadratu. Oznaczmy przez N' liczbę punktów z wnętrza S . Z geometrycznych wyobrażeń jasno wynika, że pole S można przybliżyć stosunkiem N'/N . Im większe jest N tym oszacowanie to jest lepsze.

W przykładzie, przedstawionym na Rys. 1, wzięto 40 punktów. Dwanaście z nich leży wewnątrz S . Stosunek N'/N wynosi $12/40 = 0,30$. Dokładne pole S jest równe $0,35$.⁴

1.3. Dwie właściwości metody Monte Carlo Pierwszą własność metody, to prosta struktura algorytmu obliczeń. Z reguły buduje się program realizacji jednego zdarzenia losowego (w p. 1.2 należy wybrać punkt losowy w kwadracie i sprawdzić czy należy on do S). Następnie zdarzenie to powtarza się N -razy tak by każdy eksperyment był niezależny od poprzednich i wyniki wszystkich doświadczeń uśredniają się. Z tego też powodu metodę Monte Carlo nazywa się czasami *metodą prób statystycznych*.

Drugą cechą metody Monte Carlo jest zbieżność obliczeń, proporcjonalna z reguły do $\sqrt{D/N}$, gdzie D jest pewną stałą, a N jest liczbą prób. Widać stąd, że w celu 10-krotnego zmniejszenia błędu (czyli inaczej mówiąc aby uzyskać w wyniku następną prawdziwą cyfrę dziesiętną), należy zwiększyć N (tzn. ilość pracy) 100 razy.

W ten sposób nie da się oczywiście, bardzo zwiększyć dokładności. Zazwyczaj uważa się, że metoda Monte Carlo jest szczególnie efektywna przy rozwiązywaniu tych problemów, dla których wystarcza znajomość wyniku z niewielką dokładnością.

Ten sam problem można jednakże rozwiązywać z zastosowaniem różnych wariantów metody Monte Carlo,⁵ którym odpowiadają różne warto-

⁴W praktyce, metoda Monte Carlo nie jest stosowana do obliczania pól figur płaskich. Do tego celu stosuje się metody, które chociaż bardziej złożone, zapewniają wysoką dokładność obliczeń. Pokazana w przykładzie metoda Monte Carlo pozwala jednak równie prosto obliczyć „wielowymiarową objętość” ciała w przestrzeni wielowymiarowej. W tym przypadku metoda Monte Carlo pozostaje często jedyną metodą liczbową, która daje możliwość rozwiązania problemu.

⁵W literaturze zagranicznej pisze się często o *metodach* Monte Carlo (w liczbie mnogiej),

ści parametru D . W wielu przypadkach udaje się polepszyć dokładność, wybierając ten sposób obliczeń, któremu odpowiada znacznie mniejsza wartość D .

1.4. Problemy rozwiązywalne metodą Monte Carlo Po pierwsze, metoda Monte Carlo pozwala modelować dowolne procesy, których przebieg zależy od czynników przypadkowych. Po drugie, w wielu matematycznych problemach, nie związanych w ogóle z przypadkowością, udaje się wymyśleć sztuczny model stochastyczny (i to nie jeden), pozwalający rozwiązywać te problemy. Właściwie, zrobiliśmy to w p. 1.2. W tym sensie metoda Monte Carlo jest uniwersalną metodą rozwiązywania problemów matematycznych.

Szczególnie interesujący jest fakt, że można odstąpić od modelowania prawdziwego procesu losowego, rozpatrując zamiast niego model sztuczny. Taką sytuację rozpatrujemy w §7, §8.

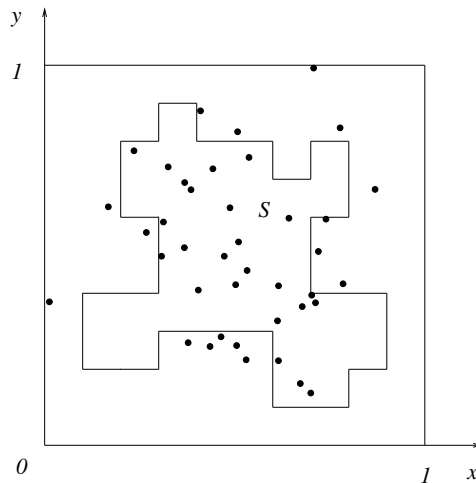
1.5. Jeszcze o przykładzie Wróćmy do przykładu z p. 1.2. W celu wykonania obliczeń musieliśmy umieścić punkty losowe w kwadracie jednostkowym. Jak to wykonać fizycznie? Wyobraźmy następujący eksperyment. Rys. 1 (w powiększeniu) z figurą S oraz kwadratem, powieszono jak tarczę na ścianie. Łucznik, znajdujący się w pewnej odległości, strzela N razy celując w środek kwadratu. Z pewnością nie wszystkie strzały trafią w środek: wybiją one N przypadkowych dziur w tarczy.⁶ Czy można na podstawie tych punktów oszacować pole S

Wynik takiego doświadczenia pokazano na Rys. 2. W eksperymencie tym $N = 40$, $N' = 24$ i $N'/N = 0,60$ co przekracza prawdziwą wartość pola $(0,35)$ prawie dwukrotnie. Wiadomo zresztą, że jeśli łucznik jest strzelcem wysokiej klasy, to wynik doświadczenia będzie jeszcze gorszy, ponieważ wszystkie strzały będą układać się w pobliżu środka i znajdą się w S .⁷

mając na uwadze fakt, że to sam problem można rozwiązać przy pomocy modelowania różnych zmiennych losowych.

⁶Zakładamy, że łucznik nie jest mistrzem świata i jest dostatecznie daleko od ściany.

⁷O tym jak wybierać punkty losowe na Rysunkach 1 i 2, będzie mowa w p. 4.5.



Rysunek 2

Łatwo zrozumieć, że nasza metoda obliczania powierzchni będzie poprawna tylko wtedy, gdy przypadkowe punkty nie będą „zwyczajnie przypadkowe”, lecz będą jednocześnie „równomiernie rozrzucone” po całym kwadracie. Aby nadać sens tym słowom, należy zapoznać się z definicją zmiennych losowych i niektórymi ich własnościami. Wiadomości na ten temat są przedstawione bez dowodów w §2. Czytelnik znający dowolny kurs teorii prawdopodobieństwa, może opuścić cały §2 oprócz p. 2.5.

Modelowanie zmiennych losowych

1

§2. Zmienne losowe

Zakładamy, że czytelnik, mniej więcej zna, pojęcie prawdopodobieństwa i przechodzimy bezpośrednio do pojęcia *zmienna losowa*.

Słów *zmienna losowa* używa się w zwykłym sensie wtedy, gdy chodzi o podkreślenie, że nie wiadomo jaka będzie konkretna wartość tej zmiennej, przy czym czasami słowa te oznaczają brak jakiejkolwiek wiedzy o tej zmiennej.

Matematyk używa jednak tych słów, podkładając pod nie całkiem konkretną treść. Rzeczywiście nie wiemy jaką wartość będzie mieć dana zmienna w konkretnym przypadku, ale powiada on, wiemy jakie wartości może ona przyjmować i znamy prawdopodobieństwa wystąpienia tych lub innych wartości. Na tej podstawie nie możemy przewidzieć wyniku jednej próby związanej z daną zmienną losową, lecz możemy całkiem pewnie przewidzieć jaki będzie zbiór wyników dużej liczby prób. Im więcej prób (lub jak się powiada, im lepsza statystyka) tym dokładniejsze będą wyniki przewidywań.

W celu określenia zmiennej losowej należy więc wskazać, jakie wartości może ona przyjmować i jakie są prawdopodobieństwa ich występowania.

2.1. Dyskretne zmienne losowe.

Definicja 1 (Dyskretne zmienne losowe): Zmienna losowa ξ nazywa się dyskretną jeśli jej wartości tworzą zbiór dyskretny x_1, x_2, \dots, x_n .⁸

Dyskretne zmienna losowa ξ zdefiniowana jest tablicą

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad (\text{T})$$

gdzie x_1, x_2, \dots, x_n są możliwymi wartościami zmiennych ξ , a p_1, p_2, \dots, p_n odpowiadającymi im prawdopodobieństwami. Mówiąc dokładniej, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa przyjmie wartość x_i (oznaczamy je przez $\mathbf{P}\{\xi = x_i\}$), wynosi p_i :

$$\mathbf{P}\{\xi = x_i\} = p_i.$$

Tablica (T) nosi nazwę *rozkładu zmiennej losowej*. Liczby x_1, x_2, \dots, x_n mogą być, ogólnie biorąc, dowolne. Natomiast, prawdopodobieństwa p_1, p_2, \dots, p_n powinny spełniać dwa warunki:

1) wszystkie p_i są dodatnie

$$p_i > 0; \quad (1)$$

2) suma wszystkich p_i jest równa 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (2)$$

(warunek ten oznacza, że ξ musi przyjąć jedną z wartości x_1, x_2, \dots, x_n).

⁸W teorii prawdopodobieństwa rozpatruje się również dyskretne zmienne losowe, o nieskończonej liczbie wartości.

Definicja 2 (Wartość oczekiwana): Wartością oczekiwaną zmiennej losowej ξ nazywa się liczbę

$$\mathbf{M} \xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (3)$$

Aby wyjaśnić sens fizyczny tej wielkości, zapiszemy

$$\mathbf{M} \xi = \sum_{i=1}^n x_i p_i \left(\sum_{i=1}^n p_i \right)^{-1}.$$

Widać stąd, że $\mathbf{M} \xi$ jest wartością średnią zmiennej ξ . Bardziej prawdopodobne wartości ξ wchodzi do sumy z większymi wagami.⁹

Odnotujmy najważniejsze własności wartości oczekiwanej. Jeśli c jest dowolną zmienną, nielosową, to

$$\mathbf{M} (\xi + c) = \mathbf{M} \xi + c, \quad (4)$$

$$\mathbf{M} c \xi = c \mathbf{M} \xi. \quad (5)$$

Jeśli ξ, η są dowolnymi zmiennymi losowymi, to

$$\mathbf{M} (\xi + \eta) = \mathbf{M} \xi + \mathbf{M} \eta. \quad (6)$$

⁹Definicja z wagami występuje bardzo często w różnych dziedzinach nauki. Na przykład w mechanice: jeśli w punktach (na osi Ox) rozmieszczone są masy m_1, m_2, \dots, m_n , to rzędną środka ciężkości układu wylicza się ze wzoru

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i m_i \left(\sum_{i=1}^n m_i \right)^{-1}.$$

Jasne, że suma mas nie musi, w tym przypadku, równać się jedności.

Definicja 3 (Dyspersja, wariancja zmiennej losowej): Dyspersją lub wariancją zmiennej losowej ξ nazywamy liczbę

$$\mathbf{D} \xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M} \xi)^2. \quad (7)$$

Dyspersja $\mathbf{D} \xi$ jest więc wartością oczekiwaną kwadratu różnicy zmiennej losowej ξ i jej wartości średniej $\mathbf{M} \xi$. Jest jasne, że zawsze $\mathbf{D} \xi > 0$.

Wartość oczekiwana i dyspersja są najważniejszymi charakterystykami liczbowymi zmiennej losowej ξ . Jakie jest ich znaczenie praktyczne?

Jeśli będziemy obserwować zmienną ξ wielokrotnie i otrzymamy wartości $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ (z których każda będzie równa jednej z liczb x_1, x_2, \dots, x_N), to średnia arytmetyczna z tych wartości będzie bliska $\mathbf{M} \xi$:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N} = \mathbf{M} \xi. \quad (8)$$

Dyspersja $\mathbf{D} \xi$ charakteryzuje rozrzut tych wartości wokół średniej $\mathbf{M} \xi$.

Wzór (7) dla dyspersji można przekształcić korzystając z (4)-(6):

$$\mathbf{D} \xi = \mathbf{M}[\xi^2 - 2\mathbf{M} \xi \cdot \xi + (\mathbf{M} \xi)^2] = \mathbf{M} \xi^2 - 2\mathbf{M} \xi \mathbf{M} \xi + (\mathbf{M} \xi)^2,$$

skąd

$$\mathbf{D} \xi = \mathbf{M} \xi^2 - (\mathbf{M} \xi)^2. \quad (9)$$

Obliczanie dyspersji z tego wzoru jest łatwiejsze niż obliczanie jej ze wzoru (7).

Odnotujmy najważniejsze własności dyspersji. Jeśli c jest dowolną zmienną nielosową, to

$$\mathbf{D}(\xi + c) = \mathbf{D} \xi, \quad (10)$$

$$\mathbf{D} c\xi = c^2 \mathbf{D} \xi . \quad (11)$$

Ważną rolę w teorii prawdopodobieństwa odgrywa pojęcie niezależnych zmiennych losowych. W rzeczywistości pojęcie to jest dość skomplikowane, ale w zwykłych przypadkach jest ono oczywiste.¹⁰

Niezależne zmienne losowe ξ i η spełniają związki

$$\mathbf{M} \xi \eta = \mathbf{M} \xi \mathbf{M} \eta , \quad (12)$$

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D} \xi + \mathbf{D} \eta . \quad (13)$$

Przykład 2.

Zastanówmy się nad zmienną losową κ o rozkładzie

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} .$$

Można sądzić, że w rzeczywistości zmienną tę realizuje sześcienna kostka do gry. Przy jej rzucaniu wypada z jednakowym prawdopodobieństwem jakaś liczba oczek. Obliczmy wartość oczekiwaną κ według wzoru (3) :

$$\mathbf{M} \kappa = 1 \cdot 1/6 + \dots + 6 \cdot 1/6 = 3,5 ;$$

dyspersję κ ze wzoru (9) :

$$\mathbf{D} \kappa = \mathbf{M} \kappa^2 - (\mathbf{M} \kappa)^2 = 1^2 \cdot 1/6 + \dots + 6^2 \cdot 1/6 - (3,5)^2 = 2,917 .$$

¹⁰Wyobraźmy sobie, że oprócz zmiennej losowej ξ obserwujemy dodatkowo losową zmienną η . Jeśli rozkład zmiennej ξ nie zmienia się w zależności od tego, że znamy wartość jaką ma zmienna η , to naturalnym jest założyć, że ξ nie zależy od η .

Przykład 3.

Rozpatrzmy zmienną losową θ o rozkładzie

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Za jej realizację można uważać rzut monetą, jeśli przyjąć, że przykładowo trójce odpowiada orzeł, a czwórce reszka. W tym przypadku

$$\mathbf{M}\theta = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 4 = 3,5;$$

$$\mathbf{D}\theta = 0,5(3^2 + 4^2) - (3,5)^2 = 0,25.$$

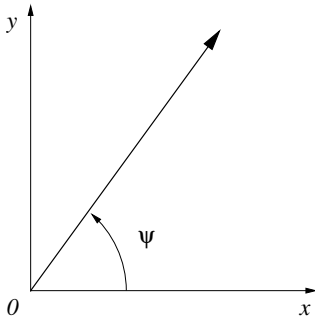
Widzimy, że $\mathbf{M}\theta = \mathbf{M}\kappa$, ale $\mathbf{D}\theta < \mathbf{D}\kappa$. Ostatni wniosek był łatwy do przewidzenia, jako że wartości θ mogą różnić się od 3,5 tylko o $\pm 0,5$, natomiast w przypadku κ rozrzut może sięgać $\pm 2,5$.

2.2. Ciągłe zmienne losowe Załóżmy, że na płaszczyźnie, w początku układu współrzędnych, znajduje się pewna ilość radu. Przy rozpadzie każdego atomu, rad promieniuje cząstkę α . Kierunek jej wylotu oznaczmy przez ψ (Rys. 3). Ponieważ i teoretycznie, i praktycznie możliwe są dowolne kierunki wylotu cząstki, to ta zmienna losowa może przyjmować dowolne wartości od 0 do 2π .

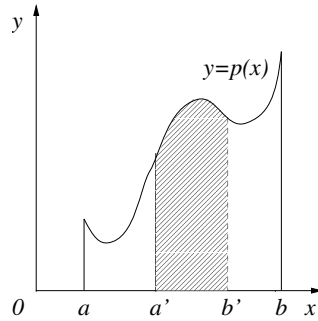
Definicja 4 (Ciągła zmienna losowa): Zmienną losową ξ będziemy nazywać ciągłą, jeśli może ona przyjmować dowolne wartości z pewnego przedziału (a, b) .

Ciągłą zmienną losową ξ definiuje się przez zadanie przedziału (a, b) , zawierającego możliwe wartości tej zmiennej, i funkcji $p(x)$, która nazywa się *gęstością prawdopodobieństwa* zmiennej losowej ξ (lub *gęstością rozkładu* ξ).

Gęstość $p(x)$ ma następujący sens fizyczny. Niech (a', b') będzie dowolnym przedziałem zawartym w (a, b) (tzn. $a \leq a' < b' \leq b$). Wówczas, prawdopodobieństwo tego, że ξ wypadnie w przedziale (a', b') jest równe całce



Rysunek 3



Rysunek 4

$$\mathbf{P}\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx. \quad (14)$$

Zakreślone na Rys. 4 pole równe jest wartości tej całki.

Zbiór wartości ξ może tworzyć dowolny przedział. Możliwy jest nawet przypadek $a = -\infty$, a także $b = \infty$. Gęstość powinna jednak spełniać dwa warunki, analogicznie jak (1) i (2) w przypadku zmiennych dyskretnych:

1. Gęstość $p(x)$ jest dodatnia

$$p(x) > 0; \quad (15)$$

2. Całka z gęstości $p(x)$ po całym przedziale (a, b) jest równa 1:

$$\int_a^b p(x) dx = 1. \quad (16)$$

Definicja 5 (Wartość oczekiwana ciągłej zmiennej losowej): Wartością oczekiwaną *ciągłej zmiennej losowej* ξ nazywamy liczbę

$$\mathbf{M} \xi = \int_a^b x p(x) dx . \quad (17)$$

Sens jej jest taki sam jak w przypadku dyskretnej zmiennej losowej. Ponieważ

$$\mathbf{M} \xi = \int_a^b x p(x) dx \left(\int_a^b p(x) dx \right)^{-1} ,$$

to łatwo zauważyć, że jest to średnia wartość ξ : przecież wartością ξ może być dowolna liczba x z przedziału (a, b) , która wchodzi do całki z wagą $p(x)$.¹¹

Wszystko w p. 2.1, począwszy od formuły (4) do (13), jest słuszne w przypadku ciągłych zmiennych losowych: i definicja dyspersji (wariancji), i formuła jej obliczania (9), i wszystkie własności $\mathbf{M} \xi$ i $\mathbf{D} \xi$. Nie będziemy ich powtarzać.¹²

Zwrócimy jeszcze tylko uwagę na jedno wyrażenie dla wartości oczekiwanej funkcji zmiennej losowej ξ . Niech jak poprzednio zmienna losowa ξ ma rozkład gęstości $p(x)$. Weźmy dowolną funkcję ciągłą $f(x)$ i zastanówmy się nad zmienną losową $\eta = f(\xi)$. Można udowodnić, że

¹¹Również i w tym przypadku można wskazać analogiczną formułę z mechaniki. Jeśli gęstość liniowa pręta $a \leq x \leq b$ wynosi $\rho(x)$ to rzędną środka masy pręta oblicza się według wzoru

$$\bar{x} = \int_a^b x \rho(x) dx \left(\int_a^b \rho(x) dx \right)^{-1} .$$

¹²W teorii prawdopodobieństwa rozpatruje się również ogólniejsze ciągle zmienne losowe, dla których $p(x) \geq 0$. Spotyka się zmienne, dla których nie istnieje $\mathbf{M} \xi$. Możliwy jest przypadek $\mathbf{D} \xi = \infty$.

$$\mathbf{M}f(\xi) = \int_a^b f(x)p(x) dx . \quad (18)$$

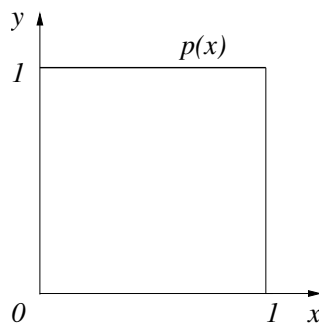
Zresztą, analogiczne wyrażenie obowiązuje również w przypadku dyskretnej zmiennej losowej ξ o rozkładzie (T):

$$\mathbf{M}f(\xi) = \sum_{i=1}^n f(x_i)p_i .$$

Podkreślmy, że w ogólności $\mathbf{M}f(\xi) \neq f(\mathbf{M}\xi)$.

Na zakończenie zauważymy, że w przypadku dowolnej ciągłej zmiennej losowej ξ dla każdego x mamy $\mathbf{P}\{\xi = x\} = 0$. Sens fizyczny posiada nie prawdopodobieństwo tego, że ξ wypadnie w zadanym punkcie x , ale prawdopodobieństwo, że ξ wypadnie w dowolnie małym przedziale:

$$\mathbf{P}\{x \leq \xi < x + dx\} = p(x) dx .$$



Rysunek 5

Ważny Przykład 4.

Zmienna losowa γ , określona w przedziale $(0, 1)$ i mająca rozkład $p(x) = 1$, nazywa się *jednorodną (równomierną) w $(0, 1)$* (Rys. 5). Faktycznie, niezależnie od tego jaki jest przedział (a', b') wewnątrz $(0, 1)$, prawdopodobieństwo tego, że

γ wypadnie w (a', b') równa się

$$\int_{a'}^{b'} p(x) dx = b' - a',$$

tzn. długości tego przedziału. W szczególności, jeśli podzielimy przedział $(0, 1)$ na dowolną liczbę podprzedziałów o jednakowej długości, to prawdopodobieństwo trafienia z γ w dowolny z nich, będzie jednakowe.

Łatwo pokazać, że

$$\mathbf{M} \gamma = \int_0^1 x p(x) dx = \int_0^1 x dx = 1/2,$$

$$\mathbf{D} \gamma = \int_0^1 x^2 p(x) dx - (\mathbf{M} \gamma)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

Ze zmienną losową γ spotkamy się jeszcze nie raz w przyszłości.

2.3. Normalne zmienne losowe

Definicja 6 (Normalna zmienna losowa): Normalną (lub gaussowską) zmienną losową nazywa się zmienną losową ξ określoną na całej osi liczbowej $(-\infty, \infty)$, z gęstością

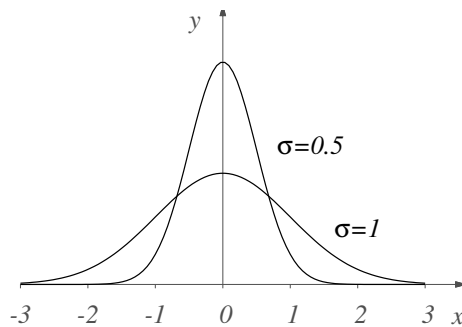
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (19)$$

gdzie a i $\sigma > 0$ są parametrami liczbowymi.

Parametr a nie wpływa na kształt krzywej $y = p(x)$: jego zmiany powodują jedynie przesuwanie się krzywej wzdłuż osi x . Przy zmianach σ kształt krzywej ulega zmianom. Łatwo mianowicie zauważyć, że

$$\max p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Jeśli zmniejszymy σ , to $\max p(x)$ wzrośnie. Pole pod krzywą $y = p(x)$ z powodu warunku (16) równe jest 1. Z tego względu krzywa będzie się podnosić w otoczeniu $x = a$ i będzie się obniżać przy wszystkich odpowiednio dużych wartościach x . Na Rys. 6 zbudowano dwie normalne gęstości, dla których $a = 0$, $\sigma = 1$ oraz $a = 0$, $\sigma = 0,5$. (jeszcze jedną gęstość normalną pokazano na Rys. 21).



Rysunek 6

Można pokazać, że

$$\mathbf{M}\xi = a, \quad \mathbf{D}\xi = \sigma^2.$$

Dowolne prawdopodobieństwa typu $\mathbf{P}\{x' < \xi < x''\}$ wylicza się łatwo na podstawie tablicy zawierającej wartości funkcji

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt,$$

nazywanej zazwyczaj *całką prawdopodobieństwa*.¹³ Faktycznie, zgodnie z (14)

$$\mathbf{P}\{x' < \xi < x''\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx.$$

¹³Niektórzy autorzy nazywają całkami prawdopodobieństwa inne funkcje niż Φ . Funkcje te można jednak wyrazić przez Φ stosując proste przekształcenia.

Przeprowadzając w całce zamianę zmiennych całkowania $x - a = \sigma t$ otrzymamy

$$\mathbf{P}\{x' < \zeta < x''\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt,$$

gdzie $t_1 = (x' - a)/\sigma$, $t_2 = (x'' - a)/\sigma$. Wynika stąd, że

$$\mathbf{P}\{x' < \zeta < x''\} = 0,5[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)].$$

Zauważmy też, że $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Normalne zmienne losowe bardzo często spotyka się przy badaniu najróżniejszych w swojej naturze problemów. O powodach dlaczego tak jest traktuje następujący rozdział.

Prawo trzech sigm Jeśli weźmiemy $x' = a - 3\sigma$, $x'' = a + 3\sigma$, to $t_1 = -3$, $t_2 = 3$ i w konsekwencji

$$\mathbf{P}\{a - 3\sigma < \zeta < a + 3\sigma\} = \Phi(3) = 0,997. \quad (20)$$

Prawdopodobieństwo 0,997 jest tak bliskie jedności, że często ostatni związek interpretuje się następująco: w pojedynczym eksperymencie praktycznie nie można otrzymać wartości ζ różniącej się od $\mathbf{P}\{\zeta\}$ o więcej niż 3σ .

Błąd prawdopodobny Rozpatrzmy wielkość $r = 0,6745\sigma$ i weźmy $x' = a - r$, $x'' = a + r$. Wówczas $t_1 = -0,6745$, $t_2 = 0,6745$ i

$$\mathbf{P}\{a - r < \zeta < a + r\} = \Phi(0,6745) = 0,500.$$

Przepiszmy ostatnią równość w postaci

$$\mathbf{P}\{|\zeta - a| < r\} = 0,5.$$

Prawdopodobieństwo nierówności przeciwnej jest także równe 0,5

$$\mathbf{P}\{|\zeta - a| > r\} = 0,5$$

($\mathbf{P}\{|\zeta - a| = r\} = 0$, gdyż zmienna losowa ζ jest wielkością ciągłą).

Ostatnie formuły pokazują, że odchyłka ζ od a o więcej niż o r , jak też odchylenie o mniej niż o r , są jednakowo prawdopodobne. Dlatego też wielkość r nosi nazwę *błędu prawdopodobnego*.

Przykład 5.

Błąd pomiaru δ często jest normalną zmienną losową. Jeśli nie ma systematycznego błędu pomiarowego, to $a = \mathbf{M}\delta = 0$. Wielkość $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\delta}$ nazywana *średnim błędem kwadratowym* jest zawsze dodatnia i charakteryzuje dokładność samej metody pomiaru.

Zazwyczaj uważa się, że przy pojedynczym pomiarze, wartość błędu $|\delta|$ nie przewyższa 3σ . Błąd prawdopodobny $r = 0,6745\sigma$ służy natomiast jako charakterystyczna miara wielkości $|\delta|$, która może być zarówno większa jak i mniejsza od r

$$\mathbf{P}\{|\delta| < r\} = \mathbf{P}\{|\delta| > r\} = 1/2.$$

2.4. Centralne twierdzenie graniczne teorii prawdopodobieństwa To wyjątkowe twierdzenie pierwszy sformułował P. Laplace.¹⁴ Jego uogólnieniami zajmowało się wielu znakomitych matematyków, m.in. P.L. Czebyszow,¹⁵ A. A. Markow,¹⁶ A.M. Lapunow.¹⁷ Dowód twierdzenia jest dość skomplikowany.

Rozpatrzmy N jednakowych, niezależnych zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, takich, że ich rozkłady gęstości są jednakowe. W konsekwencji, wartości średnie oraz dyspersje są takie same (zakłada się ich skończoność). Zmienne te mogą być ciągłe jak też dyskretne.

¹⁴Pierre Simon de Laplace, ur. 23 marca 1749 w Beaumont-en-Auge, zm. 5 marca 1827 w Paryżu – francuski matematyk, astronom, geodeta i fizyk, jeden z twórców teorii prawdopodobieństwa, zwolennik subiektywnej interpretacji prawdopodobieństwa, na podstawie której dokonał m.in. obliczeń masy Saturna, które odbiegają od współcześnie uznanej wartości o mniej niż 1%. [przypis tłumacza]

¹⁵Pafnutij Lwowicz Czebyszow, ros. Пафнутий Львович Чебышёв, (ur. 4 maja/16 maja 1821 w Okatowie w guberni kałuskiej, zm. 26 listopada/8 grudnia 1894 w Sankt Petersburgu) – rosyjski matematyk. [przypis tłumacza]

¹⁶Andriej Markow, ros. Андрей Андреевич Марков - Andriej Andriejewicz Markow (ur. 14 czerwca 1856 w guberni Riazanskiej, zm. 20 lipca 1922) – rosyjski matematyk. [przypis tłumacza]

¹⁷Aleksandr Michajłowicz Lapunow, ros. Александр Михайлович Ляпунов, (ur. 6 czerwca 1857 w Jarosławiu; zm. 3 listopada 1918 w Odessie) - rosyjski matematyk, autor prac naukowych z zakresu matematyki, fizyki matematycznej i mechaniki teoretycznej [przypis tłumacza].

Wprowadźmy oznaczenia

$$\mathbf{M} \xi_1 = \mathbf{M} \xi_2 = \dots = \mathbf{M} \xi_N = m ,$$

$$\mathbf{D} \xi_1 = \mathbf{D} \xi_2 = \dots = \mathbf{D} \xi_2 = b^2 .$$

Sumę tych wielkości oznaczmy przez

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N .$$

Z formuł (6), (13) wynika, że

$$\mathbf{M} \rho_N = \mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nm ,$$

$$\mathbf{D} \rho_N = \mathbf{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N) = Nb^2 .$$

Rozważmy następnie normalną zmienną losową ζ_N o parametrach $a = Nm, \sigma = b\sqrt{N}$.

Twierdzenie 1 (Centralne twierdzenie graniczne): Centralne twierdzenie graniczne mówi, że dla dowolnego przedziału (a', b') i dla dużych N

$$\mathbf{P}\{a' < \rho_N < b'\} \approx \int_{a'}^{b'} p_{\zeta_N}(x) dx .$$

Fizyczny sens twierdzenia jest następujący: suma ρ_N dużej liczby jednakowych zmiennych losowych jest w przybliżeniu normalna. Twierdzenie to jest również prawdziwe przy nieco słabszych założeniach. Składowe zmienne losowe nie muszą być jednakowe i niezależne. Ważne jest jedynie, by oddzielne składowe nie odgrywały większej roli w tej sumie.

Właśnie to twierdzenie wyjaśnia dlaczego normalne zmienne losowe tak często występują w przyrodzie. Faktycznie, za każdym razem, gdy stykamy się z sumarycznym wpływem dużej liczby nieznaczących czynników losowych, wynikowa zmienna losowa okazuje się być normalną.

Na przykład, odchylenie pocisku artyleryjskiego od celu jest zawsze normalną zmienną losową ponieważ zależy zarówno od warunków meteorologicznych w różnych miejscach toru jak również od wielu innych czynników.

2.5. Ogólny schemat metody Monte Carlo Załóżmy, że musimy obliczyć pewną nieznaną wielkość m . Spróbujmy wymyślić taką zmienną losową ξ by $\mathbf{M}\xi = m$. Niech jednocześnie $\mathbf{D}\xi = b^2$.

Rozpatrzmy N niezależnych zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, których rozkłady pokrywają się z rozkładem ξ . Jeśli N jest wystarczająco duże, to zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym rozkład sumy $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$ będzie w przybliżeniu rozkładem normalnym o parametrach $a = Nm, \sigma = b\sqrt{N}$. Z (20) wynika, że

$$\mathbf{P}\{Nm - 3b\sqrt{N} < \rho_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0,997.$$

Jeśli podzielimy wyrażenie w nawiasie sześciennym przez N , to otrzymamy równoważną nierówność i prawdopodobieństwo jej zajścia będzie takie samo

$$\mathbf{P}\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997.$$

Ostatni związek przepisujemy w nieco innej postaci

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m\right| < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0,997. \quad (21)$$

Jest to szczególnie ważny związek dla metody Monte Carlo. Dostarcza on jednocześnie zarówno metodę wyliczania m , jak też szacunkowy błąd obliczeń.

Faktycznie, znajdziemy N wartości zmiennej losowej ξ (wszystko jedno czy wyliczamy oddzielnie wartości N zmiennych losowych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ czy też znajdujemy N wartości wielkości ξ , ponieważ wszystkie te zmienne losowe mają ten sam rozkład gęstości i z założenia są niezależne). Z (21) widzimy, że średnia arytmetyczna tych wielkości będzie w przybliżeniu równa m . Błąd takiego przybliżenia, z dużym prawdopodobieństwem, nie przekracza $3b/\sqrt{N}$. Jasne, że błąd dąży do zera wraz ze wzrostem N .

W praktyce, bardzo często preferuje się nie oszacowanie od góry $3b/\sqrt{N}$, lecz błąd prawdopodobny równy $r_N = 0,6745 b/\sqrt{N}$. Taka jest mianowicie

najczęściej wielkość błędu obliczeń, która równa się

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j - m \right|.$$

§3. Komputerowe generatory liczb losowych

Takie sformułowanie problemu często wywołuje zdziwienie. Wszystko co wykonuje komputer jest wszak wcześniej zaprogramowane, skąd więc tutaj losowość? Pytanie to faktycznie stwarza pewne problemy, lecz dotyczą one raczej filozofii i nie będziemy się nimi zajmować.

Na wszelki wypadek zwrócimy tylko uwagę, że zmienne losowe, o których traktował §2, są idealnymi pojęciami matematycznymi. Na pytanie, czy można z ich pomocą opisać jakiegokolwiek zjawiska przyrody, rozwiązuje się w praktyce. Taki opis jest zawsze przybliżony. Prócz tego, zmienna losowa, która zadowalająco opisuje pewną wielkość fizyczną w kontekście pewnych zjawisk, może okazać się złą charakterystyką tej wielkości w badaniu innych zjawisk.

Podobnie droga, która na mapie kraju jest linią prostą (idealna linia prosta *bez szerokości*) staje się wstęgą ze zgięciami na wielkoskalowym planie miejsca zamieszkania ...

Zazwyczaj rozróżnia się trzy sposoby otrzymywania liczb losowych. Są to: tablice liczb losowych, generatory liczb losowych i metoda liczb pseudolosowych.

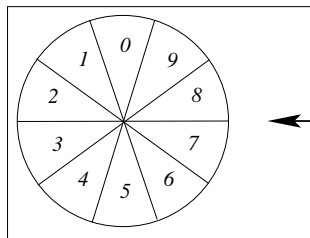
3.1. Tablice liczb losowych Wykonajmy następujące doświadczenie. Na dziesięciu jednakowych karteczkach wypiszmy liczby $0, 1, 2, \dots, 9$. Wrzucimy je do czapki zamieszajmy, i wyciągamy je po jednej, zwracając je za każdym razem do kapelusza i ponownie mieszając. Otrzymane w taki sposób cyfry zapiszemy w postaci tablicy, podobnej do Tablicy A, na str. 96. (dla wygody cyfry połączono w grupy, po pięć).

Taka tablica nazywa się *tablicą liczb losowych* chociaż poprawniej byłoby nazywać ją tablicą cyfr losowych. Można ją wprowadzić do komputera

i podczas obliczeń, jeśli potrzebujemy mieć wartość zmiennej losowej o rozkładzie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

będziemy pobierać kolejną liczbę z tej tablicy. Największa z opublikowanych tablic liczb losowych zawiera 1 000 000 cyfr [2, A million random numbers]. To jasne, że zamiast czapki, stosowano przy jej konstrukcji, bardziej współczesne techniki. Zbudowano specjalną elektroniczną ruletkę. Prosty schemat takiej ruletki pokazuje Rys. 7 (obracający się dysk nagle się zatrzymuje i wybierana jest cyfra, którą wskazuje nieruchoma strzałka).



Rysunek 7

Należy koniecznie zauważyć, że zbudowanie dobrej tablicy liczb losowych nie jest rzeczą tak prostą na jaką wygląda. Dowolne urządzenie rzeczywiste produkuje zmienne losowe o rozkładzie nieco innym niż rozkład idealny (22). Poza tym, podczas eksperymentu mogą pojawić się błędy (przykładowo, jedna z karteczek może na pewien czas przyłgnąć do podłoża). Z tego powodu ułożone tablice sprawdza się bardzo dokładnie z pomocą specjalnych testów statystycznych, a mianowicie, sprawdza się, czy te lub inne własności grupy liczb nie przeczą hipotezie, że liczby te są wartościami zmiennej losowej (22).

Przykład 6.

Przedstawimy przykłady łatwiejszych i jednocześnie ważniejszych testów.¹⁸ Rozpatrzmy tablicę zawierającą N cyfr $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N$. Niech liczba zer w tej tablicy wynosi v_0 , liczba jedynek v_1 , dwójek v_2 itd. Wyliczmy sumę

$$\sum_{i=0}^9 \left(v_i - \frac{1}{10}N \right)^2 .$$

Teoria prawdopodobieństwa pozwala przewidzieć w jakich granicach zawiera się ta suma. Nie powinna ona być zbyt duża, gdyż wartość oczekiwana każdego v_i jest równa $1/10$, i nie powinna też być za mała, bo wskazywałoby to na zbyt regularny rozkład wartości. (Ciekawe, że takie „zanadto jednostajnie rozłożone” wartości pozwalają na szybsze rozwiązywanie pewnych szczególnych problemów. Nie nadają się one jednak jako uniwersalne liczby losowe.)

Założymy następnie, że tablica zawiera parzystą liczbę $N = 2N'$ cyfr i rozpatrzmy pary $(\epsilon_1, \epsilon_2), (\epsilon_3, \epsilon_4), \dots, (\epsilon_{N-1}, \epsilon_N)$ w liczbie N' . Oznaczmy przez v_{ij} liczbę par (i, j) w tym ciągu. Wyliczmy sumę

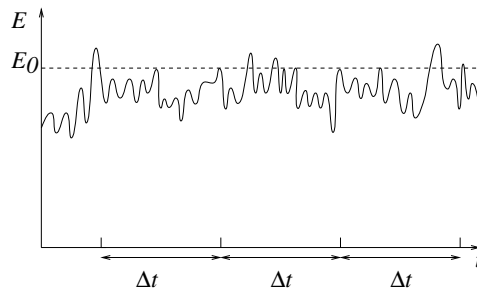
$$\sum_{i,j=0}^9 \left(v_{ij} - \frac{1}{100}N' \right)^2 .$$

Tutaj również teoria prawdopodobieństwa przewiduje w jakich granicach powinien znaleźć się wynik sumowania.

Tablic liczb losowych używa się tylko w przypadku ręcznych obliczeń metodą Monte Carlo. Trudność polega na tym, że komputery posiadają małą wewnętrzną pamięć i nie pomieszczą wielkich tablic liczbowych. Przechowywanie ich w pamięci zewnętrznej i ciągłe zagłądanie tam po liczby losowe spowolniłoby natomiast obliczenia. Nie jest wykluczone, że z czasem pamięci komputerów zwiększą się i wtedy tablice liczb losowych staną się wielce praktyczne.¹⁹

¹⁸Przykłady innych testów: patrz [3]. [przypis tłumacza]

¹⁹Zaden z przytoczonych argumentów, ważnych w okresie pisania książki, nie wytrzymał próby czasu. Komputery, nawet te najmniejsze, posiadają obecnie ogromne pamięci „szybkie” typu RAM, a czas dostępu do pamięci zewnętrznych (dysków twardych lub CD-ROM-



Rysunek 8

3.2. Generatory liczb losowych Wydawałoby się, że wspomnianą w p. 3.1 ruletkę, można dołączyć do komputera i w miarę potrzeb generować liczby losowe. Każde urządzenie zewnętrzne będzie jeszcze za wolne do współpracy z komputerem. Z tego powodu, jako generatory liczb losowych wykorzystywane są szumy w lampach elektronowych (Rys. 8). Jeśli w ciągu ustalonego przedziału czasowego Δt poziom szumu przekroczy zadaną wartość progową parzystą ilość razy, to zapamiętujemy zero, a jeśli jest to liczba nieparzysta – zapamiętujemy jedynkę.²⁰

Na pierwszy rzut oka jest to bardzo wygodny sposób. Niech m takich generatorów pracuje równolegle, ciągle, i niech posyłają one losowe zera i jedynki do wszystkich grup dwójkowych w specjalnej komórce pamięci. Niech każdy takt oznacza m -cyfrową liczbę losową. W dowolnej chwili można pobrać z takiej komórki wartość losowej zmiennej γ o równomiernym rozkładzie w przedziale $(0, 1)$. Wartość ta jest oczywiście przybliżona i jest zapisana w postaci dwójkowego ułamka $0, \alpha_{(1)}\alpha_{(2)} \dots \alpha_{(m)}$, w którym każda wielkość $\alpha_{(i)}$ imituje zmienną losową o rozkładzie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ów) jest bardzo krótki. Dodatkowo, istnieją dobre i szybkie generatory liczb losowych.
[przypis tłumacza]

²⁰Istnieją też, bardziej perfekcyjne konstrukcje.

Ta metoda też nie jest bez wad. Po pierwsze, trudno jest sprawdzić jakość *otrzymywanych liczb*. Sprawdziany wykonywane są periodycznie, gdyż z powodu różnych niesprawności może pojawić się tak zwany dryf rozkładu (tzn. zera i jedynki w dowolnym rzędzie pojawiają się z niejednakową częstością). Po drugie, zazwyczaj wszystkie rachunki na komputerze wykonywane są podwójnie. Robi się to po to by wykluczyć możliwość przypadkowych błędów.²¹ Otrzymanie tych samych liczb losowych jest jednak w tym wypadku niemożliwe, o ile nie zapamięta się ich podczas obliczeń. Jeśli jednak zapamiętujemy je, to wracamy do przypadku tablic.

Tego typu generatory okażą się niewątpliwie potrzebne jeśli będą produkowane wyspecjalizowane komputery rozwiązujące problemy metodami Monte Carlo. W przypadku komputerów uniwersalnych, gdzie rzadko wykorzystuje się liczby losowe, utrzymanie i eksploatacja specjalnych urządzeń tego typu jest w ogóle niemożliwa. Lepiej jest używać tzw. liczb pseudolosowych.

3.3. Liczby pseudolosowe Ponieważ *jakość* liczb losowych sprawdzana jest za pomocą specjalnych testów, to ich pochodzeniem można się nie zajmować, wystarczy, że spełniają określone warunki. Można też pokusić się o to by wyliczać je z jakiejś formuły. Musi ona, oczywiście, być bardzo sprytna.

Liczby otrzymywane z pewnej formuły i imitujące wartości zmiennej losowej γ , nazywane są *liczbami pseudolosowymi*. Słowo *imitujące* oznacza, że spełniają one szereg testów tak, jak gdyby były one wartościami zmiennej losowej.

Pierwszy algorytm generowania liczb pseudolosowych zaproponował J. Neumann. Nosi on nazwę *metody środka kwadratów*. Objasnimy to na przykładzie.

Niech będzie zadana liczba 4 cyfrowa $\gamma_0 = 0,9876$. Podnosimy ją do kwadratu. Wynik jest liczbą 8 cyfrową ($\gamma_0^2 = 0,87535376$). Weźmy następ-

²¹Te błędy pochodzą od wadliwego działania sprzętu co przypadkowo może mieć miejsce w czasie obliczeń. W oryginale użyto zwrotu *сбой системы*, oznaczające złe funkcjonowanie sprzętu. [przypis tłumacza]

nie cztery środkowe cyfry tej liczby i utwórzmy kolejną liczbę czterocyfrową $\gamma_1 = 0,5353$. Podnieśmy ją do kwadratu, ($\gamma_1^2 = 0,28654609$) i następnie weźmy cztery cyfry środkowe. Otrzymamy $\gamma_2 = 0,6546$. Dalej $\gamma_2^2 = 0,42850116$, $\gamma_3 = 0,8501$; $\gamma_3^2 = 0,72267001$, $\gamma_4 = 0,2670$; $\gamma_4^2 = 0,07128900$, $\gamma_5 = 0,1289$ itd.

Algorytm ten jednak nie sprawdził się. Daje on więcej niż potrzeba małych wartości. Z tego względu różni badacze opracowali inne algorytmy. Najbardziej popularnym stał się algorytm zwany metodą porównań (patrz §10).

Zalety metody liczb pseudolosowych są dość oczywiste. Po pierwsze, na otrzymanie każdej liczby trzeba wykonać kilka prostych operacji tak, że szybkość generowania liczb losowych jest porównywalna z szybkością pracy komputera. Po drugie, program mieści się w niewielu komórkach pamięci. Po trzecie, dowolną z liczb γ_k można łatwo odtworzyć. Po czwarte, wystarczy raz jeden sprawdzić *jakość* takiego ciągu, a następnie, bez obawy, używać go przy rozwiązywaniu problemów tego samego typu.

Jedyną wadą jest ograniczona ilość takich liczb, no bo jeśli ciąg liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots$ jest generowany przez komputer z formuły typu

$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k),$$

to otrzymany ciąg jest na pewno periodyczny.²² Zresztą, dla najbardziej popularnych liczb losowych okres jest tak duży, że przewyższa wszelkie praktyczne wymagania.

Przytłaczająca ilość rachunków metodą Monte Carlo wykonywana jest przy użyciu liczb pseudolosowych (patrz p. 10.3).

3.4. Uwaga Należy ostrzec liczących. Spotyka się artykuły, książki, programy standardowe, w których zamieszczone są złe algorytmy do generowania liczb pseudolosowych. Liczby, które otrzymywane są za ich pomocą

²²W kodzie komputera można zapisać tylko skończoną liczbę różnych liczb. Stąd, wcześniej czy później, jedna z nich, np. γ_L , pokryje się z wcześniejszą, np. γ_l . Wtedy, ze wzoru wynika, że $\gamma_{L+1} = \gamma_{l+1}$, $\gamma_{L+2} = \gamma_{l+2}$, ..., tzn., że ciąg jest okresowy o okresie $P = L - l$. Zapas liczb pseudolosowych charakteryzuje się często wielkością L , która nazywa się *długością przedziału aperiodyczności*.

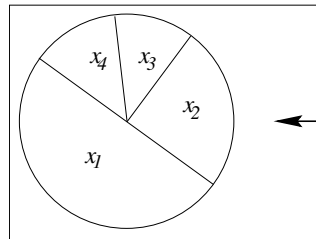
spełniają jedynie najprostsze z testów (patrz p. 3.1). Używanie ich w przypadku dość skomplikowanych problemów prowadzi do błędnych wyników.

§4. Przekształcenia zmiennych losowych

W rozwiązywaniu wszelkiego typu problemów zdarza się modelować różne zmienne losowe. W początkowym okresie używania Monte Carlo, niektórzy liczący próbowali zbudować odpowiednią ruletkę dla każdej potrzebnej zmiennej losowej. Na przykład, aby znaleźć wartości zmiennej losowej o rozkładzie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,125 \end{pmatrix}, \quad (22')$$

można używać ruletki pokazanej na Rys. 9. Działa ona tak samo jak ruletka



Rysunek 9

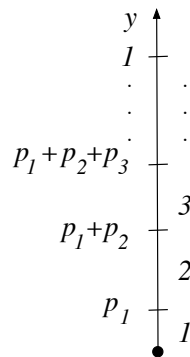
pokazana na Rys. 7, lecz jej podziały są nierówne i proporcjonalne do p_i .

Okazało się to jednak całkiem zbyteczne. Wartości dowolnej zmiennej losowej można otrzymać na drodze przekształcenia wartości jednej, dowolnej (powiedzmy standardowej) zmiennej losowej. Zazwyczaj jest to zmienna losowa γ o równomiernym rozkładzie na odcinku $(0, 1)$. Jak otrzymać wartości γ już wiemy.

Umówimy się, że proces znajdowania wartości jakiejś zmiennej losowej ξ drogą przekształcania jednej lub wielu wartości γ będziemy nazywać *losowaniem* (konstruowaniem) zmiennej przypadkowej γ .

4.1. Modelowanie dyskretnej zmiennej losowej. Powiedzmy, że musimy otrzymać wartości zmiennej losowej ξ o rozkładzie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$



Rysunek 10

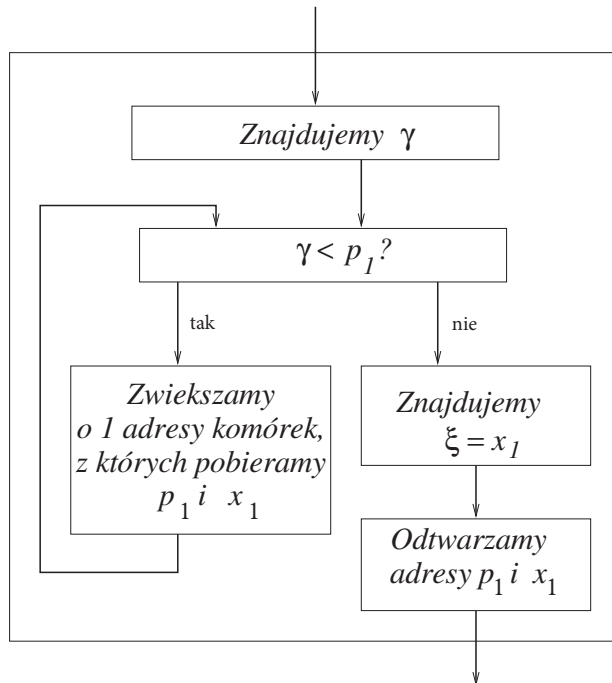
Weźmy przedział $0 < y < 1$ i podzielmy go na n przedziałów o długościach p_1, p_2, \dots, p_n . Współrzędne punktów podziałów są równe $y = p_1, y = p_1 + p_2, y = p_1 + p_2 + p_3, \dots, y = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1}$. Ponumerujemy przedziały liczbami $1, 2, \dots, n$ (Rys. 10). Przygotowania do losowania ξ są zakończone. Za każdym razem, gdy będziemy musieli „przeprowadzić eksperyment” i skonstruować wartość ξ , wylosujemy γ i zbudujemy punkt $y = \gamma$. Jeśli wpadnie on w przedział o numerze i , to przyjmujemy, że $\xi = x_i$ (w tym eksperymencie).

Łatwo pokazać słuszność takiego postępowania. Ponieważ zmienna losowa γ ma jednorodny rozkład w przedziale $(0, 1)$, to prawdopodobieństwo, że γ wypadnie w którymś przedziale jest równe jego długości $\mathbf{P}\{0 < \gamma < p_1\} = p_1, \mathbf{P}\{p_1 < \gamma < p_1 + p_2\} = p_2, \dots$. Zgodnie z naszą procedurą $\xi = x_i$ jeśli

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \dots + p_i,$$

i długość przedziału jest równa p_i .

Jeśli używa się komputera, można zrezygnować z Rys. 10. Wystarczy, że rozmieścimy liczby x_1, x_2, \dots, x_n w kolejnych komórkach pamięci, a prawdopodobieństwa $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3 \dots$ tak samo. Schemat programu pokazany jest na Rys. 11.



Rysunek 11

Zauważymy, że kolejność numerowania wartości x_1, x_2, \dots, x_n w rozkładzie ξ może być dowolna, należy ją jednak ustalić przed losowaniem.

Jeżeli wszystkie wartości ξ są równoprawdopodobne

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix},$$

to algorytm konstruowania można uprościć. Rzecz polega na tym, że w naszej procedurze $\xi = x_i$ wtedy, gdy $(i - 1)/n < \gamma < i/n$ lub, co na jedno wychodzi, $(i - 1) < n\gamma < i$. Ostatnia nierówność jest równoważna z faktem, że część całkowita $n\gamma$ jest równa $i - 1$.

Oznaczmy przez $[z]$ część całkowitą z liczby z . Otrzymamy następującą formułę losowania wartości jednakowo prawdopodobnych

$$\xi = x_i, \quad i = 1 + [n\gamma].$$

Przykład 7.

Utworzyć 10 wartości zmiennej losowej κ , z p. 2.1, dla której $x_i = i$ ($1 \leq i \leq 6$). Jako wartości γ weźmiemy trójki cyfr z tablicy a pomnożone przez 0,001. A więc $\gamma = 0,865; 0,159; 0,079; 0,566; 0,155; 0,664; 0,345; 0,655; 0,812; 0,332$. Odpowiadające wartości $x_i = 1 + [6\gamma]$ są: 6; 1; 1; 4; 1; 4; 3; 4; 5; 2. Opisany eksperyment odpowiada dziesięciu rzutom kostki do gry.

4.2. Konstruowanie ciągłej wartości losowej Przypuśćmy teraz, że chcemy otrzymać wartości zmiennej losowej ξ zadanej na przedziale (a, b) z rozkładem $p(x)$. Pokażemy, że wartości ξ można znajdować z równania

$$\int_a^\xi p(x) dx = \gamma, \quad (23)$$

tzn. biorąc kolejną wartość γ i rozwiązując równanie (23) względem ξ .

Aby to udowodnić rozpatrzmy funkcję

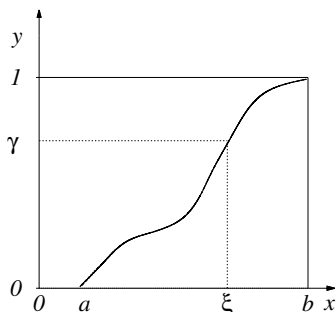
$$y = \int_a^x p(x) dx.$$

Z ogólnych własności gęstości (15), (16) wynika, że

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 1,$$

$$y'(x) = p(x) > 0.$$

Funkcja $y(x)$ jest więc monotoniczna i rośnie od 0 do 1 (Rys. 12). Dowlona prosta $y = \gamma$, gdzie $0 < \gamma < 1$, przecina wykres $y = y(x)$ tylko w jednym punkcie, którego to rzędną przyjmujemy za ξ . W ten sposób równanie (23) posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.



Rysunek 12

Weźmy następnie dowolny przedział (a', b') zawarty wewnątrz (a, b) . Punktom

$$a' < x < b'$$

odpowiadają odcięte krzywej $y = y(x)$, odpowiadające nierówności

$$y(a') < y < y(b').$$

Jeśli więc ξ należy do przedziału $a' < x < b'$, to γ należy do przedziału $y(a') < y < y(b')$ i odwrotnie (Rys. 13). Oznacza to, że

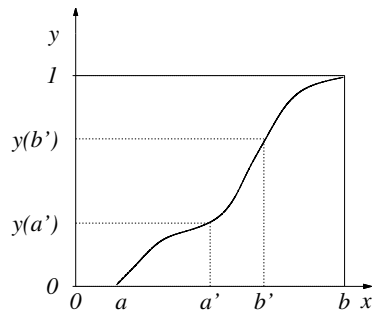
$$\mathbf{P}\{a' < \xi < b'\} = \mathbf{P}\{y(a') < \gamma < y(b')\}.$$

Ponieważ γ , w przedziale $(0, 1)$, ma rozkład równomierny, to

$$\mathbf{P}\{y(a') < \gamma < y(b')\} = y(b') - y(a') = \int_{a'}^{b'} p(x) dx.$$

Mamy więc

$$\mathbf{P}\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x) dx,$$



Rysunek 13

a to właśnie oznacza, że zmienna losowa ξ , będąca pierwiastkiem równania (23), posiada gęstość prawdopodobieństwa $p(x)$.

Przykład 8.

Zmienna losowa η posiada *rozkład jednorodny w przedziale* (a, b) jeśli jej gęstość jest w tym przedziale stała:

$$p(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b.$$

W celu wyznaczenia wartości (modelowania) η zapiszmy równanie (23) w postaci

$$\int_a^\eta \frac{dx}{b-a} = \gamma.$$

Całka jest prosta:

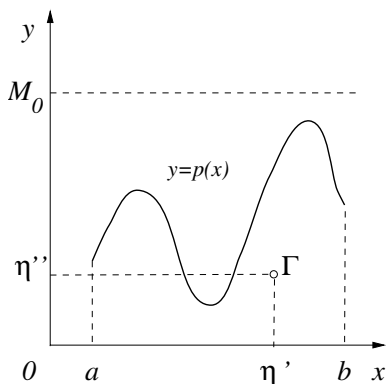
$$\frac{\eta - a}{b - a} = \gamma.$$

Stąd

$$\eta = a + \gamma(b - a).$$

Inne przykłady zastosowań formuły (23) przytoczone zostały w pp. 5.2, 9.3.

4.3. Metoda Neumanna konstruowania ciągłych zmiennych losowych
Może się zdarzyć, że trudno jest rozwiązać (23) względem ξ ; np., gdy całka z $p(x)$ nie da się przedstawić poprzez funkcje elementarne lub, gdy gęstość $p(x)$ jest dana w postaci wykresu.



Rysunek 14

Przypuśćmy, że zmienna losowa ξ jest określona na skończonym przedziale (a, b) i posiada ograniczoną gęstość (Rys. 14):

$$p(x) \leq M_0.$$

Wartości ξ można konstruować następująco.

1. Wybierzmy dwie wartości γ' i γ'' zmiennej losowej γ i zbudujmy punkt losowy $\Gamma(\eta', \eta'')$ o współrzędnych

$$\eta' = a + \gamma'(b - a), \quad \eta'' = \gamma'' M_0; \quad (24)$$

2. Jeśli Γ leży pod krzywą $y = p(x)$, to kładziemy $\xi = \eta'$, a jeżeli punkt Γ leży nad krzywą $y = p(x)$, to parę (γ', γ'') odrzucamy i wybieramy nową parę (γ', γ'') .

Faktycznie, ponieważ η' posiada rozkład jednorodny w (a, b) , prawdopodobieństwo, że punkt Γ wypadnie w pasie $(x, x + dx)$ jest proporcjonalne do dx . Ponieważ η'' jest jednorodna w przedziale $(0, M_0)$ to prawdopodobieństwo, że punkt ten nie będzie odrzucony jest równe $p(x)/M_0$, a więc jest proporcjonalne do $p(x)$. Stąd, prawdopodobieństwo, że wybrana wartość $\xi = \eta'$ leży w przedziale $(x, x + dx)$ jest proporcjonalne do $p(x) dx$.

4.4. O modelowaniu zmiennych normalnych Istnieje wiele rozmaitych sposobów losowania różnych wielkości przypadkowych (patrz §11). Korzystamy z nich głównie wtedy, gdy metody pp. 4.2, 4.3 są mało wydajne.

W szczególności, ma to miejsce w przypadku normalnej zmiennej losowej ζ , gdyż nawet wtedy, gdy $a = 0, \sigma = 1$, równanie

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\zeta} e^{-t^2/2} dt = \gamma,$$

nie ma rozwiązania w jawnej postaci i dodatkowo przedział możliwych wartości ζ jest nieskończony.

Przy obliczeniach ręcznych, można korzystać z Tablicy B (patrz str. 96), w której podane są już wylosowane wartości zmiennej przypadkowej ζ , ze średnią $\mathbf{M} \zeta = 0$ i dyspersją $\mathbf{D} \zeta = 1$. Specjalna formuła wyznaczania tej wielkości podana jest w p. 11.2.

Łatwo pokazać, że zmienna losowa

$$\zeta' = a + \sigma \zeta \quad (25)$$

jest również normalna, a z (10) i (11) wynika, że

$$\mathbf{M} \zeta' = a, \quad \mathbf{D} \zeta' = \sigma^2.$$

Formuła (25) pozwala modelować wartości zmiennej losowej ζ' o dowolnych a i σ z wykorzystaniem wartości normalnej zmiennej losowej ζ ($\mathbf{M} \zeta = 0$).

4.5. Jeszcze o przykładzie z p. 1.2 Można teraz wyjaśnić jak wybierane były punkty na Rysunkach 1 i 2. Na Rys. 1 zadane są punkty o współrzędnych

$$x = \gamma', \quad y = \gamma''.$$

Wartości γ' i γ'' wyliczane były z piątek cyfr z Tablicy 4A: $x_1 = 0,86515$, $y_1 = 0,90795$, $x_2 = 0,66155$, $y_2 = 0,66434$, itd.

Ponieważ rzędne i odcięte tych punktów są niezależne i mają równomierny rozkład w przedziałach $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, można pokazać, że prawdopodobieństwo, iż punkt znajdzie się w dowolnym obszarze położonym wewnątrz kwadratu $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ jest równe polu powierzchni obszaru. Można rzec, że punkty są równomiernie rozrzucone w kwadracie.

Na Rys. 2 naniesiono punkty o współrzędnych

$$x = 0,5 + 0,2\xi', \quad y = 0,5 + 0,2\xi'',$$

gdzie wartości ξ' , ξ'' wzięto z Tablicy 4B: $x_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,2005$, $y_1 = 0,5 + 0,2 \cdot 1,1922$, $x_2 = 0,5 + 0,2 \cdot (-0,0077)$, $y_2 = 0,5 + 0,2 \cdot 0,0348$, ... Jeden z punktów, który wypadł poza kwadratem został odrzucony.

Z (25) wynika, że rzędne i odcięte tych punktów są normalnymi zmiennymi losowymi, o średniej $\alpha = 0,5$ i dyspersji $\sigma^2 = 0,04$.

Oszacujemy teraz błąd obliczeń z p. 1.2. Wielkość N' możemy, w przybliżeniu, uważać za normalną, bo

$$N' = \sum_{j=1}^N \xi_j,$$

gdzie $\xi_j = 1$, jeśli punkt j -ty wpadł do S , i $\xi_j = 0$ w przeciwnym wypadku. Oznaczając pole obszaru S tą samą literą S możemy zapisać ogólny dla wszystkich ξ_j rozkład

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 - S \end{pmatrix}.$$

Wynika stąd, że $\mathbf{M}\xi = S$, $\mathbf{M}\xi^2 = S$, $\mathbf{D}\xi = S - S^2$. Dyspersja wielkości N'/N jest równa

$$\mathbf{D}(N'/N) = \mathbf{D}\xi/N = S(1 - S)/N,$$

a prawdopodobny błąd jest w przybliżeniu równy $0,674\sqrt{S(1-S)/N}$. Dla $S = 0,35$, $N = 40$ jego wartość równa się $0,051$, co w praktyce, pokrywa się z wartością otrzymaną w p. 1.2.

Przykłady zastosowań metody Monte Carlo

2

§5. Systemy obsługi masowej

5.1. Opis zadania Zajmijmy się jednym z najprostszych systemów obsługi masowej. System tego typu składa się z n linii (kanałów lub punktów obsługi), z których każda może *obsługiwać klientów*. Układ odbiera w losowych chwilach czasu zgłoszenia. Każde zgłoszenie trafia na linię Nr 1. Jeśli w chwili k -tego zgłoszenia (oznaczymy ją przez T_k) linia jest wolna to zgłoszenie jest załatwiane w ciągu czasu t_z minut (t_z - *czas zajętości linii*). Jeśli natomiast w momencie T_k linia jest zajęta, wówczas zgłoszenie przekazywane jest na linię Nr 2, itd. Jeśli w końcu wszystkie linie w chwili T_k są zajęte, układ odmawia obsługi dalszych zgłoszeń. Należy obliczyć ile (na średnio) zgłoszeń obsługuje system w czasie T i ile razy udziela odmowy.

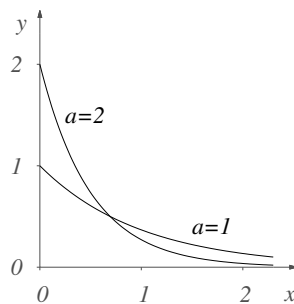
Tego typu problemy pojawiają się w badaniach organizacji pracy w różnych przedsiębiorstwach, a nie tylko przedsiębiorstwach usług publicznych.

W pewnych bardzo szczególnych przypadkach istnieją rozwiązania analityczne. W sytuacjach bardziej złożonych (zajmiemy się nimi niżej) metoda Monte Carlo staje się jedyną metodą obliczeń.

5.2. Najprostszy strumień zgłoszeń Pierwsze pytanie, które powstaje przy rozpatrywaniu takich układów, dotyczy tego, czym jest strumień zgłoszeń? Odpowiedzi na nie udziela się w praktyce, na drodze odpowiednio długich obserwacji zgłoszeń. Badania strumieni zgłoszeń w różnych sytuacjach pozwoliły wyodrębnić niektóre w miarę częste przypadki.

Definicja 7 (Strumień Poissona): Najprostszym strumieniem lub strumieniem Poissona²³ nazywa się taki ciąg zgłoszeń, w którym odstęp czasu τ między dwoma kolejnymi zgłoszeniami jest zmienną losową o wartościach z przedziału $(0, \infty)$ i gęstości

$$p(x) = ae^{-ax}. \quad (26)$$



Rysunek 15

To prawo rozkładu nosi także nazwę *rozkładu wykładniczego* (Rys. 15 przedstawia gęstość (26) dla $a = 1, 2$).

²³Siméon Denis Poisson (ur. 21 czerwca 1781 w Pithiviers, zm. 25 kwietnia 1840 w Sceaux) – francuski mechanik teoretyk, fizyk i matematyk. Zajmował się elektrycznością, magnetyzmem, grawitacją, balistyką, astronomią i mechaniką. W matematyce zajmował się całkami oznaczonymi, równaniami różnicowymi i różniczkowymi oraz teorią prawdopodobieństwa. [przypis tłumacza]

Wartość oczekiwaną wylicza się w prosty sposób

$$\mathbf{M} \tau = \int_0^{\infty} xp(x) dx = \int_0^{\infty} xae^{-ax} dx.$$

Po przeliczowaniu przez części ($u = x$, $dv = ae^{-ax} dx$) otrzymamy

$$\mathbf{M} \tau = -xe^{-ax} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

Parametr a nosi nazwę gęstości strumienia zgłoszeń.

Formułę modelowania τ otrzymamy z równania (23), które w tym przypadku przyjmuje postać

$$\int_0^{\tau} ae^{-ax} dx = \gamma.$$

Po scałkowaniu dostajemy

$$1 - e^{-a\tau} = \gamma,$$

skąd

$$\tau = -\frac{1}{a} \log(1 - \gamma).$$

Ponieważ zmienne $1 - \gamma$ i γ mają taką samą gęstość rozkładu prawdopodobieństwa, to

$$\tau = -\frac{1}{a} \log \gamma. \quad (27)$$

5.3. Schemat obliczeń Zastanowimy się nad pracą systemu z p. 5.1 w przypadku najprostszego strumienia zgłoszeń. Każdej linii przyporządkujemy komórkę pamięci wewnętrznej komputera i zapamiętamy w niej chwilę czasu, w której linia jest wolna. Oznaczmy ten moment czasu, w przypadku i -tej linii, przez t_i . Czas będziemy odliczać od momentu pojawienia się

pierwszego zgłoszenia $T_1 = 0$. Można przyjąć, że w tym momencie wszystkie t_i są równe T_1 – wszystkie linie są wolne. Czas zakończenia obliczeń jest $T_{\text{koniec}} = T_1 + T$.

Na linii Nr 1 pojawia się pierwsze zgłoszenie. Oznacza to, że linia będzie zajęta przez czas t_z . Powinniśmy więc zamienić t_1 na nową wartość $(t_1)_{\text{nowe}} = T_1 + t_z$, zwiększyć licznik zgłoszeń o jeden i przejść do rozpatrzenia następnego zgłoszenia.

Założmy, że zostało załatwionych k zgłoszeń. Należy wybrać chwilę pojawienia się $k + 1$ -ego zgłoszenia. Losujemy w tym celu kolejne γ i z formuły (27) wyznaczamy następną wartość $\tau = \tau_k$. Wyliczamy z kolei chwilę pojawienia się zgłoszenia

$$T_{k+1} = T_k + \tau_k.$$

Czy w tym momencie linia jest wolna? Aby to stwierdzić sprawdzamy warunek

$$t_1 \leq T_{k+1}. \quad (28)$$

Jeśli warunek jest spełniony, to oznacza to, że w chwili T_{k+1} linia jest już wolna i może realizować zgłoszenie. Powinniśmy zamienić t_1 na $T_{k+1} + t_z$, dodać jedynekę do licznika zgłoszeń i przejść do następnego zgłoszenia. Jeżeli warunek (28) nie jest spełniony to pierwsza linia jest w chwili T_{k+1} zajęta. Sprawdzamy, czy wolna jest linia druga

$$t_2 \leq T_{k+1}. \quad (29)$$

Jeśli warunek (29) jest spełniony, zamieniamy t_2 na $T_{k+1} + t_z$, zwiększamy o jeden licznik zrealizowanych zgłoszeń i przechodzimy do następnego zgłoszenia. Jeśli warunek (29) nie jest spełniony, to sprawdzamy czy

$$t_3 \leq T_{k+1}.$$

Może się okazać, że dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$

$$t_i > T_{k+1},$$

tzn., wszystkie linie są zajęte. Należy wtedy dodać jedynkę do licznika liczby zgłoszeń i do licznika odmów i przejść do następnego zgłoszenia.

Za każdym razem, gdy wyliczymy wielkość T_{k+1} należy dodatkowo sprawdzić, czy spełniony jest warunek zakończenia doświadczenia

$$T_{k+1} > T_{\text{koniec}}.$$

Jeśli tak, należy przerwać obliczenia. Licznik zrealizowanych zgłoszeń i licznik odmów będą zawierać wartości μ_{zre} i μ_{odm} .

Doświadczenie powtarzane jest N razy (z użyciem różnych γ). Wyniki doświadczeń uśrednia się

$$\mathbf{M}\mu_{\text{zre}} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{\text{zre}(j)},$$

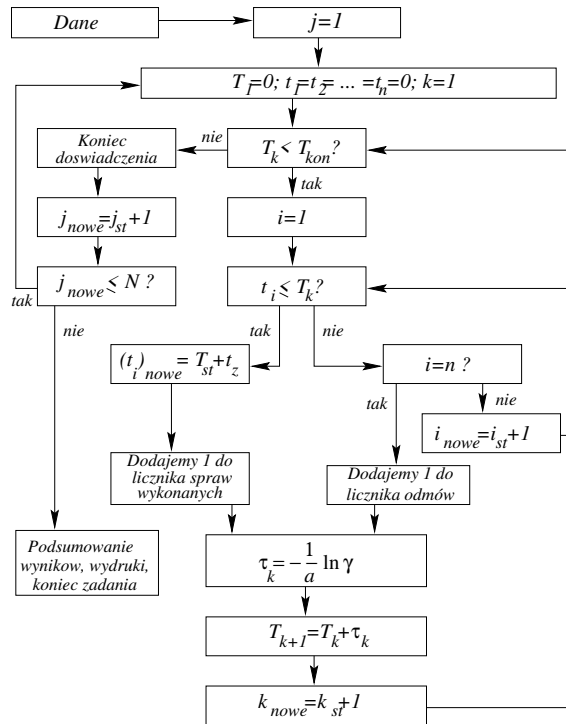
$$\mathbf{M}\mu_{\text{odm}} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mu_{\text{odm}(j)},$$

gdzie $\mu_{\text{zre}(j)}$, $\mu_{\text{odm}(j)}$ - są wartościami μ_{zre} oraz μ_{odm} w j -ym doświadczeniu.

Rys. 16 przedstawia schemat blokowy programu realizującego takie właśnie obliczenia (jeśli zachodzi potrzeba, można otrzymać wartości $\mu_{\text{zre}(j)}$, $\mu_{\text{odm}(j)}$ dla różnych doświadczeń w bloku *koniec doświadczenia*).

5.4. Problemy bardziej złożone Można udowodnić, że zaprezentowana metoda pozwala rozwiązywać problemy o wiele bardziej złożone. Na przykład wielkość t_z nie musi być wielkością stałą, a może być zmienną losową i w dodatku inną dla różnych linii obsługi (co odpowiada różnicom w wyposażeniu i różnym kwalifikacjom personelu). Schemat obliczeń pozostaje w zasadzie identyczny, z tym wyjątkiem, że wielkość t_z musi być wyznaczana według własnej odpowiedniej formuły, innej dla każdej linii obsługi.

Można rozpatrywać tzw. *systemy z oczekiwaniem*, w przypadku których nie od razu odmawia się realizacji zgłoszeń; zgłoszenie przechowuje się przez jakiś czas t_p (*czas oczekiwania zgłoszenia w systemie*) i jeśli w ciągu tego



Rysunek 16

czasu jakakolwiek linia zwolni się, zgłoszenie będzie przez nią zrealizowane.

Można rozpatrywać systemy, w których zgłoszenie przyjmuje ta linia, która najszybciej jest zwalniana. Można brać pod uwagę przypadkowe niedyspozycje każdej linii oddzielnie oraz przypadkowe czasy naprawy każdej z nich. Można uwzględniać zmienność strumienia zgłoszeń i wprowadzać wiele innych modyfikacji.

Rozumie się, że obliczenia tego typu nie są za darmo. Aby otrzymać wyniki, które mają praktyczny sens należy wybrać dobry model. W tym celu trzeba dokładnie poznać strumienie zgłoszeń, przeprowadzić pomiary

chronometryczne poszczególnych węzłów itd.

W ogólności, należy znać prawa statystyczne dotyczące działania poszczególnych części układu. Metoda Monte Carlo pozwala wyznaczyć prawa statystyczne pracy całego układu, niezależnie od stopnia jego złożoności.

Tego typu metody obliczeń są niezwykle pożyteczne przy planowaniu przedsięwzięć: zamiast cennych (a czasami wręcz niemożliwych do przeprowadzenia) rzeczywistych doświadczeń można modelować różne warianty organizacji pracy lub wykorzystania sprzętu.

§6. Sprawdzanie jakości i niezawodności produktów

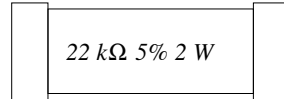
6.1. Najprostszy schemat sprawdzania jakości Zastanówmy się nad produktem S zbudowanym z pewnej liczby (może być duża) elementów. Na przykład, jeśli S jest przyrządem elektrycznym, to jego częściami mogą być oporniki ($R_{(k)}$), kondensatory ($C_{(k)}$), lampy itp. Założymy, że jakość produktu określa się podając pewien parametr U , który może być obliczony na podstawie parametrów wszystkich jego części

$$U = f(R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots). \quad (30)$$

Jeśli, dla przykładu, U jest napięciem na czynnej części obwodu elektrycznego, to korzystając z praw Ohma można zbudować układ równań odpowiadający temu obwodowi i można go rozwiązać, znajdując U .

W rzeczywistości, parametry poszczególnych części nie są równe podanym wartościom. Na przykład, opór zilustrowany na Rys. 17 może przyjmować wartości od 20,9 do 2,1 k Ω . Powstaje pytanie: jak zmienia się U w zależności od odchylenia parametrów od ich wartości nominalnych dla wszystkich części.

Można spróbować oszacować przedział zmian U , biorąc *najgorsze* wartości parametrów poszczególnych części składowych. Nie wiadomo jednak z góry, który zestaw parametrów będzie *najgorszy*. Jeśli przy tym liczba



Rysunek 17

elementów jest duża, to oszacowanie okaże się bardzo zawyżonym: prawdopodobieństwo, że wszystkie parametry będą najgorsze jest w rzeczywistości niewielkie.

Z tego względu, rozsądniej jest potraktować parametry wszystkich części jak i samą wielkość U , jak zmienne losowe i spróbować oszacować średnią wartość $\mathbf{M}U$ oraz dyspersję $\mathbf{D}U$.

Zmienna $\mathbf{M}U$ jest średnią wartością U dla całej serii wyrobu, a $\mathbf{D}U$ pokazuje, jakie odstępstwa od $\mathbf{M}U$ mogą pojawić się w praktyce.

Przypomnijmy (patrz 2.2), że

$$\mathbf{M}U \neq f(\mathbf{M}R_{(1)}, \mathbf{M}R_{(2)}, \dots; \mathbf{M}C_{(1)}, \mathbf{M}C_{(2)}, \dots; \dots).$$

Nie da się znaleźć analitycznego wyrażenia dla U jeśli funkcja f jest skomplikowana. Często daje się to wykonać w praktyce, przez sprawdzanie dużej partii gotowych produktów. Nie zawsze jest to jednak możliwe, a na pewno nie w stadium projektowania.

Spróbujmy zastosować metodę Monte Carlo. Potrzebujemy w tym celu a) znajomości statystycznych charakterystyk wszystkich elementów b) znajomości funkcji U (dokładnie mówiąc musimy umieć wyznaczyć wartość U dla dowolnie wybranych wartości $R_{(1)}, R_{(2)}, \dots; C_{(1)}, C_{(2)}, \dots; \dots$).

Rozkłady prawdopodobieństwa parametrów poszczególnych części można otrzymać eksperymentalnie, sprawdzając dużą partię takich części. Często takie rozkłady są normalne. Dlatego, niektórzy kontrolerzy postępują według następującej reguły: przyjmują, że opór z Rys. 17, jest normalną zmienną losową, której średnia $\mathbf{M}\rho = 22$, i dla której $3\sigma = 1,1$ (przypominamy, że odstępstwo od średniej $\mathbf{M}\rho$ większe niż 3σ nie zdarza się praktycznie w przypadku jednego eksperymentu (20)).

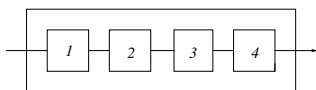
Schemat obliczeń jest bardzo prosty. Losuje się wartość parametru w przypadku każdej części, a następnie z formuły (30) oblicza się wartość U . Powtarzając doświadczenie N razy otrzymamy U_1, U_2, \dots, U_N . Można sądzić, że w przybliżeniu

$$\mathbf{M}U \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_j,$$

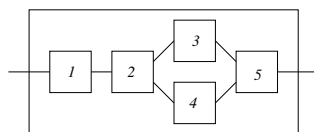
$$\mathbf{D}U \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{j=1}^N U_j^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N U_j \right)^2 \right].$$

Dla dużych N czynnik $1/(N-1)$ można zamienić na $1/N$ i wzór ten jest prostym wnioskiem ze wzorów (8), (9). W statystyce matematycznej dowodzi się, że przy małych N lepiej jest zachować czynnik $1/(N-1)$.

6.2 Przykłady obliczania niezawodności



Rysunek 18



Rysunek 19

Przykład 9.

Załóżmy, że chcemy oszacować średni czas bezawaryjnej pracy urządzenia, zakładając, że znamy charakterystyki bezawaryjnej pracy każdej jego części.

Jeśli przyjąć, że czas niezawodnej pracy $t_{(k)}$ każdego z elementów jest wielkością stałą, to wyznaczenie czasu niezawodności całości jest proste. Na przykład, w przypadku produktu przedstawionego schematycznie na Rys. 18, w którym rozstrojenie się jednego z elementów jest równoważne z rozstrojeniem się całego urządzenia, mamy

$$t = \min(t_{(1)}, t_{(2)}, t_{(3)}, t_{(4)}) . \quad (31)$$

W przypadku produktu pokazanego schematycznie na Rys. 19, w którym jeden z elementów jest zdublowany

$$t = \min(t_{(1)}, t_{(2)}, \max(t_{(3)}, t_{(4)}), t_{(5)}) , \quad (32)$$

bo jeśli np. element 3 zużyje się, produkt będzie pracował na pojedynczej części 4.

W rzeczywistości, czas bezawaryjnej pracy każdej części jest zmienną losową $\Theta_{(k)}$. Jeśli mówimy, że czas pracy żarówki elektrycznej wynosi 1000 godzin, to jest to wartość średnia $\mathbf{M}\Theta$ zmiennej losowej Θ : wszyscy wiedzą, że jedna żarówka przepala się wcześniej, inna (dokładnie identyczna) później.

Jeśli znane są gęstości rozkładów $\Theta_{(k)}$ w przypadku każdego elementu urządzenia, to można obliczyć $\mathbf{M}\Theta$ stosując metodę Monte Carlo, tak jak zrobiono to w p. 6.1. Można mianowicie wylosować wartości zmiennej $\Theta_{(k)}$ dla każdej części – niech to będą liczby $t_{(k)}$. Zauważmy, że na podstawie wzorów (31) lub (32) można obliczyć wartość t zmiennej losowej Θ . Powtarzając doświadczenie N razy możemy przyjąć, że

$$\mathbf{M}\Theta \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j ,$$

gdzie t_j jest wartością t , otrzymaną w N -tym doświadczeniu.

Warto zauważyć, że problem znalezienia rozkładu czasu bezawaryjnej pracy $\Theta_{(k)}$ poszczególnych części nie jest już taki łatwy. W przypadku elementów długowiecznych organizacja eksperymentu staje się utrudniona, należy bowiem czekać aż zużyje się dostateczna liczba elementów.

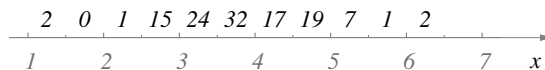
6.3. Dalsze możliwości metody Przedstawione przykłady pokazują, że metodyka przewidywania jakości projektowanych urządzeń jest ideowo prosta. Potrzebna jest do tego znajomość statystycznych charakterystyk wszystkich części urządzenia oraz umiejętność obliczania interesującej nas

wielkości jako funkcji parametrów charakteryzujących poszczególne części. Statystyczny charakter parametrów uwzględnia się na drodze modelowania.

W procesie modelowania można otrzymać o wiele więcej potrzebnych informacji niż tylko wartość oczekiwaną i dyspersję interesującej nas wielkości.

Załóżmy na przykład, że otrzymaliśmy dużą liczbę N wartości U_1, U_2, \dots, U_N zmiennej losowej U . Na ich podstawie można otrzymać przybliżoną gęstość rozkładu U . Ten problem dotyczy głównie statystyki, ponieważ chodzi tu o opracowanie wyników doświadczeń (z tym tylko, że przeprowadzono je na komputerze). Ograniczymy się z tego względu do przykładu.

Załóżmy, że otrzymaliśmy $N = 120$ wartości U_1, U_2, \dots, U_{120} zmiennej losowej U i wszystkie są zawarte w przedziale $1 < U_j < 6,5$. Podzielmy przedział na 11 (dowolnie, oby tylko liczba ta nie była za duża lub za mała) równych przedziałów o długości $\Delta x = 0,5$ i policzmy ile wartości U_j trafia do poszczególnych przedziałów. Liczby te przedstawione zostały na Rys. 20. Częstość trafienia w dowolny przedział otrzymuje się dzieląc liczbę trafień przez $N = 120$. W naszym przypadku częstości są równe: 0,017; 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008; 0,017.

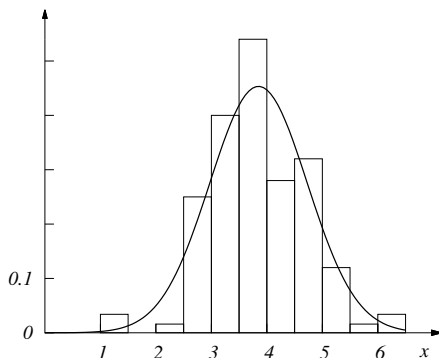


Rysunek 20

Nad każdym przedziałem zbudujemy prostokąt, którego pole jest równe liczbie trafień U_j w dany przedział (Rys. 21). Inaczej mówiąc, wysokość prostokąta jest równa liczbie trafień podzielonej przez Δx . Otrzymaną linię schodkową nazywa się *histogramem*.

Histogram jest przybliżeniem nieznaney gęstości zmiennej losowej U . Dlatego, np. pole histogramu zawarte między $x = 2,5$ i $x = 5,5$ jest przybliżoną wartością prawdopodobieństwa

$$\mathbf{P}\{2,5 < U < 5,5\} \approx 0,95.$$



Rysunek 21

W konsekwencji, na podstawie przeprowadzonych obliczeń, możemy sądzić, że wielkość U , z prawdopodobieństwem bliskim 0,95 mieści się w przedziale $2,5 < U < 5,5$.

Na Rys. 21 pokazana została gęstość zmiennej losowej normalnej ζ' o parametrach $a = 3,85$, $\sigma = 0,88$. Jeśli na jej podstawie obliczymy prawdopodobieństwo tego, że ζ' jest w przedziale $2,5 < \zeta' < 5,5$, to otrzymamy całkiem podobną wartość 0,91. Faktycznie, zgodnie z wzorami p. 2.3

$$\mathbf{P}\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = 0,5[\Phi(t_2) - \Phi(t_1)],$$

gdzie $t_1 = (2,5 - a)/\sigma = -1,54$; $t_2 = (5,5 - a)/\sigma = 1,88$. Stąd

$$\mathbf{P}\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = 0,5[\Phi(1,88) - \Phi(1,54)] = 0,91.$$

6.4. Uwaga Tego typu obliczenia są dotychczas wykonywane bardzo rzadko. Trudno powiedzieć gdzie tkwi przyczyna. Najpewniej w tym, że projektanci i konstruktorzy nie znają takiej możliwości.

Dodatkowo, zanim zaczniesz określać taką metodą jakość różnych wyrobów, należy poznać statystyczne własności wszystkich ich części. Jest to niemały wysiłek. Chociaż prawdą jest, że znajomość tychże charakterystyk

pozwała oszacować jakość dowolnych wyrobów złożonych z tych części. Można oceniać zmiany jakości przy zamianie jednych części przez inne.

Należy mieć nadzieję, że tego typu obliczenia staną się w najbliższych latach zwykłą sprawą, a statystyczne charakterystyki części będą zawsze podawane przez ich producentów.

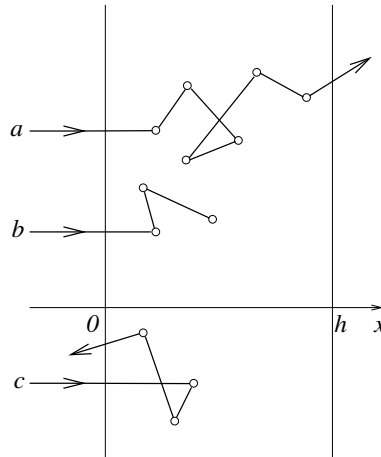
§7. Przechodzenie neutronów przez płytkę

Znane są prawa statystyczne oddziaływania pojedynczych cząstek elementarnych (neutronu, fotonu, mezonu, i innych) z materią. Zazwyczaj istnieje potrzeba znalezienia makroskopowych charakterystyk procesów, w których bierze udział ogromna liczba takich cząstek: gęstości, prądów, itp. Sytuacja jest podobna do rozpatrywanej w §5, §6 i nadaje się do wykorzystania w niej metody Monte Carlo.

Bodaj najczęściej, metoda Monte Carlo stosowana jest w fizyce neutronów. Rozpatrzmy prostszy wariant problemu przechodzenia neutronów przez płytkę.

7.1. Sformułowanie problemu Niech na nieskończoną, jednorodną płytkę o grubości $0 \leq x \leq h$ pada strumień neutronów o energii E_0 . Kąt padania wynosi 90° . Podczas zderzeń z atomami materiału, z którego zbudowana jest płytka, neutrony mogą rozpraszać się elastycznie lub mogą być pochłaniane. Założymy, że energia neutronu nie ulega zmianie w procesie rozpraszania i dowolny kierunek odbicia neutronu od atomu jest jednakowo prawdopodobny (ostatnia własność jest czasami widoczna w materiałach zbudowanych z ciężkich atomów). Na Rys. 22 pokazano różne warianty oddziaływania neutronów z płytką: a –neutron przechodzi przez płytkę, b –neutron jest pochłaniany w płytce, c –neutron jest odbity przez płytkę. Należy wyliczyć prawdopodobieństwo przejścia neutronu przez płytkę p^+ , prawdopodobieństwo odbicia neutronu p^- i prawdopodobieństwo pochłaniania neutronu przez płytkę, p^0 .

Oddziaływanie neutronów z materiałem charakteryzujemy w rozważanym przypadku dwoma parametrami stałymi, Σ_c i Σ_s , które nazywają się



Rysunek 22

przekrojem czynnym na pochłanianie (ang. *capture* (*c*) – wychwyty) oraz przekrojem czynnym na rozpraszanie (ang. *scattering* (*s*) – rozpraszanie). Suma obu przekrojów nosi nazwę całkowitego przekroju czynnego

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s.$$

Przekrój czynny ma następujący sens fizyczny. Prawdopodobieństwo wychwyty neutronu jest równe Σ_c/Σ , a prawdopodobieństwo rozpraszania jest Σ_s/Σ .

Droga swobodna neutronu λ (tzn. długość drogi od zderzenia do zderzenia) jest zmienną losową. Może przyjmować dowolne wartości dodatnie z gęstością prawdopodobieństwa

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

łatwo zauważyć, że podana gęstość zmiennej λ pokrywa się z gęstością (26) zmiennej losowej τ najprostszego strumienia zgłoszeń. Analogicznie do p. 5.2 można od razu napisać wyrażenie dla średniej drogi swobodnej:

$$\mathbf{M} \lambda = 1/\Sigma$$

oraz podać regułę losowania λ

$$\lambda = -(1/\Sigma) \ln \gamma.$$

Pozostaje wyjaśnić sposób wyboru kierunku losowego po rozproszeniu neutronu. Ponieważ problem posiada pełną symetrię względem osi x , to kierunek w zupełności określa podanie jednego tylko kąta między kierunkiem prędkości neutronu i osią Ox . Można pokazać,²⁴ że żądanie jednakowego prawdopodobieństwa kierunku rozpraszania jest w tym przypadku równoważne żądaniu by cosinus kąta, $\mu = \cos \phi$, miał rozkład równomierny w przedziale $(-1, 1)$. Z (24) wynika, że dla $a = -1$, $b = 1$ formuła losowania μ jest:

$$\mu = 2\gamma - 1.$$

7.2. Schemat obliczeń oparty na modelowaniu rzeczywistych dróg Załóżmy, że neutron uległ k -temu rozproszeniu w punkcie o rzędnej x_k wewnątrz płytki i następnie, porusza się w kierunku μ_k . Wylosujmy drogę swobodną

$$\lambda_k = -(1/\Sigma) \ln \gamma$$

i wyliczmy rzędną następnego zderzenia (Rys. 23)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k.$$

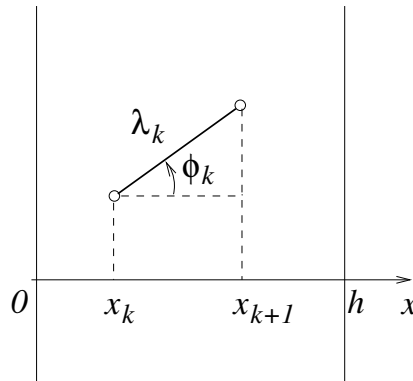
Sprawdzamy warunek przejścia przez płytkę

$$x_{k+1} > h.$$

Jeżeli jest on spełniony, kończymy obliczenia dla tej trajektorii neutronu i dodajemy jedynekę do licznika cząstek, które przeszły przez płytkę. W przeciwnym przypadku, sprawdzamy warunek odbicia:

$$x_{k+1} < 0.$$

Jeśli jest on spełniony, to dodajemy jedynekę do licznika cząstek odbitych. W przypadku, gdy warunek ten nie jest spełniony, tzn. $0 \leq x_{k+1} \leq h$,



Rysunek 23

neutron doznał $k + 1$ zderzenia wewnątrz płytki i należy wygenerować los neutronu po zderzeniu.

Zgodnie z p. 4.1 wybieramy kolejną wartość γ i sprawdzamy warunek wychwytu neutronu:

$$\gamma < \Sigma_c / \Sigma.$$

Jeżeli ostatni warunek jest spełniony należy zakończyć rachunek dla tej trajektorii dodaniem jedynki do licznika pochłoniętych neutronów. W przypadku niespełnienia warunku, uważamy, że neutron uległ rozproszeniu w punkcie, którego rzędna wynosi x_{k+1} . Losujemy wówczas nowy kierunek prędkości neutronu

$$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$$

i powtarzamy cały cykl od początku (oczywiście z innymi tym razem wartościami γ)

Wszystkie γ wypisane zostały bez wskaźników, gdyż pamiętamy, że każdej wartości γ używamy tylko raz. Dla obliczenia jednego ogniwa trajektorii potrzebne są trzy wartości γ . Początek każdej trajektorii zadany jest przez:

$$x_0 = 0, \quad \mu_0 = 1.$$

²⁴Patrz: dowód w części 11.1

Po obliczeniach przeprowadzonych dla N trajektorii okaże się, że N^+ neutronów przeszło przez płytkę, N^- neutronów uległo odbiciu, a N^0 zostało pochłoniętych w płytce. Poszukiwane prawdopodobieństwa są więc dane przez

$$p^+ = \frac{N^+}{N}, \quad p^- = \frac{N^-}{N}, \quad p^0 = \frac{N^0}{N}.$$

Na Rys. 24 pokazano schemat blokowy programu obliczeń. Wskaźnik j jest numerem trajektorii, wskaźnik k numerem zderzenia (na trajektorii).

Taka metodyka obliczeń jest bardzo naturalna lecz nie jest doskonała. W szczególności, metoda ta nie nadaje się do obliczeń prawdopodobieństwa p^+ , gdy jest ono bardzo małe. Z takim przypadkiem spotykamy się akurat przy obliczeniach dotyczących ochrony przed promieniowaniem.

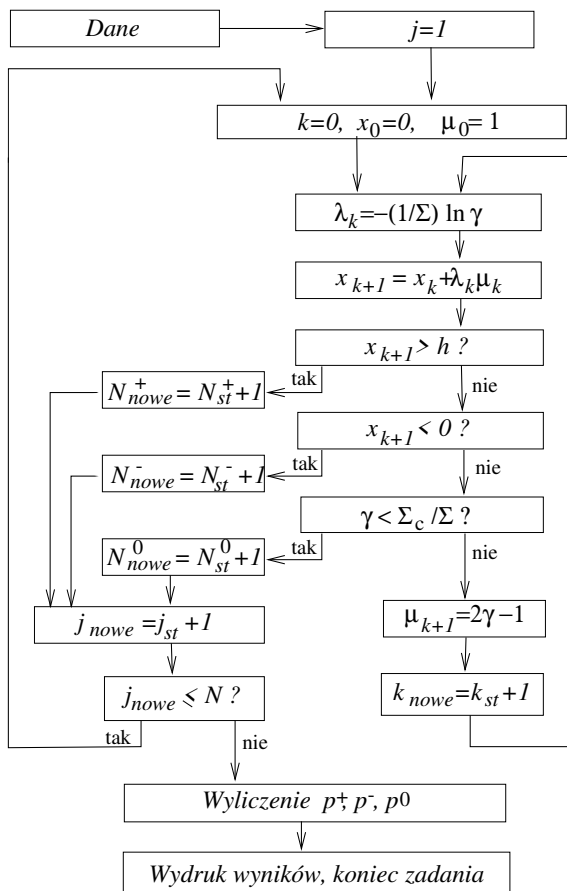
Istnieją bardziej pomysłowe odmiany metody Monte Carlo, pozwalające prowadzić obliczenia i dla takich przypadków. Zatrzymamy się na krótko nad jednym z prostszych wariantów obliczeń z wykorzystaniem tak zwanych wag.

7.3. Schemat obliczeń z wykorzystaniem wag zastępujących pochłanianie Rozpatrzmy ten sam problem przechodzenia neutronów. Założymy, że wzdłuż tej samej trajektorii porusza się *paczka* złożona z dużej liczby w_0 jednakowych neutronów. Przy zderzeniu w punkcie o rzędnej x_1 średnia liczba pochłoniętych z paczki neutronów jest równa $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$, a średnia liczba neutronów rozproszonych jest równa $w_0(\Sigma_s/\Sigma)$. Dodajemy liczbę $w_0(\Sigma_c/\Sigma)$ do licznika cząstek pochłoniętych. Ruch paczki rozproszonej będziemy dalej obserwować, zakładając, że pozostała część *paczki* uległa rozproszeniu w jednym kierunku.

Wszystkie formuły, podane w poprzednim punkcie, pozostają bez zmian. Jedynie liczba neutronów w *paczce* będzie się zmniejszać

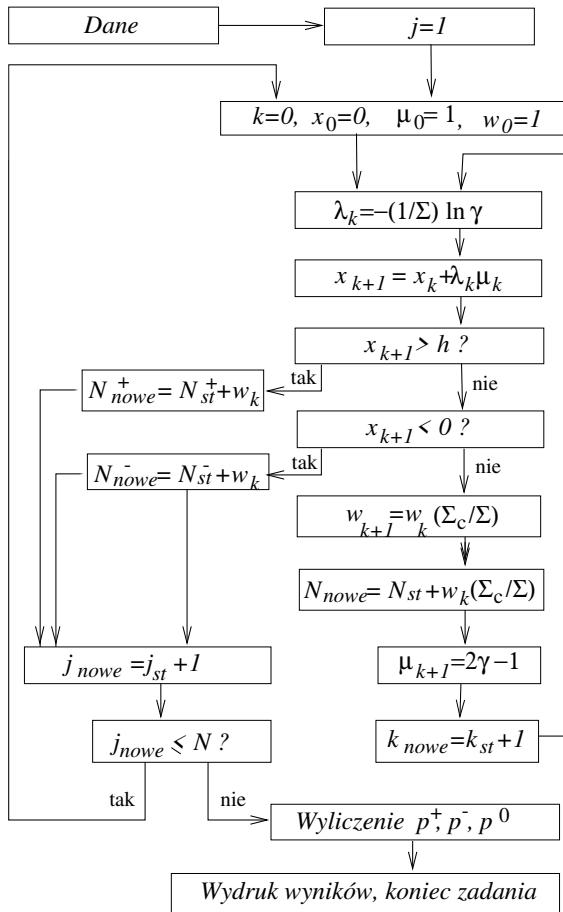
$$w_{k+1} = w_k(\Sigma_s/\Sigma),$$

gdyż część *paczki*, zawierająca $w_k(\Sigma_c/\Sigma)$ neutronów, zostanie pochłonięta. Teraz, trajektoria nie może zakończyć się pochłanianiem.



Rysunek 24

Wielkość w_k nazywa się zazwyczaj *wagą* neutronu i zamiast mówić o *paczce* złożonej z w_k neutronów mówi się o jednym neutronie z wagą w_k . Początkową wagę przyjmuje się równą 1. Nie przeczy to założeniu o *dużej paczce*, gdyż jak łatwo zauważyć, wszystkie w_k otrzymane przy obliczeniach dla jednej trajektorii, zawierają wspólny czynnik w_0 .



Rysunek 25

Schemat blokowy programu takich obliczeń przedstawiony jest na Rys. 25. Jego złożoność nie jest wcale większa niż złożoność schematu z Rys. 24. Można jednakże pokazać, że obliczenia tą metodą są o wiele dokładniejsze niż obliczenia wykonane metodą imitacji.

Oznaczmy mianowicie przez η i η' zmienne losowe, dające liczbę (wagę) neutronów, które przeszły przez płytkę, i otrzymane dla jednej trajektorii metodą p. 7.2, i metodą p. 7.3. Z fizycznego punktu widzenia

$$\mathbf{M} \eta = \mathbf{M} \eta' = p^+.$$

(Dokładny dowód tego faktu można znaleźć w [4, Sobol, I.M.].)

Ponieważ η może przyjmować tylko wartości 0 i 1 to rozkład η jest postaci

$$\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+ & 1 - p^+ \end{pmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę, że $\eta^2 = \eta$, łatwo pokazuje się, że $\mathbf{D} \eta = p^+ - (p^+)^2$.

Zauważmy, że zmienna η' może przyjmować nieskończenie wiele wartości: $w_0, w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$, a także wartość 0. Z tego względu jej tablica rozkładu ma postać

$$\eta' \sim \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_k & \dots & 0 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_k & \dots & q \end{pmatrix}.$$

Wartości q_k nie są dla nas ważne, gdyż dyspersję

$$\mathbf{D} \eta' = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k - (p^+)^2$$

można oszacować bez nich. Ponieważ wszystkie $w_k \leq 1$, więc

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} w_k q_k = \mathbf{M} \eta' = p^+,$$

skąd wynika, że $\mathbf{D} \eta' \leq p^+ - (p^+)^2$. Mamy więc $\mathbf{D} \eta' \leq \mathbf{D} \eta$.

7.4. Uwagi Istnieje wiele rozmaitych metod obliczeń, wykorzystujących różne wagi. Nie będziemy ich dyskutować. Zauważymy jedynie, że metoda Monte Carlo pozwala rozwiązywać bardziej skomplikowane problemy

z dziedziny cząstek elementarnych. Badany materiał może składać się z różnych substancji i posiadać dowolną strukturę geometryczną. Energia cząstek przy każdym zderzeniu może się zmieniać. Można rozpatrywać wiele innych procesów jądrowych (na przykład możliwość rozszczepienia jądra przy zderzeniu z neutronem i powstawanie w tym procesie nowych neutronów). Można rozważać warunki zachodzenia kontrolowanej reakcji łańcuchowej, itd (patrz §8).

§8. Problem astrofizyczny

W charakterze rzeczywistego problemu, rozwiązanego metodą Monte Carlo, pokażemy przykład, który w jakimś stopniu przystaje do §7: tutaj również rozpatruje się przechodzenie cząstek przez materię. Cząstkami są nie neutrony, lecz fotony – najmniejsze cząstki światła. Zamiast zwykłej płytki mamy sferyczny obłok plazmy [5, Pozdnyakov, *et al*].²⁵

8.1. Komptonizacja Po odkryciu rozbłysków promieni X – rentgenowskich i rozbłysków promieniowania gamma pochodzenia kosmicznego, astrofizycy zaczęli poświęcać dużo uwagi budowie modeli, które mogłyby wyjaśnić obserwowane widma promieniowania: potężowy charakter wielu widm wydawał się początkowo trudny do wyjaśnienia.

Najprostszy model zwartej źródła to obłok gorącej plazmy, w którego środku powstają fotony o niskiej częstotliwości. Rozpraszając się wielokrotnie na gorących elektronach plazmy, fotony powiększają swoją energię $h\nu$ i opuszczają obłok jako twarde promieniowanie rentgenowskie lub gamma.

Jak wiemy, zmiana energii fotonu w procesie rozpraszania na elektronie nosi nazwę *efektu Comptona*.^{26,27} Z tego powodu opisany wyżej proces

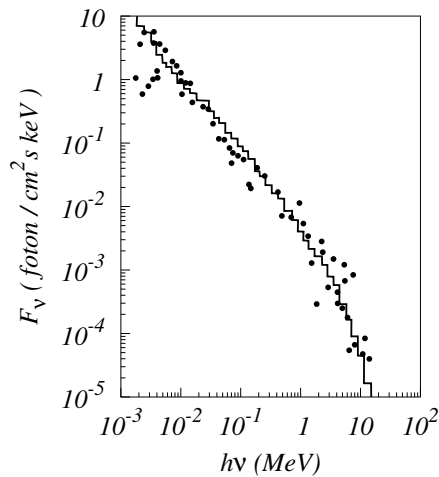
²⁵Bardziej kompletny wariant został opublikowany w pracy [6, Pozdnyakov *et al*].

²⁶Arthur Holly Compton (ur. 10 września 1892 w Wooster, Ohio, zm. 15 marca 1962 w Berkeley, Kalifornia) - amerykański fizyk, laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki. [*przypis tłumacza*]

²⁷Zjawisko Comptona, rozpraszanie komptonowskie – zjawisko rozpraszania promieniowania X (rentgenowskiego) i promieniowania gamma, czyli promieniowania elektromagnetycznego o dużej częstotliwości, na swobodnych lub słabo związanych elektronach. [*przypis*]

nazywa się komptonizacją. Komptonizacja pozwala wyjaśnić obserwowane widma promieniowania gwiazd neutronowych, jąder galaktycznych, kwazarów, dysków akrecyjnych powstałych w pobliżu czarnych dziur. Nadzwyczaj efektywną metodą obliczeń komptonizacji okazała się być metoda Monte Carlo.

(W rzeczywistości fotony nie muszą powstawać w centrum obłoku: może tam na przykład, znajdować się czarna dziura. Obliczenia pokazały, że kształt widma promieniowania wychodzącego z obłoku, przy dużych $h\nu$ nie zależy od miejsca powstawania fotonów wewnątrz chmury. Jak mówią fizycy, foton, który rozprasza się wielokrotnie, zapomina o miejscu swoich urodzin...)



Rysunek 26

8.2. Konkretny Przykład 10.

Rys. 26, zapożyczony z cytowanej wcześniej pracy, przedstawia próbę modelowania widma promieniowania jądra galaktyki Seyferta NGC 4151. Strumień fotonów F_ν , przedstawiony na osi pionowej, jest proporcjonalny do prawdopodobieństwa wylotu fotonu o energii $h\nu$. Punkty reprezentują dane eksperymentalne; błędy danych, niekiedy całkiem duże, nie zostały pokazane.

Histogram na Rys. 26 otrzymano metodą Monte Carlo. Przyjęto, że częstościowy rozkład powstających fotonów ma charakter rozkładu Plancka²⁸ z temperaturą T_r , a rozkład prędkości elektronów jest rozkładem Maxwella²⁹ z temperaturą T_e . Ich wartości liczbowe były równe $kT_r = 0,5$ eV, $kT_e = 2$ MeV. Promień chmury równa się $0,4$ średniej drogi swobodnej fotonu względem zimnych elektronów.

Z Rys. 26 wynika, że w całkiem dużym przedziale energii, w przybliżeniu od $h\nu = 0,1$ MeV do $h\nu = 6$ MeV, wielkość $\log F_\nu$ jest proporcjonalna do $\log h\nu$. Z wielkości nachylenia histogramu na tym odcinku można oszacować współczynnik kątowy prostej przybliżającej dane i stwierdzić, że

$$F_\nu \sim (h\nu)^{-1,2}.$$

Przy dalszym zwiększaniu się $h\nu$ charakter widma zmienia się: zaznacza się jego wykładniczy zanik.

8.3. O metodyce obliczeń Jak wspomnieliśmy wcześniej, przechodzenie fotonów przez obłok można modelować tak jak zrobiliśmy to w §7. Energię każdego powstającego fotonu należy losować zgodnie z rozkładem Plancka. Prędkości rozpraszających elektronów również należy losować. Za każdym razem należy obliczyć średnią drogę swobodną fotonu, gdyż zależy ona od $h\nu$ itd. Wypisywanie formuł obliczeniowych nie jest chyba celowe.

²⁸Max Karl Ernst Ludwig Planck (ur. 23 kwietnia 1858 w Kilonii, zm. 4 października 1947 w Getyndze) – niemiecki fizyk, autor prac z zakresu termodynamiki, promieniowania cieplnego, energii, dyspersji, optyki, teorii względności, a przede wszystkim teorii kwantów. Laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki z 1918 roku. [przypis tłumacza]

²⁹James Clerk Maxwell (ur. 13 czerwca 1831 w Edynburgu, zm. 5 listopada 1879 w Cambridge) – szkocki fizyk i matematyk. Autor wielu wybitnych prac z zakresu elektrodynamiki, kinetycznej teorii gazów i optyki [przypis tłumacza]

O wiele ciekawiej jest zauważyć, że prawdopodobieństwa w prawej części widma (patrz Rys. 26) są 10^6 razy mniejsze niż w jego lewej części. Jasne, że na drodze modelowania imitacyjnego nie da się tego otrzymać. W rzeczywistości histogram na Rys. 26 otrzymany został tylko dzięki wykorzystaniu wag. Było to o wiele bardziej skomplikowane niż opisano w 7.3. W przypadku fotonu o wadze w_k po k -tym rozproszeniu, wyliczano prawdopodobieństwo bezpośredniej ucieczki L_k ; część fotonu z wagą $w_k L_k$ dodawano do licznika ucieczek, a w przypadku pozostałej części z wagą $w_{k+1} = w_k(1 - L_k)$ konstruowano $k + 1$ -szy akt rozpraszania.

§9. Obliczanie całek oznaczonych

Problemy, które rozpatrywaliśmy w poprzednich rozdziałach, były statystycznymi z natury i wykorzystanie metody Monte Carlo przy ich rozwiązywaniu było w ich przypadku rzeczą naturalną. Tutaj rozpatrujemy problem matematyczny przybliżonego obliczenia całki oznaczonej.

Ponieważ obliczanie takich całek jest równoznaczne z wyznaczaniem pól, to można byłoby wykorzystać metodę p. 1.2. Zamiast tego opiszemy inną, bardziej efektywną metodę, która pozwala budować różne modele stochastyczne rozwiązywania tego problemu metodą Monte Carlo. Pokażemy też jak wybrać spośród nich model najlepszy.

9.1. Metoda obliczeń Rozważmy funkcję $g(x)$, określoną na przedziale $a < x < b$. Chcemy w przybliżeniu obliczyć całkę

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad (33)$$

(jeśli jest to całka niewłaściwa to żądamy, że jest ona absolutnie zbieżna).

Weźmy dowolną gęstość $p(x)$ na (a, b) (tzn. dowolną funkcję $p(x)$, spełniającą warunki (15), (16)). Wraz z losową zmienną ξ , określoną na prze-

dziale (a, b) z gęstością $p(x)$, potrzebna będzie wielkość

$$\eta = g(\xi)/p(\xi).$$

Zgodnie z (18)

$$\mathbf{M} \eta = \int_a^b \frac{g(x)}{p(x)} p(x) dx = I.$$

Rozpatrzmy teraz N jednakowych, niezależnych zmiennych losowych $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$ i zastosujmy centralne twierdzenie graniczne do sumy tych zmiennych. Formuła (21) jest w tym wypadku

$$P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j - I \right| < 3 \sqrt{\frac{\mathbf{D} \eta}{N}} \right\} \approx 0,997.$$

Ostatnia równość mówi, że jeżeli weźmiemy N wartości $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ to przy odpowiednio dużym N

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{g(\xi_j)}{p(\xi_j)} \approx I. \quad (34)$$

Jednocześnie, z bardzo dużym prawdopodobieństwem błąd przybliżenia (34) nie przekracza $3\sqrt{\mathbf{D} \eta/N}$.

9.2. Istotny wybór Widzieliśmy, że w celu obliczenia całki (33) można wykorzystać dowolną zmienną losową ξ , określoną na przedziale (a, b) z gęstością $p(x) > 0$.³⁰ W dowolnym przypadku $\mathbf{M} \eta = \mathbf{M}[g(\xi)/p(\xi)] = I$. Jednakże dyspersja $\mathbf{D} \eta$, a wraz z nią oszacowanie błędu w formule (34) zależą od tego jaka zmienna ξ jest wykorzystywana, gdyż

³⁰W ogólności, gęstość $p(x)$ może zniknąć (patrz przypis w p. 2.2), lecz tylko w tych punktach, w których $g(x) = 0$.

$$\mathbf{D} \eta = \mathbf{M} \eta^2 - I^2 = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx - I^2. \quad (35)$$

Pokażemy, że wielkość ta jest minimalna, gdy $p(x)$ jest proporcjonalne do $|g(x)|$.

Wykorzystamy w tym celu znaną z analizy matematycznej nierówność

$$\left(\int_a^b |u(x)v(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b u^2(x) dx \int_a^b v^2(x) dx,$$

w której wstawimy $u = g(x)/\sqrt{p(x)}$, $v = \sqrt{p(x)}$. Otrzymamy

$$\left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p(x)} dx. \quad (36)$$

Z (35), (36) wynika, że

$$\mathbf{D} \eta \geq \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2 - I^2. \quad (37)$$

Pozostaje pokazać, że dolną granicę wartości dyspersji (37) otrzymamy biorąc gęstość $p_0(x) = c|g(x)|$. Łatwo to zrobić, gdyż z warunku unormowania $p_0(x)$ wynika, że

$$c = \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^{-1}.$$

Oznacza to, że

$$\int_a^b \frac{g^2(x)}{p_0(x)} dx = \frac{1}{c} \int_a^b |g(x)| dx = \left(\int_a^b |g(x)| dx \right)^2$$

i prawa strona (35) przechodzi w prawą stronę (37).

Nie da się w praktyce wykorzystać *najlepszej* gęstości $p_0(x)$, gdyż potrzebna jest w tym celu znajomość całki $\int_a^b |g(x)| dx$. Wyliczenie jej jest z kolei problemem, równoważnym wyznaczeniu całki (33). Z tego też względu ograniczymy się do następującego zalecenia: *jest rzeczą pożądaną by gęstość $p(x)$ była proporcjonalna do $|g(x)|$.*

Wybór bardzo złożonych $p(x)$ jest oczywiście niecelowy ponieważ procedura wybierania ξ staje się zbyt pracochłonna. Możemy jednak kierować się tym zaleceniem przy wyborze $p(x)$ (patrz p. 9.3). Oszacowanie (34) z gęstością $p(x)$ zbieżną z $|g(x)|$, nazywamy *istotnym wyborem*.

W praktyce, całek postaci (33) nie wylicza się metodą Monte Carlo; istnieją bardziej dokładne metody obliczeń – wzory kwadraturowe. Przy przejściu do całek wielokrotnych sytuacja ulega zmianie: wzory na kwadratury stają się zbyt zawile, a metoda Monte Carlo prawie się nie zmienia.

9.3. Przykład liczbowy Wyliczmy, w przybliżeniu, całkę

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx .$$

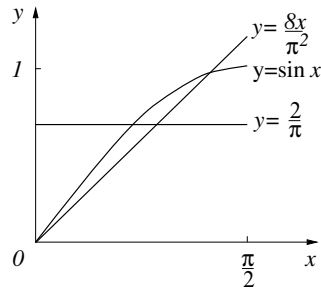
Jej dokładna wartość jest

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1 .$$

Wykorzystamy w obliczeniach dwie różne zmienne losowe ξ : o stałej gęstości $p(x) = 2/\pi$ (tzn. ξ ma równomierny rozkład w przedziale $0, 2/\pi$) i o gęstości liniowej $p(x) = 8x/\pi^2$. Obie te gęstości wraz z funkcją $\sin x$ pokazuje Rys. 27, z którego widzimy, że gęstość liniowa bardziej odpowiada zaleceniu z p. 9.2 o tym by $p(x)$ i $|\sin x|$ były proporcjonalne. Z tego względu wydaje się, że drugi sposób obliczeń da lepszy wynik.

1. Niech $p(x) = 2/\pi$. Formułę losowania ξ można otrzymać z (24) dla $a = 0, b = \pi/2$:

$$\xi = (\pi/2)\gamma .$$



Rysunek 27

Wzór (34) przyjmie postać

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^N \sin \xi_j.$$

Niech $N = 10$. Jako wartości γ użyjemy trójek liczb z Tablicy 4, pomnożonych przez 0,001. Pośrednie wyniki przedstawiono w Tablicy 1. Wynikiem obliczeń jest $I \approx 0,952$.

Tablica 1: Metoda 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,359	0,250	0,124	0,889	0,243	1,043	0,542	1,029	1,275	0,521
$\sin \xi_j$	0,979	0,247	0,124	0,776	0,241	0,864	0,516	0,857	0,957	0,498

2. Niech teraz $p(x) = 8x/\pi^2$. W celu wylosowania ξ wykorzystamy (23) :

$$\int_0^{\xi} \frac{8x}{\pi} dx = \gamma,$$

skąd, po prostych rachunkach, otrzymamy

$$\xi = (\pi/2)\sqrt{\gamma}.$$

Wzór (34) jest

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N} \sum_{j=1}^N \frac{\sin \xi_j}{\xi_j}.$$

Niech $N = 100$. Weźmiemy te same liczby losowe γ , jak w przy-

Tablica 2: Metoda 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,461	0,626	0,442	1,182	0,618	1,280	0,923	1,271	1,415	0,905
$\frac{\sin \xi_j}{\xi_j}$	0,680	0,932	0,968	0,783	0,937	0,748	0,863	0,751	0,698	0,868

padku 1. Wyniki pośrednie przedstawia Tablica 2. Wynikiem obliczeń jest $I \approx 1,016$. Jak przypuszczaliśmy, wynik rachunku jest w tym przypadku dokładniejszy.

3. Na podstawie wartości przedstawionych w Tablicach 1 i 2, można w przybliżeniu wyliczyć dyspersję $\mathbf{D} \eta$ dla obu metod obliczeń (patrz wzór z p. 6.1).

- Metoda 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \eta &\approx \frac{\pi^2}{9 \cdot 4} \left[\sum_{j=1}^{10} (\sin \xi_j)^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{j=1}^{10} \sin \xi_j \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi^2}{10} (4,604 - 3,670) = 0,256. \end{aligned}$$

- Metoda 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\eta &\approx \frac{\pi^2}{9 \cdot 4} \left[\sum_{j=1}^{10} \left(\frac{\sin \xi_j}{\xi_j} \right)^2 - \frac{1}{10} \left(\sum_{j=1}^{10} \frac{\sin \xi_j}{\xi_j} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi^4}{576} (6,875 - 6,777) = 0,016. \end{aligned}$$

Nie zwracając uwagi na to, że wartość $N = 10$ jest niewielka i że nie gwarantujemy przybliżonej normalności oszacowania (34), wyliczmy dla obu metod wielkość $0,6745\sqrt{\mathbf{D}\eta/N}$. Otrzymamy wartości 0,103 i 0,027. Łatwo zauważyć, że faktyczne błędy absolutne przy obliczeniach I są równe 0,048 i 0,016 i są wielkościami tego samego rzędu. Zauważmy, że dokładne wartości $\mathbf{D}\eta$ są w rozpatrywanym przykładzie równe 0,233 i 0,0166. W ten sposób, również oszacowania dyspersji pokazują, że metoda 2 okazuje się być dokładniejszą od metody 1.

Wiadomości uzupełniające

3

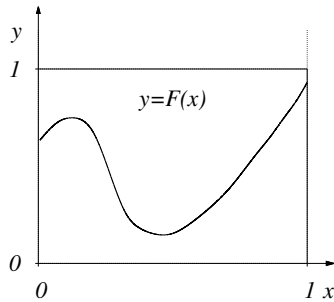
§10. O liczbach pseudolosowych

Większość algorytmów otrzymywania liczb pseudolosowych jest postaci

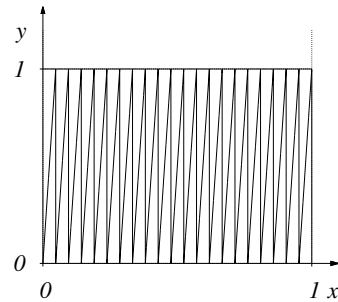
$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k). \quad (38)$$

Jeśli zadana jest początkowa liczba γ_0 to wszystkie następne $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, wyliczane są według tego samego wzoru (38) dla $k = 1, 2, \dots$. Metoda środka kwadratów z p. 3.3 jest również postaci (38). W jej wypadku zamiast analitycznego wyrażenia $y = F(x)$ podano zbiór operacji, które należy wykonać nad argumentem x w celu otrzymania y .

10.1. Jaka powinna być funkcja $F(x)$? Następujący przykład pozwala zrozumieć na czym polega podstawowa trudność związana z wyborem $F(x)$.



Rysunek 28



Rysunek 29

Przykład 11.

Pokażemy, że funkcja $y = F(x)$ przedstawiona na Rys. 28 nie może być używana w procesie generowania liczb pseudolosowych według wzoru (38).

Rozpatrzmy punkty o współrzędnych kartezjańskich

$$(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_3, \gamma_4), (\gamma_5, \gamma_6), \dots$$

rozmieszczone w jednostkowym kwadracie $\{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Ponieważ w tym wypadku $\gamma_2 = F(\gamma_1)$, $\gamma_4 = F(\gamma_3)$, $\gamma_6 = F(\gamma_5)$, ..., to wszystkie takie punkty leżą na krzywej $y = F(x)$. To źle, gdyż punkty losowe powinny wypełniać cały kwadrat równomiernie.

Z rozpatrzonego przykładu wynika, że używając funkcji $y = F(x)$ we wzorze (38) można spodziewać się sukcesu tylko wtedy, gdy jej grafik dostatecznie gęsto zapełnia cały kwadrat.

Własność taką posiada np. funkcja

$$y = \{gx\}, \quad (39)$$

gdzie g jest dużą liczbą, a $\{z\}$ oznacza ułamkową część liczby z , tzn. $\{z\} = z - [z]$. Na Rys. 29 pokazano wykres takiej funkcji przy $g = 21$. Czytelnik może sobie wyobrazić, jak taki wykres wygląda w przypadku $g = 5^{17}$.

10.2. Metoda porównań (metoda reszduów) Najbardziej powszechną metodą generowania liczb pseudolosowych jest metoda zaproponowana przez D. Lehmera.³¹ Podstawę algorytmu stanowi funkcja (39), jednakże dla wygody, jej realizacja na komputerze przebiega nieco inaczej.

Definiuje się ciąg liczb całkowitych m_k , w którym zadana jest liczba początkowa $m_0 = 1$, a następne, m_1, m_2, \dots są wyliczane według tego samego wzoru

$$m_{k+1} = 5^{17} m_k \bmod 2^{40} \quad (40)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Z liczb m_k otrzymuje się liczby pseudolosowe

$$\gamma_k = 2^{-40} m_k. \quad (41)$$

Formuła (40) mówi, że liczba m_{k+1} jest równa reszcie z dzielenia liczby $5^{17} m_k$ przez 2^{40} . W teorii porównań (patrz dowolny podręcznik z teorii liczb) taką resztę nazywa się *najmniejszym dodatnim reszduum modulo* 2^{40} . Stąd pochodzą obie nazwy algorytmu *metoda porównań* i *metoda reszduów*. Spotykany termin *metoda kongruencji* jest wynikiem błędnego tłumaczenia. Angielski termin *congruence* posiada dwa znaczenia i oznacza zarówno kongruencję jak też równość modulo.

Formuły (40) i (41) dają się łatwo realizować na komputerach pracujących z liczbami 40 bitowymi z wykorzystaniem polecenia mnożenia liczb podwójnej precyzji. Należy wykorzystać młodsze cyfry iloczynu. Okres ciągu m_0, m_1, m_2, \dots , pokrywa się z odcinkiem aperiodyczności $P = L = 2^{38}$. Zawarte są w nim wszystkie liczby postaci $4n + 1$ nie większe niż 2^{40} .

10.3. Komputer serii ES Większość maszyn cyfrowych tej serii pracuje z liczbami 31 bitowymi. W ich oprogramowanie matematyczne wchodzi

³¹Derrick Henry Lehmer (ur. 23 lutego 1905 w Berkeley, zm. 22 maja 1991 tamże) – amerykański matematyk, twórca testu Lucasa-Lehmera dla liczb Mersenne’a. [przypis tłumacza]

generator RANDU polecany przez specjalistów IBM. Również tutaj realizowana jest metoda residuów:

$$m_{k+1} = g m_k \bmod 2^{31}, \quad \gamma_k = 2^{-31} m_k, \quad m_0 = 1.$$

Czynnik $g = 65539 = 2^{16} + 3$ został jednak wybrany tak niezręcznie, że generator jest, praktycznie biorąc, zły. Zostało to pokazane przez wielu obliczeniowców dużo wcześniej nim udowodniono nieprzydatność generatora.³²

W tym przypadku można polecić czynnik $g = 5^{13}$. Ciekawe, że liczby z grupy $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ dla $N = 100$ są jawnie źle rozmieszczone w przedziale $(0, 1)$.^{33,34} Jednak przy wzroście N rozkład poprawia się i przy $N \geq 500$ jest całkowicie zadowalający. Dla rozpatrywanego ciągu $P = L = 2^{29}$.

§11. Metody modelowania zmiennych losowych

W paragrafie tym przedstawiono najważniejsze metody modelowania zmiennych losowych. U podstawy klasyfikacji tego rodzaju metod leży ilość liczb losowych potrzebnych do otrzymania jednej wartości ξ . Podstawy klasyfikacji można znaleźć w [4, Sobol, I.M.], gdzie pokazano ją po raz pierwszy.

11.1 Przekształcenie postaci $\xi = g(x)$ Pierwsze miejsce wśród tego typu przekształceń zajmuje bezspornie metoda funkcji odwrotnych. Pokażemy, że sposoby generowania dyskretnych i ciągłych zmiennych losowych, które zostały pokazane w §4, są szczególnymi przypadkami tej metody.

Przypominamy, że

³²[7, Forsyth J., *et al*]. Tłumacz tej książki z niewiadomych powodów uznał za stosowne opatrzyć wezwanie autorów by „nie używać RANDU” następującą uwagą: „To ostrzeżenie odnosi się oczywiście, do amerykańskich czytelników książki” ...

³³Pokazał to B. W. Schuhman.

³⁴Autor nie odnosi się do literatury źródłowej, podając tylko nazwisko odkrywcy tego faktu. [przypis tłumacza]

Definicja 8 (Dystrybuanta zmiennej losowej): Dystrybuantą (funkcją rozkładu) dowolnej zmiennej losowej nazywa się funkcję

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} ,$$

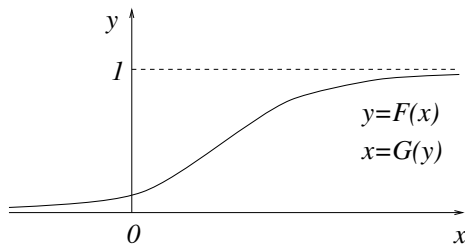
określoną dla wszystkich $-\infty < x < \infty$.

Oczywiście, $0 \leq F(x) \leq 1$. Łatwo pokazać, że funkcja $F(x)$ nie maleje ze wzrostem x i, że zawsze istnieją granice $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Funkcja $F(x)$ nie musi jednakże być silnie monotoniczna: w pewnych przedziałach może być stała. Nie musi też być ciągła, może posiadać skoki.

Założmy, że $y = F(x)$ jest ciągła i silnie monotoniczna (Rys. 30). Istnieje wówczas ciągła funkcja odwrotna $x = G(y)$, dla której przy wszystkich $-\infty < x < \infty$ i wszystkich $0 < y < 1$

$$G(F(x)) = x , \quad F(G(y)) = y . \quad (42)$$

Pokażemy, że dystrybuantą zmiennej losowej $G(x)$ jest $F(x)$.



Rysunek 30

Rzeczywiście,

$$\mathbf{P}\{G(\gamma) < x\} = \mathbf{P}\{F(G(\gamma)) < F(x)\} = \mathbf{P}\{\gamma < F(x)\} .$$

Ponieważ γ ma rozkład jednorodny w przedziale $(0, 1)$, to prawdopodobieństwo $\mathbf{P}\{\gamma < F(x)\} = \mathbf{P}\{0 < \gamma < F(x)\}$ jest równe długości przedziału $(0, F(x))$, tzn. równa się $F(x)$. Pokazaliśmy więc, że

$$\mathbf{P}\{G(\gamma) < x\} = F(x). \quad (43)$$

W konsekwencji, zmienna losowa ξ z ciągłą i monotoniczną funkcją rozkładu $F(x)$ może być generowana według reguły

$$\xi = G(\gamma). \quad (44)$$

Podobnie jak γ , $1 - \gamma$ równomiernie wypełnia przedział $(0, 1)$. Zamiast formuły (44) można więc używać formuły

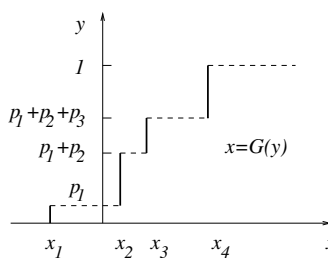
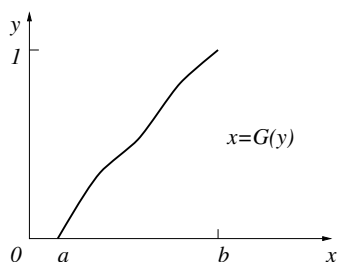
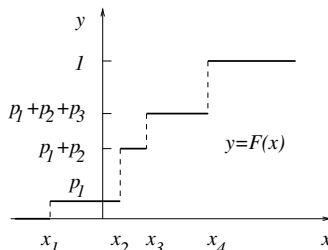
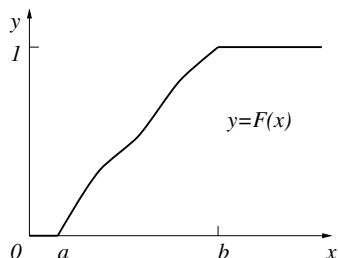
$$\xi = G(1 - \gamma). \quad (45)$$

Przedstawiona metoda generowania zmiennych losowych według reguły (44) lub (45) nosi nazwę metody funkcji odwrotnych.

Okazuje się, że metodę funkcji odwrotnych można zastosować do generowania liczb losowych ξ dla przypadku dowolnej funkcji rozkładu $F(x)$. W miejscach gdzie funkcja odwrotna (w zwykłym sensie) jest niejednoznaczna lub, gdy nie jest określona dla wszystkich $0 < y < 1$, należy ją rozsądnie rozszerzyć. W ten sposób $x = G(y)$ stanie się jednoznaczna i niemalejąca, i chociaż nie można zagwarantować, że przy wszystkich $-\infty < x < \infty$ i $0 < y < 1$ będą spełnione równości (42) to będzie spełnione żądanie słabsze, a mianowicie nierówności $G(y) \geq x$ i $y \geq F(x)$.

To wystarczy by zamiast (43) zapisać

$$\mathbf{P}\{G(\gamma) < x\} = 1 - \mathbf{P}\{G(\gamma) \geq x\} = 1 - \mathbf{P}\{\gamma \geq F(x)\} = \mathbf{P}\{\gamma < F(x)\}.$$



Rysunek 31

Rysunek 32

Przykład 12.

Rozpatrzmy ciągłą zmienną losową ξ z p 4.2. Łatwo pokazać, że krzywa przedstawiona na Rysunkach 12 i 13 jest częścią dystrybuanty. Jeśli $a < x < b$ to

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{a < \xi < x\} = \int p(x) dx. \quad (46)$$

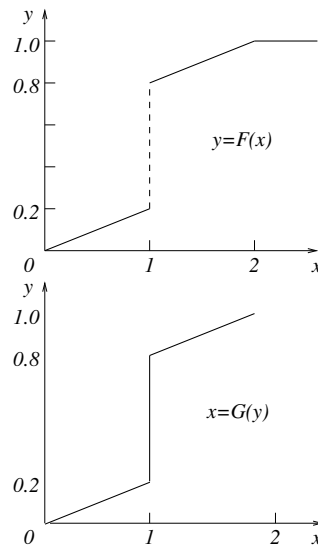
Pełna dystrybuanta została przedstawiona na Rys. 31. Pokazano też funkcję odwrotną $x = G(y)$. W przykładzie tym *rozsądne* rozszerzenie funkcji odwrotnej sprowadziło się do tego, że fragment funkcji $y = F(x)$ uzupełniono przy $x < a$ i $x > b$. Jest rzeczą oczywistą, że metoda z p. 4.2 (patrz (23)) pokrywa się z metodą funkcji odwrotnych (patrz (44)).

Przykład 13.

Rozpatrzmy dyskretną zmienną losową ξ z p. 4.1. Funkcję rozkładu tej zmiennej w szczególnym przypadku $n = 4$ pokazuje Rys. 32. Wybierając dowolną wartość γ na osi y , zawartą między zerem i jednością stwierdzamy, że odpowiadająca jej wartość $G(\gamma)$ jest równa jednej z wartości x_i takiej, że

$$\mathbf{P}\{G(\gamma) = x_i\} = p_i.$$

Widać stąd, że metoda z p. 4.1 jest również metodą funkcji odwrotnych.



Rysunek 33

Przykład 14.

Rozpatrzmy zmienną losową ξ typu mieszanego, której rozkład z prawdopodobieństwem 0,4, jest równomierny w przedziale $0 < x < 2$ i z prawdopodobieństwem 0,6 zmienna ta przyjmuje wartość 1. Na Rys. 33 pokazano nieciągłą

dystrybuantę $F(x)$ tej zmiennej oraz funkcję odwrotną $G(y)$. Ponieważ

$$F(x) = \begin{cases} 0, 2x, & \text{jeśli } 0 < x < 1, \\ 0, 2x + 0, 6, & \text{jeśli } 1 < x < 2. \end{cases}$$

to z (44) otrzymujemy następującą regułę losowania ξ :

$$F(x) = \begin{cases} 5\gamma, & \text{jeśli } 0 < \gamma < 0, 2, \\ 1, & \text{jeśli } 0, 2 < \gamma < 0, 8, \\ 5(\gamma - 0, 6), & \text{jeśli } 0, 8 < \gamma < 1. \end{cases}$$

Wybór losowego kierunku w przestrzeni Kierunek będziemy zadawać za pomocą wektora jednostkowego wystawionego w początku układu współrzędnych. Końce takich wektorów leżą na sferze jednostkowej. Powiedzenie *dowolny kierunek* jest równoważne stwierdzeniu, że koniec wektora kierunkowego reprezentuje losowy punkt Ω o rozkładzie równomiernym na powierzchni sfery. Prawdopodobieństwo tego, że Ω wypadnie w dowolnym elemencie powierzchni dS jest równe $dS/(4\pi)$.

Wyberzmy na sferze współrzędne sferyczne (ϕ, ψ) z osią biegunową Ox (Rys. 34). Wówczas

$$dS = \sin \phi d\phi d\psi,$$

gdzie $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \psi < 2\pi$.

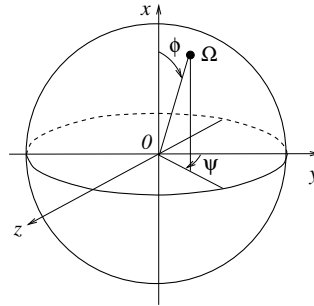
Oznaczmy przez $p(\phi, \psi)$ gęstość punktu losowego (ϕ, ψ) . Z żądania

$$p(\phi, \psi) d\phi d\psi = dS/(4\pi)$$

i poprzedniej równości wynika, że

$$p(\phi, \psi) = (4\pi)^{-1} \sin \phi.$$

Na podstawie wspólnej gęstości ϕ i ψ można wyznaczyć oddzielne gęstości



Rysunek 34

obu tych zmiennych

$$p_1(\phi) = \int_0^{2\pi} p(\phi, \psi) d\psi = \frac{1}{2} \sin \phi,$$

$$p_2(\psi) = \int_0^\pi p(\phi, \psi) d\phi = \frac{1}{2\pi}.$$

Równość $p(\phi, \psi) = p_1(\phi)p_2(\psi)$ pokazuje, że zmienne ϕ i ψ są niezależne. Jest jasne, że ψ ma rozkład równomierny w przedziale $(0, 2\pi)$ i formuła losowania ψ jest

$$\psi = 2\pi\gamma. \quad (47)$$

Formułę wyboru ϕ otrzymamy z metody funkcji odwrotnych (45):

$$F(\phi) = \int_0^\phi p_1(\phi) d\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos \phi) = 1 - \gamma,$$

a stąd

$$\cos \phi = 2\gamma - 1. \quad (48)$$

Formuły (47), (48) pozwalają wybrać losowy kierunek. Oczywiście jest, że wartości γ występujące w tych formułach, powinny być niezależne od siebie.

11.2 Przekształcenie typu $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$ Ten rodzaj przekształceń obejmuje bardzo często spotykaną w praktyce, metodę superpozycji.

Założymy, że dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej ξ może być przedstawiona jako superpozycja wielu funkcji rozkładu:

$$F(x) = \sum_{k=1}^m c_k F_k(x), \quad (49)$$

gdzie wszystkie $c_k > 0$ i $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 1$. Założymy jednocześnie, że zmienne losowe zadane przez dystrybuanty $F_k(x)$ potrafimy modelować, np. przy pomocy metody funkcji odwrotnych $G_k(x)$.

Wprowadźmy pomocniczą zmienną losową

$$\kappa \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ c_1 & c_2 & \dots & c_m \end{pmatrix},$$

tak, że $\mathbf{P}\{\kappa = k\} = c_k$. Pokażemy, że jeśli wybierzemy dwie liczby losowe γ_1 i γ_2 i według γ_1 wylosujemy numer κ , a następnie wyliczymy $G_\kappa(\gamma_2)$, to dystrybuantą tej zmiennej będzie $F(x)$.

Rzeczywiście, ze znanego wzoru na całkowite prawdopodobieństwo wynika, że

$$\mathbf{P}\{G_\kappa(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m \mathbf{P}\{G_\kappa(\gamma_2) < x | \kappa = k\} \mathbf{P}\{\kappa = k\}.$$

Występujące tutaj prawdopodobieństwo warunkowe jest

$$\mathbf{P}\{G_\kappa(\gamma_2) < x | \kappa = k\} = \mathbf{P}\{G_k(\gamma_2) < x\} = \mathbf{P}\{\gamma_2 < F_k(x)\} = F_k(x).$$

W konsekwencji dostajemy

$$\mathbf{P}\{G_{\kappa}(\gamma_2) < x\} = \sum_{k=1}^m F_k(x)c_k = F(x).$$

Jeśli istnieją odpowiadające gęstości to zamiast superpozycji (49) można rozpatrywać superpozycję gęstości:

$$p(x) = \sum_{k=1}^m c_k p_k(x).$$

Przykład 15.

W procesie rozpraszania fotonu na zimnym elektronie cosinus kąta rozpraszania $\mu = \cos \theta$ jest zmienną losową o gęstości

$$p(x) = \frac{3}{8} (1 + x^2), \quad -1 < x < 1.$$

Jest to tzw. prawo Rayleigh'a.³⁵

Jeśli zastosujemy metodę funkcji odwrotnych, to otrzymamy równanie sześciennne

$$\frac{1}{8} (\mu^3 + 3\mu + 4) = \gamma.$$

Skorzystamy z metody superpozycji kładąc $p(x) = 0,75p_1(x) + 0,25p_2(x)$, gdzie $p_1(x) = 0,5$ jest gęstością stałą, a $p_2(x) = 1,5x^2$. Odpowiadające tym gęstościom funkcje rozkładu są bardzo proste

$$F_1(x) = (x + 1)/2, \quad F_2(x) = (x^3 + 1)/2.$$

Funkcje odwrotne pozwalają zapisać następującą, końcową formułę modelowania

$$\mu = \begin{cases} 2\gamma_2 - 1, & \text{jeśli } \gamma_1 < 0,75, \\ \sqrt[3]{2\gamma_2 - 1}, & \text{jeśli } \gamma_1 > 0,75. \end{cases}$$

³⁵John William Strutt, 3. baron Rayleigh, Lord Rayleigh (ur. 12 listopada 1842 w Langford

Przykład 16.

Rozpatrzmy dyskretną zmienną losową

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Założymy, że wszystkie prawdopodobieństwa w (50) są postaci $p_i = m_i 2^{-s}$, gdzie m_i są liczbami całkowitymi, ($1 \leq m_i \leq 2^s - 1$), i wartość s jest wielokrotnie mniejsza niż n . Wówczas, może okazać się rzeczą wygodną przedstawienie ξ w postaci superpozycji nie więcej niż s zmiennych losowych o jednakowo prawdopodobnych wartościach (w p. 4.1 obserwowaliśmy, że takie zmienne łatwo jest modelować).

Wyjaśnimy tę możliwość na konkretnym przykładzie. Niech w (50) $n = 19$ i wszystkie $p_i = m_i/64$. Liczniki m_i przedstawione są w Tablicy 3. Z prawej strony wielkości m_i zapisane są w systemie dwójkowym, a v_k oznacza liczbę jedynek w k -tej kolumnie.

Wynika stąd, że ξ można zapisać w postaci superpozycji trzech zmiennych losowych $\xi^{(k)}$, $k = 4, 5, 6$: $\xi^{(4)}$ przyjmuje wartości x_1-x_8 z prawdopodobieństwem $1/8$; $\xi^{(5)}$ przyjmuje wartości x_1, x_2, x_9-x_{16} z prawdopodobieństwami $1/10$; $\xi^{(6)}$ przyjmuje wartości $x_3-x_6, x_9-x_{13}, x_{17}-x_{19}$ z prawdopodobieństwami $1/12$.

Współczynniki c_k odpowiadające tym wielkościom, wyliczone według wzoru $c_k = v_k 2^{-k}$, są równe $c_4 = 1/2$, $c_5 = 5/16$, $c_6 = 3/16$.

W celu zapisania ostatecznej reguły wybierania ξ wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, \dots, y_{10}) &= (x_1, x_2, x_9, x_{10}, \dots, x_{16}), \\ (z_1, z_2, \dots, z_{12}) &= (x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, \dots, x_{13}, x_{17}, x_{18}, x_{19}). \end{aligned}$$

Otrzymamy formułę

$$\xi = \begin{cases} x_i, & i = 1 + [8\gamma_2], & \gamma_1 < 1/2, \\ y_i, & i = 1 + [10\gamma_2], & 1/2 < \gamma_1 < 13/16, \\ z_i, & i = 1 + [12\gamma_2], & 13/16 < \gamma_1. \end{cases}$$

Grove, zm. 30 czerwca 1919 w Witham) – brytyjski fizyk, profesor Uniwersytetu w Cambridge (1879-1887) i Uniwersytetu w Londynie (od roku 1887), laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w roku 1904 „za badania nad gęstością najważniejszych gazów i odkrycie argonu”. [przypis tłumacza]

Jeśli do tego przykładu zastosujemy metodę modelowania z p. 4.1, to okaże się, że trzeba wielokrotnie porównywać γ z $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3$, itd.

Tablica 3: Liczniki m_i . Po prawej stronie m_i zapisane są w systemie dwójkowym. Wielkości v_k oznaczają liczbę jedynek w k -tej kolumnie

i	m	k					
		1	2	3	4	5	6
1	6				1	1	0
2	6				1	1	0
3	5				1	0	1
4	5				1	0	1
5	5				1	0	1
6	5				1	0	1
7	4				1	0	0
8	4				1	0	0
9	3					1	1
10	3					1	1
11	3					1	1
12	3					1	1
13	3					1	1
14	2					1	0
15	2					1	0
16	2					1	0
17	1						1
18	1						1
19	1						1
v_k					8	10	12

Modelowanie normalnej zmiennej losowej Niech ξ będzie normalną zmienną losową o parametrach $a = 0, \sigma = 1$. Niech η będzie taką samą zmienną losową niezależną od ξ . Gęstość punktu losowego o współrzęd-

nych kartezjańskich (ξ, η) na płaszczyźnie (x, y) równa się wówczas iloczynowi gęstości ξ i η :

$$p(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Przejdźmy do współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie: $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$. Niech ρ, θ będą losowymi współrzędnymi biegunowymi punktu (ξ, η) :

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta.$$

Wspólna gęstość ρ, θ jest

$$\tilde{p}(r, \phi) = p(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} \right| = \frac{r}{2\pi} e^{-r^2/2}.$$

Gęstości ρ, θ wylicza się w prosty sposób

$$p_1(r) = \int_0^{2\pi} \tilde{p}(r, \phi) d\phi = r e^{-r^2/2},$$

$$p_2(\phi) = \int_0^{\infty} \tilde{p}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi}.$$

Ponieważ $\tilde{p}(r, \phi) = p_1(r)p_2(\phi)$, to ρ i θ są niezależne i łatwo je modelować według ich dystrybuant. Funkcje te są w miarę proste:

$$F_1(r) = 1 - e^{-r^2/2}, \quad F_2(\phi) = \phi/(2\pi),$$

gdzie $0 < r < \infty, 0 < \phi < 2\pi$. Z równań $F_1(\rho) = 1 - \gamma_1, F_2(\theta) = \gamma_2$ otrzymamy formuły modelowania:

$$\rho = \sqrt{-2 \ln \gamma_1}, \quad \phi = 2\pi \gamma_2.$$

Końcowe formuły

$$\xi = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \cos(2\pi \gamma_2), \quad \eta = \sqrt{-2 \ln \gamma_1} \sin(2\pi \gamma_2),$$

pozwalają na podstawie dwóch liczb γ_1 i γ_2 , wyliczyć dwie niezależne wartości normalnej zmiennej losowej o parametrach $a = 0, \sigma = 1$. Każda z tych formuł ma jednakże postać $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2)$.

11.3. Przekształcenie postaci $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

Przykład 17.

Zmienną losową ξ , której dystrybuanta $F(x) = x^n$ dla $0 < x < 1$, można wyznaczyć według reguły

$$\xi = \max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (51)$$

gdzie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ są liczbami losowymi.

W samej rzeczy, oczywiste jest, że

$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{\max_{1 \leq i \leq n} \gamma_i < x\} = \mathbf{P}\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\},$$

i ponieważ $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ są niezależne, to

$$\mathbf{P}\{\gamma_1 < x, \dots, \gamma_n < x\} = \mathbf{P}\{\gamma_1 < x\} \dots \mathbf{P}\{\gamma_n < x\} = x^n$$

Jeśli będziemy modelować ξ metodą funkcji odwrotnych (44), to z równania $\xi^n = \gamma$ otrzymamy, że

$$\xi = \sqrt[n]{\gamma}. \quad (52)$$

Porównując (51) z (52) dochodzimy do następującego wniosku: *zamiast wyciągać n -ty pierwiastek z liczby losowej można znajdować największą spośród n liczb losowych.*

Przykład 18.

W p. 5.2 rozpatrzono prosty strumień zgłoszeń, w przypadku, którego przedział czasu τ między dwoma kolejnymi zawiadomieniami jest wykładniczą zmienną losową. W bardziej złożonych strumieniach, nazywanych *strumieniami Erlanga*,³⁶ przedział τ jest zmienną losową o gęstości

$$p(x) = \frac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-ax}, \quad (53)$$

w której $0 \leq x \leq \infty$. Ponieważ funkcja

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)!$$

nazywa się funkcją *gamma*, to również gęstość (53) nazywana jest *rozkładem gamma*. Okazuje się, że zmienną (53) można modelować według wzoru

$$\xi = -(1/a) \ln(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n).$$

Nie będziemy go dowodzić. Zauważymy tylko, że formuła (27) jest szczególnym przypadkiem ostatniego wzoru dla $n = 1$.

Wykorzystanie statystyk porządkowych Wylosujmy liczby $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ i uporządkujmy je w kolejności rosnącej:

$$\gamma_{(1)} \leq \gamma_{(2)} \leq \dots \leq \gamma_{(s)} \leq \dots \leq \gamma_{(n)}.$$

Zmienna $\gamma_{(s)}$ nazywana jest *s-tą porządkową statystyką rozkładu równomiernego*. Jest oczywiste, że $\gamma_{(s)}$ zależy od wszystkich $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Gęstość rozkładu $\gamma_{(s)}$ jest znana:³⁷ i dla $0 < x < 1$ jest dana przez

³⁶ Agner Krarup Erlang, ur. 1 stycznia 1878, zm. 3 lutego 1929 - matematyk duński. Był pionierem w dziedzinie teorii ruchu telekomunikacyjnego i teorii kolejek. Jego modele są wciąż wykorzystywane w analizie ruchu w sieciach telefonicznych. [przypis tłumacza]

³⁷ Schemat dowodu. Wybierzmy dowolny przedział $(x, x + \Delta x)$. Z każdą wartością γ zwiążemy trzy losowe zdarzenia

$$A_1 = \{\gamma < x\}, \quad A_2 = \{x \leq \gamma < x + \Delta x\}, \quad A_3 = \{x + \Delta x \leq \gamma\}.$$

Prawdopodobieństwa tych zdarzeń są równe $p_1 = x$, $p_2 = \Delta x$, $p_3 = 1 - x - \Delta x$.

Rozważmy n niezależnych wartości $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Zdarzenie i wystąpi v_i razy, $v_1 + v_2 + v_3 = n$. Jeśli $m_1 + m_2 + m_3 = n$ i dla wszystkich i $0 \leq m_i \leq n$, to zgodnie z prawem wielomianowym

$$\mathbf{P}\{v_1 = m_1, v_2 = m_2, v_3 = m_3\} = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3}.$$

Nie jest trudno zrozumieć, że

$$\mathbf{P}\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\} = \mathbf{P}\{v_1 = s - 1, v_2 = 1, v_3 = n - s\} + O((\Delta x)^2).$$

$$p(x) = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}. \quad (54)$$

Oznacza to, że różne zmienne losowe o takich gęstościach można modelować za pomocą statystyk porządkowych.

Niech będą zadane liczby naturalne s i t . Połóżmy $n = s + t - 1$. Gęstość (54) przejdzie w tzw. *rozkład beta*:

$$p(x) = \frac{x^{s-1}(1-x)^{t-1}}{B(s, t)}, \quad 0 < x < 1, \quad (55)$$

gdzie $B(s, t)$ jest *funkcją beta*

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} = (s-1)!(t-1)!/(s+t-1)!.$$

W celu modelowania zmiennej losowej ξ o rozkładzie beta należy wziąć liczby losowe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s+t-1}$ i spośród nich wybrać $\gamma_{(s)}$. Zauważmy, że nadrzedną statystyką porządkową $\gamma_{(n)}$ jest $\max(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – rozpatrywana wcześniej zmienna losowa.

Sposoby modelowania rozkładów beta i gamma o parametrach ułamkowych rozpatrywane są w [8, Jermakow, Mikhaylov].

11.4. Przekształcenia postaci $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots)$ Do tej klasy należą przekształcenia, w których liczba zmiennych losowych używanych przy obliczaniu jednej wartości ξ jest losowa i dowolnie duża. Średnia liczba zmiennych losowych potrzebnych do wyliczenia pojedynczego ξ musi być

Dzieląc przez Δx i przechodząc do granicy $\Delta x \rightarrow 0$ otrzymamy poszukiwaną gęstość

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{x \leq \gamma_{(s)} < x + \Delta x\}}{\Delta x} = n C_{n-1}^{s-1} x^{s-1} (1-x)^{n-s}. \quad (54)$$

oczywiście skończona. Wśród przekształceń tego typu najczęstsze są *metody akceptacji*. Należy do nich przykładowo, metoda Neumanna opisana w p. 4.3.

Podstawowa właściwość metody akceptacji: oprócz formuły modelowania zadany jest warunek akceptacji; na przykład, $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)$ i dodatkowy warunek $h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0$. W celu wybrania ξ tą metodą, należy wziąć liczby losowe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ i jeśli spełniony jest warunek akceptacji wyznaczyć ξ . W przeciwnym wypadku odrzuca się te liczby i wybiera nowe.

Prawdopodobieństwo, że grupa liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ nie zostanie odrzucona, równe

$$\epsilon = \mathbf{P}\{h(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) > 0\} ,$$

nazywa się efektywnością metody akceptacji. To bardzo ważna charakterystyka metody. Przy wyborze N grup liczb $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ otrzymuje się średnio ϵN wartości ξ . Oznacza to, że aby otrzymać ϵN losowych wartości ξ zużywa się Nm liczb losowych. Na jedną wybraną wartość ξ zużywa się natomiast średnio m/ϵ liczb losowych. Metoda ta staje się więc nieefektywna dla $\epsilon \rightarrow 0$.

Uogólniona metoda Neumanna Załóżmy, że gęstość $p(x)$ zmiennej losowej ξ określonej w przedziale $a < x < b$ da się zapisać w postaci

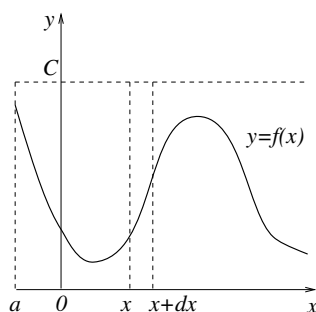
$$p(x) = p_1(x)f(x) ,$$

gdzie $p_1(x)$ jest gęstością pomocniczej zmiennej losowej η' , którą potrafimy modelować, a czynnik $f(x)$ jest ograniczony: $f(x) \leq C$. Przedział (a, b) nie musi być skończony.

Zmienną ξ można generować następująco:

1. wybieramy wartość η' oraz losową liczbę γ niezależną od η' i wyliczamy $\eta'' = C\gamma$.
2. Jeśli $\eta'' < f(\eta')$ to kładziemy $\xi = \eta'$, w przeciwnym wypadku odrzucaamy η', γ i wybieramy nową parę wartości η', γ .

Dowód. Prawdopodobieństwo, że punkt (η', η'') znajdzie się w pasie $(x, x + dx)$, (Rys. 35), jest równe $p_1(x)dx$. Ponieważ η'' ma w przedziale $0 < y < C$ rozkład równomierny, to prawdopodobieństwo warunkowe, że punkt ten nie zostanie odrzucony jest równe $f(x)/C$, a więc jest proporcjonalne do $f(x)$. W konsekwencji, prawdopodobieństwo znalezienia się wartości $\xi = \eta'$ w przedziale $(x, x + dx)$ jest proporcjonalne do iloczynu $p_1(x)dx \times f(x) = p(x)dx$.



Rysunek 35

Prawdopodobieństwo akceptacji można obliczyć drogą sumowania warunkowych prawdopodobieństw akceptacji $f(x)/C$, a mianowicie

$$\epsilon = \int_a^b \frac{f(x)}{C} p_1(x) dx = \frac{1}{C} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{C}.$$

Metoda Neumanna (p. 4.3) jest szczególnym przypadkiem metody uogólnionej, w której wybrano $p_1(x) = 1/(b-a)$ oraz $f(x) = (b-a)p(x)$. Ponieważ $p(x) \leq M_0$ to $f(x) \leq (b-a)M_0$. Efektywność metody Neumanna jest więc $\epsilon = 1/(b-a)M_0$.

Wynik ten można łatwo otrzymać bezpośrednio z Rys. 14 jeśli wyobrazimy, że punkt Γ ma równomierny rozkład w prostokącie $a < x < b$, $0 < y < M_0$. Efektywność losowania jest wtedy równa stosunkowi pola pod krzywą $y = p(x)$ do pola całego prostokąta

$$\epsilon = \frac{1}{(b-a)M_0} \int_a^b p(x) dx = \frac{1}{(b-a)M_0}.$$

Przykład 19.

Rozpatrzmy gęstość $p(x) = v(x)x^{-1/3}$ dla $0 < x < 1$, gdzie funkcja $v(x)$ jest ograniczona $v(x) \leq A$. Jako gęstość pomocniczą wybierzmy $p_1(x) = (2/3)x^{-1/3}$, którą łatwo jest modelować metodą funkcji odwrotnych: $\eta' = \gamma^{3/2}$. Wówczas $f(x) = p(x)/p_1(x) = (3/2)v(x) \leq (3/2)A$. Warunek akceptacji $\eta' \leq f(\eta')$ można nieco uprościć dzieląc przez $3/2$. Dostajemy następującą metodę losowania ξ z gęstością $p(x)$.

1. Wybiera się γ_1, γ_2 i następnie oblicza się $\eta' = (\gamma_1)^{3/2}$.
2. Jeżeli $A\gamma_2 < v(\eta')$ to należy położyć $\xi = \eta'$, w przeciwnym wypadku wybiera się nowe γ_1, γ_2 .

§12. O algorytmach Monte Carlo

12.1. Złożoność algorytmu Monte Carlo Załóżmy, że w celu wyznaczenia pewnej wielkości m wymyśliliśmy zmienną losową ξ taką, że $\mathbf{M}\xi = m$ i dyspersja $\mathbf{D}\xi$ jest skończona. Biorąc N niezależnych wartości $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ tej zmiennej można zapisać

$$m \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j. \quad (56)$$

To oszacowanie nazywane jest często metodą Monte Carlo wyznaczania m . W p. 2.5 widzieliśmy, że dokładność takiej oceny zależy od dyspersji $\mathbf{D}\xi$. Formuła (56) nie definiuje jednak algorytmu obliczeń ponieważ zmienna losowa ξ może być modelowana na różne sposoby.

Wybierzmy konkretną metodę losowania

$$\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots). \quad (57)$$

Wzory (56) i (57), łącznie, wyznaczają *algorytm Monte Carlo* obliczania m .

Oznaczmy przez t czas potrzebny na wyznaczenie jednej wartości ξ według wzoru (57). Za jednostkę t można przyjąć zarówno mikrosekundę jak i liczbę operacji elementarnych użytych w procesie obliczania. Całkowity czas obliczeń szacunkowej wartości (56) wynosi $T = Nt$.

Przekształćmy przybliżone wyrażenie dla prawdopodobnego błędu w (56)

$$r_N = 0,6745\sqrt{\mathbf{D}\xi/N}.$$

Wstawiając zamiast N wielkość T/t mamy

$$r_n = 0,6745\sqrt{t\mathbf{D}\xi/T}. \quad (58)$$

Ostatni wzór pokazuje, że jeśli całkowity czas obliczeń T jest ustalony, to prawdopodobny błąd zależy od iloczynu $t\mathbf{D}\xi$. Iloczyn ten nazywa się *złożonością* algorytmu Monte Carlo (56), (57). Im mniejsza jest złożoność tym algorytm jest wygodniejszy ponieważ wynik otrzymany w czasie T jest obarczony mniejszym błędem prawdopodobnym (58).

Zazwyczaj, wartość $\mathbf{D}\xi$ jak i wartość t oceniane są empirycznie, na podstawie stosunkowo niewielkiej liczby prób. Często udaje się jednak dokonać tych ocen również teoretycznie.

12.2. Przykład z rozszczepieniem Zastanówmy się nad problemem obliczenia wartości średniej $\mathbf{M}\theta$ zmiennej losowej $\theta = f(\xi, \eta)$. Założymy, że znamy reguły generowania zmiennej ξ i η . Dyspersja $\mathbf{D}\theta$ jest skończona. Wartość m możemy oczywiście oszacować, wykorzystując średnią arytmetyczną

$$m \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta_j, \quad (59)$$

gdzie $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ są niezależnymi wartościami θ .

Oznaczmy przez t_ξ i t_η czasy obliczeń jednej wartości ξ i η , a t_f niech oznacza czas wyliczania wartości $f(\xi, \eta)$. Złożoność algorytmu (59) jest równa $t \mathbf{D} \theta$, gdzie $t = t_\xi + t_\eta + t_f$.

Załóżymy teraz, że w postawionym problemie obliczenia ξ są dużo bardziej skomplikowane niż obliczenia η i f , i czas $t_\xi \gg t_\eta + t_f$. Może się okazać, że w tym przypadku zamiast θ wygodniej jest używać uśrednionej zmiennej losowej

$$\theta^{(s)} = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s f(\xi, \eta_k), \quad (60)$$

która zależy od jednego ξ oraz s niezależnych wartości η .

Łatwo policzyć dyspersję zmiennej $\theta^{(s)}$

$$\mathbf{D} \theta^{(s)} = \mathbf{D} \theta (1 - r + rs)/s,$$

gdzie $0 \leq r \leq 1$ jest stałą.³⁸ Czas obliczeń pojedynczej wartości $\theta^{(s)}$ jest $t^{(s)} = t_\xi + s(t_\eta + t_f)$ (zaniedbujemy czas trwania operacji składania). Złożoność algorytmu

$$m \approx \frac{1}{Ns} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^s f(\xi_j, \eta_{jk}) \quad (61)$$

jest równa

$$t^{(s)} \mathbf{D} \theta^{(s)} = \mathbf{D} \theta (1 - r + sr)(t_\eta + t_f + t_\xi/s).$$

³⁸Tutaj r jest współczynnikiem korelacji zmiennych losowych $f(\xi, \eta')$, $f(\xi, \eta'')$, a η' , η'' są niezależnymi wartościami η . Wykorzystano tu znany związek dla dyspersji sumy zmiennych losowych

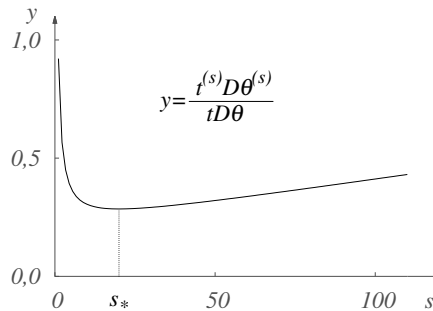
$$\mathbf{D} \sum_{k=1}^s f_k = \sum_{k=1}^s \mathbf{D} f_k + 2 \sum_{1 \leq k < j \leq s} r(f_k, f_j) \sqrt{\mathbf{D} f_k \mathbf{D} f_j}.$$

Ostatnia wielkość dla $0 < s < \infty$ posiada jedyne minimum w punkcie $s = s_*$, gdzie

$$s_* = \sqrt{(1/r - 1)t_\xi / (t_\eta + t_f)}.$$

Przykład 20.

Niech $t_\xi = 100(t_\eta + t_f)$ i $r = 0,2$. Wtedy $s_* = 20$. Złożoność algorytmu (61) w przypadku optymalnego $s = s_*$ jest 3,5 raza mniejsza niż złożoność algorytmu (59) (Rys. 36).



Rysunek 36

Przedstawiona zamiana zmiennej losowej θ wielkością $\theta^{(s)}$ jest częstym przypadkiem sposobu znanego jako *rozszczenie trajektorii*. W naszym przykładzie trajektoria składa się z jednego ogniwa: przejścia od ξ do η .

12.3. Wymiar konstrukcyjny algorytmu Monte Carlo Rozpatrzmy dowolny algorytm postaci (56), (57) stosowany do obliczania pewnej wielkości $m = \mathbf{M}\xi$. Jeśli funkcja (57) zależy tylko od n zmiennych: $\xi = g(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, to mówimy, że *wymiar konstrukcyjny (w.k.)* algorytmu (56), (57) jest równy n . W skrócie zapiszemy, że *w.k.* = n .

Inaczej mówiąc, *w.k.* równa się ilości liczb losowych zużytych do wyznaczenia pojedynczej wartości ξ . Lepiej nawet powiedzieć, „maksymalnej

ilości”, gdyż liczba ta nie musi być stała we wszystkich eksperymentach. Za przykład może służyć problem przechodzenia neutronów przez płytkę (p. 7.2). W tym przypadku trajektoria może składać się z różnej liczby odcinków; jednocześnie, do obliczeń η zużywana jest różna ilość liczb losowych. Ogólnie można więc powiedzieć, że liczba odcinków może być dowolnie duża i algorytm ten ma $w.k. = \infty$. Jeśli jednak z góry ograniczymy liczbę modelowych rozprożeń neutronu, to $w.k.$ będzie skończony.

Jeśli w procesie modelowania dowolnej pośredniej zmiennej losowej ξ' (w algorytmie (56), (57)) wykorzystana się formułę $\xi' = g'(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s)$, to $w.k.$ będzie rosła wraz z s . W ten sposób, z punktu widzenia zmniejszenia $w.k.$ najwygodniejsza jest metoda funkcji odwrotnych, w której $s = 1$. Jeśli natomiast w modelowaniu ξ' wykorzystywana jest metoda akceptacji, to $w.k. = \infty$.

Wszystkie metody Monte Carlo z $w.k. = n$ mają tę samą interpretację. Rozpatrzmy mianowicie n -wymiarowy punkt Γ o współrzędnych kartezjańskich $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$. Jego rozkład w kostce jednostkowej $\{0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1\}$ jest równomierny gdyż jego gęstość w tej kostce wynosi

$$p_{\Gamma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\gamma_1}(x_1)p_{\gamma_2}(x_2) \dots p_{\gamma_n}(x_n) = 1.$$

Zamiast (57) można napisać, że $\xi = g(\Gamma)$.

Dalej, wyliczana wielkość m jest równa

$$m = \mathbf{M} g(\Gamma) = \int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx$$

(wykorzystano wielowymiarowy odpowiednik formuły (18)). W konsekwencji, zamiast (56) można zapisać, że

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(\Gamma_j). \quad (62)$$

Wzór (62) pokazuje, że nasz algorytm jest niczym innym jak przybliżonym sposobem obliczania całki po n -wymiarowej kostce jednostkowej

metodą uśredniania wartości funkcji podcałkowej w niezależnych punktach losowych $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

12.4. O wykorzystaniu punktów nielosowych w algorytmach Monte Carlo W matematyce znane są ciągi n -wymiarowych nielosowych punktów $Q_1, Q_2, \dots, Q_s, \dots$, dla których zachodzi wzór analogiczny do wzoru (62): dla każdej ograniczonej funkcji całkownej $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zachodzi równość

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N g(Q_j). \quad (63)$$

Takie ciągi punktów noszą nazwę *ciągów rozłożonych równomiernie* w n -wymiarowej kostce jednostkowej w sensie teorioliczbowym.

Oczywiście, nie każdy ciąg równomiernie rozłożonych punktów nadaje się do obliczeń praktycznych. Chcemy aby szybkość z jaką zbiega się wyrażenie we wzorze (63) była optymalna; by równomierność rozkładu punktów Q_1, Q_2, \dots, Q_N , w kostce zachodziła nie tylko dla $N \rightarrow \infty$, lecz poczynając od niewielkich N ; by punkty Q_j dały się wyliczyć w miarę łatwo. Wszystkie te żądania spełniają ciągi LP_τ .³⁹ Porównanie wzorów (62) i (63) pokazuje, że przy obliczaniu j -tej wartości $\xi = g(\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{nj})$ można zamiast liczb losowych $\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{nj}$ wykorzystać współrzędne kartezjańskie $q_{1j}, q_{2j}, \dots, q_{nj}$ punktu Q_j : zbieżność średnich gwarantuje formuła (63). Szczególnie ważne jest to, że dla pewnych funkcji $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zbieżność przybliżenia (63) maleje jak $1/N$, natomiast dla przybliżenia (62) jest zawsze rzędu $1/\sqrt{N}$. W taki sposób, bez zmiany algorytmu (56), (57), a wykorzystując tylko współrzędne punktów Q_j , można w pewnych problemach znacznie zwiększyć dokładność obliczeń.

³⁹Najważniejsze własności oraz programy do obliczeń ciągów LP_τ zawarte są w książce [9, Sobol, I.M., Statnikov, R.B.]

Przykład 21.

Matematyczna wartość oczekiwana zmiennej losowej

$$\xi = (1 + 2\gamma_1)(2 + 2\gamma_2) \dots (9 + 2\gamma_9)/10!,$$

równa $\mathbf{M}\xi = 1$, została oszacowana na podstawie (56). Przy wykorzystaniu zwykłych liczb pseudolosowych popełniony prawdopodobny błąd wynosi $r_N = 0,30/\sqrt{N}$. Kiedy w obliczeniach użyto punktów 9-cio wymiarowego ciągu LP_τ to okazało się, że zbieżności, przy $N = 2^5, 2^6, \dots, 2^{20}$ były równe $2,0/N$.

Punkty te nazywa się czasami quasilosowymi. Jeśli sprawdzimy ich rozkład w n -wymiarowej kostce jednostkowej zgodnie z odpowiednim testem statystycznym (porównaj p. 3.1), to okaże się, że ich rozkłady są zbyt równomierne. Nie posiadają one oczywiście, całego szeregu innych cech właściwych prawdziwym punktom losowym.

Tablica 4: Liczby losowe

A. 400 cyfr losowych *

86515	90795	66155	66434	56558	12332	94377	57802
68186	03393	42502	99224	88955	53758	91641	18867
41686	42163	85181	38967	33181	72664	53807	00607
86522	47171	88059	89342	67248	09082	12311	90316
72587	93000	89688	78416	27589	99528	14480	50961
52452	42499	33346	83935	79130	90410	45420	77757
76773	97526	27256	66447	25731	37525	16287	66181
04825	82134	80317	75120	45904	75601	70492	10274
87113	84778	45863	24520	19976	04925	07824	76044
84754	57616	38132	64294	15218	49286	89571	42903

B. 88 liczb normalnych **

0,2005	1,1922	-0,0077	0,0348	1,0423	-1,8149	1,1803	0,0033
1,1609	-0,6690	-1,5893	0,5816	1,8818	0,7390	-0,2736	1,0828
0,5864	-0,9245	0,0904	1,5068	-1,1147	0,2776	0,1012	-1,3566
0,1425	-0,2863	1,2809	0,4043	0,6379	-0,4428	-2,3006	-0,6446
0,9516	-1,7708	2,8854	0,4686	1,4664	1,6852	-0,9690	-0,0831
-0,5863	0,8574	-0,5557	0,8115	-0,2676	-1,2496	-1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	-0,1032	0,5405	-0,6022	0,0093	0,2119	-1,4647
-0,4428	-0,5564	-0,5098	-1,1929	-0,0572	-0,5061	-0,1557	-1,2384
-0,3924	1,7981	0,6141	-1,3596	1,4943	-0,4406	-0,2033	-0,1316
0,8319	0,4270	-0,8888	0,4167	-0,8513	1,1054	1,2237	-0,7003
0,9780	-0,7679	0,8960	0,5154	-0,7165	0,8563	-1,1630	1,8800

* Liczby losowe imitują wartości zmiennej losowej o rozkładzie (22).

** Liczby normalne imitują wartości normalnej zmiennej losowej (gaussowskiej) ξ , o parametrach rozkładu $a = 0$, $\sigma = 1$.

Bibliografia

- [1] N. Metropolis and S. Ulam. The Monte Carlo method. *J. Amer. Statistical Assoc.*, 44, No 247:335–341, 1949.
- [2] A million random digits with 100,000 normal deviates. 1955.
- [3] R. Wieczorkowski and R. Zieliński. *Komputerowe generatory liczb losowych*. WNT, Warszawa, 1997.
- [4] I. M. Sobol. *Chyslennye metody Monte-Karlo*. Nauka, Moskwa, 1973.
- [5] L.A. Pozdnyakov, I.M. Sobol, and R.A. Sunyaev. Komptonizacya i formirovanie spektrov rentgenovskych istochnikov. Metodyka raschotov metodom Monte-Karlo. *Itozi Nauki i Techniki WINITI AN SSSR, Ser. Astronomia*, 21, 1981.
- [6] L.A. Pozdnyakov, I.M. Sobol, and R.A. Sunyaev. Comptonization and the shaping of X-ray source spectra: Monte Carlo calculations. *Soviet Scientific Reviews. Sect. E: Astrophys. and Space Phys. Reviews*, 2:189–331, 1983.
- [7] Forsyth G. E., Malcolm M. A., and C. B. Moulter. *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall Inc., Englewood Clifs, New Jersey, 1977.

- [8] S. M. Jermakov and G. A. Mikhaylov. *Kurs statistitscheskovo modelirovaniya*. Nauka, Moskwa, 1976.
- [9] I.M. Sobol and R.B. Statnikow. *Vybor optymalnych parametrov w zadachah z mnogimi kryteryami*. Nauka, Moskwa, 1981.

Skorowidz

A	
akceptacji	
metoda	87
prawdopodobieństwo	88
algorytm Monte Carlo	89, 92
schemat	21
wymiar konstrukcyjny	92
złożoność	90
aperiodyczność	27
astrofizyka	59
B	
beta funkcja	86
błąd pomiaru	19
błąd prawdopodobny	18
C	
całka oznaczona	62
obliczanie	62
przykład	65
całka prawdopodobieństwa	17
całkowita część liczby	31
centralne twierdzenie graniczne .	19, 20,
20	
ciągi LP	94
Compton, A.H.	59
Comptona efekt	59
congruence	71
cyfry losowe	23
czarna dziura	60
czas oczekiwania	44
czas zajętości linii	39
Czebyszow, P. L.	19
część liczby	
całkowita	31
ułamkowa	70
D	
droga swobodna	52
dysk akrecyjny	60
dyspersja zmiennej losowej	
ciągłej	14
dyskretnej	10
dystrybuanta	73
E	
efekt Comptona	59
elektron	59, 80
Erlang, A. K.	85
Erlanga strumień zgłoszeń	84
ES komputer	71
F	
foton	51, 59, 80

- droga swobodna 61
 rozpraszanie 80
 rozpraszanie wielokrotne 60
 funkcja
 beta 86
 gamma 85
 odwrotna 73, 74
 rozkładu *v.* dystrybuanta
- G**
- galaktyczne jądro 60
 galaktyka Seyferta 61
 gamma funkcja Γ 85
 generator
 komputerowy 22
 liczb losowych 22, 25
 gwiazda neutronowa 60
- H**
- histogram 49, 61
- I**
- istotny wybór 63
- K**
- kierunek losowy w przestrzeni 77
 komptonizacja 59, 60
 komputer serii ES 71
 kondensator 45
 kongruencja 71
 kwadratura 65
- L**
- lampa 45
 Laplace, P. 19
 Lapunov, A.M. 19
 Lehmer, D. H. 71
 liczby losowe 23
 generatory 25
 testy 23
 liczby pseudolosowe 26, 27, 69
 okres 27
- M**
- Markow A. A. 19
 maszyna cyfrowa ES 71
 Maxwell, J. C. 61
 metoda
 akceptacji 87
 funkcji odwrotnych 74
 kongruencji 71
 Lehmera 71
 Monte Carlo 1, 3, 21
 dwie właściwości 3
 istotny wybór 63
 obliczenia z wagami 55
 pochodzenie 1
 podstawowy związek 21
 schemat 21
 w astrofizyce 59
 Neumanna 87
 efektywność 88
 uogólniona 87
 porównań 71
 prób statystycznych *v.* metoda
 Monte Carlo
 residuów 71
 superpozycji 79
 środka kwadratów 26, 69
 metoda Monte Carlo 21
 metody
 generowania liczb losowych 22
 mezon 51
 modelowanie zmiennej losowej 72
 beta 86
 dyskretnej 29
 gamma 85
 gaussowskiej 35
 jednorodnej 33
 metody 72
 normalnej 35, 83
 typu mieszanego 76
 wykładniczej 41

N	
Neumann, von J.	1
Neumanna	
metoda	33
metoda uogólniona	87
neutron.	51
droga swobodna	52
pochłanianie	54
rozpraszanie	51
NGC 4151	61
nielosowe punkty	94
niezależne zmienne losowe	11
niezawodność urządzeń	47
O	
obłok plazmy	59
obwód elektryczny	45
odwrotna funkcja	73
opornik	45
P	
Planck, M.	61
plazma	59
poćisk artyleryjski	20
Poisson, D.S.	40
prawdopodobieństwo akceptacji	88
prawo	
Rayleigh'a	80
trzech sigm	18
wielomianowe	85
problem astrofizyczny	59
przedział aperiodyczności	27
przekrój czynny	52
przyrząd elektryczny	45
punkty	
nielosowe	94
quasilosowe	95
Q	
quasilosowe punkty	95
R	
Rayleigh, Lord	81
Rayleigh'a prawo	80
reakcja łańcuchowa	59
residuum	71
reszta z dzielenia	71
rozbłyski promieniowania	59
gamma	59
X	59
rozkład	
beta	86
gamma	85
gaussowski	16
gęstość	12
jednorodny	16
w $(0, 1)$	16
w (a, b)	33
Maxwella	61
mieszany	76
normalny	16
Plancka	61
równomierny <i>v</i> . rozkład, jednorodny	
tablica	8
wykładniczy	40
rozszczerpienie	92
rozszczerpienie jądra	59
równość modulo	71
ruletka	2, 23, 25, 28
rzut	
kostką do gry	31
monetą	12
S	
sprawdzanie jakości	45
schemat obliczeń	47
statystyki porządkowe	85
strumień zgłoszeń	39
Erlanga	84
Poissona	40
prosty	40
superpozycja	79
systemy	
obsługi masowej	39
z oczekiwaniem	43

szacowanie niezawodności 47

Ś

średni błąd kwadratowy 19

średnia wartość .. *v.* wartość oczekiwana

środek ciężkości 9, 14

T

tablica

liczb losowych 22

rozkładu prawdopodobieństwa .. 8

testy liczb losowych 23

twierdzenie graniczne 19, 20

U

Ulam, S. 1

ułamkowa część liczby 70

W

wariancja *v.* dyspersja

wartość oczekiwana 9

ciągłej zmiennej losowej 14

dyskretnej zmiennej losowej 9

matematyczna 95

wartość średnia .. *v.* wartość oczekiwana

warunek

akceptacji 87

wychwytu neutronu 54

wielkość losowa *v.* zmienna losowa

współczynnik korelacji 91

współrzędne

biegunowe 83

kartezjańskie 70, 83

sferyczne 77

wymiar konstrukcyjny

algorytmu Monte Carlo 92

Z

zjawisko Comptona 59

zmienna losowa 7

beta 86

modelowanie 86

ciągła 12

dyspersja 14

wartość oczekiwana 14

dyskretna 8

modelowanie 29

gamma 85

modelowanie 85

gaussowska 16

modelowanie 35

jednorodna 16

modelowanie 33

w (0, 1) 16

w (a, b) 33

normalna 16

modelowanie 35

typ mieszany 76

współczynnik korelacji 91

wykładnicza 40

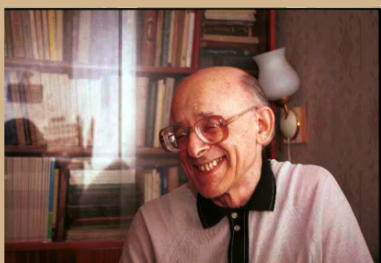
modelowanie 41

Ź

źródło zwarte promieniowania 59

Notatki

O autorze



I.M. Sobol, 2016

Profesor Илья Мейерович Соболев (Илья Мейерович Соболев) urodził się w Poniewieżu (Panevėžys) na Litwie. Od 1990 pracuje w Instytucie Matematyki Stosowanej Rosyjskiej Akademii Nauk w Moskwie (Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН). Jego zainteresowania naukowe dotyczą matematyki obliczeniowej (pierwotnie problemów związanych z metodą Monte Carlo), jednorodnych rozkładów ciągów punktów, wielowymiarowych

formuł całkowania, metod quasi Monte Carlo i decyzyjności. Osiągnięcia w dziedzinie astrofizyki, dotyczą symulacji promieniowania rentgenowskiego (X) i promieniowania $gamma$ (γ) ze zwartych obiektów relatywistycznych – badanie transmisji neutronów i fotonów. Najszerzej znaną z jego publikacji jest, przetłumaczona na wiele języków, książka *Metoda Monte Carlo*. Profesor Ilya Sobol jest jednym z najbardziej cytowanych matematyków rosyjskich.