

# Metody wielokrokowe dla RRZ

---

AB

13 czerwca 2017

## Metody przykładowe

---

Rozpatrujemy równanie  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  na sieci  $x_i, i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $x_i - x_{i-1} = h$ . Wiemy, że

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx. \quad (1)$$

Idea Adamsa polega na zastąpieniu  $y'(x)$  pod całką wielomianem  $p_k(x)$  stopnia  $k - 1$ . Współczynniki wielomianu określamy znając rozwiązanie w punktach poprzednio obliczonych. Np. niech  $p_k(x) = Ax + B$ .  $A$  i  $B$  wyznaczymy na podstawie  $(x_n, y_n)$  oraz  $(x_{n-1}, y_{n-1})$ . Ponieważ  $A$  i  $B$  spełniają równania

$$\begin{aligned} Ax_n + B &= f_n \\ Ax_{n-1} + B &= f_{n-1} \end{aligned}$$

więc

$$A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}, \quad B = \frac{f_{n-1}x_n - f_n x_{n-1}}{h} \quad (2)$$

Obliczając całkę (1), otrzymamy

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \frac{A}{2}(x_{n+1}^2 - x_n^2) + B(x_{n+1} - x_n) \quad (3)$$

Po wstawieniu  $A$  i  $B$  z (2) dostaniemy

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2}hf_n - \frac{1}{2}hf_{n-1} \quad (4)$$

Jest to metoda jawna drugiego rzędu Adamsa-Bashfortha (AB).

Biorąc wielomian  $p_4(x)$  oraz rozwiązania w punktach  $(x_n, y_n), \dots, (x_{n-3}, y_{n-3})$  dostaniemy metodę AB 4-go rzędu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (5)$$

Błąd lokalny metody (5) jest proporcjonalny do  $h^5$ .

## Metody Adamsa-Moultona I

Niech  $p(x) = \alpha x + \beta$ . Użyjemy tutaj punktów  $(x_n, y_n)$ ,  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ .  $\alpha$  i  $\beta$  spełniają równania

$$\alpha x_n + \beta = f_n, \quad \alpha x_{n+1} + \beta = f_{n+1}, \quad (6)$$

Mamy

$$\alpha = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}, \quad \beta = \frac{f_n x_{n+1} - f_{n+1} x_n}{h} \quad (7)$$

Wstawiając do całki (1) i upraszczając, dostaniemy niejawną metodę 2-go rzędu Adamsa-Moultona (AM; prawa strona zależy od  $y_{n+1}$ ):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h f_n + \frac{1}{2} h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (8)$$

W podobny sposób dostajemy metody wyższych rzędów. Np. metoda AM 4-go rzędu jest

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (9)$$

Lokalny błąd metody  $\sim h^5$ .

Zamiast zastępować pochodną  $y'(x)$  w całce (1) wielomianem  $p_k(x)$ , zastępujemy wielomianem funkcję  $y(x)$ . Np., biorąc wielomian  $p_1(x) = ax + b$  przechodzący przez punkty  $(x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$  otrzymamy

$$ax_n + b = y_n, \quad ax_{n+1} + b = y_{n+1} \quad (10)$$

Ponieważ  $p_1'(x) = a$  to

$$a = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (11)$$

Odejmując pierwsze równanie (10) od drugiego mamy też

$$a = (y_{n+1} - y_n)/h \quad (12)$$

Porównanie obu wyrażeń dla  $a$  daje niejawną metodę wstecznego różniczkowania 1-go rzędu

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (13)$$

W podobny sposób dostajemy metody wyższych rzędów. Przykładem są metody rzędu drugiego i trzeciego:

$$k = 2 : \quad y_{n+1} = \frac{1}{3}(4y_n - y_{n-1} + 2hf(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

$$k = 3 : \quad y_{n+1} = \frac{1}{25}(48y_n - 36y_{n-1} + 16y_{n-2} - 3y_{n-3} + 12hf(x_{n+1}, y_{n+1}))$$

Lokalne błędy metod 2-go i 3-go rzędu są  $\mathcal{O}(h^3)$  i  $\mathcal{O}(h^5)$  odpowiednio.

### Zadanie

Znaleźć niejawną metodę różniczkowania wstecznego 4-go rzędu.

Ogólniej ...

---



Wielomian interpolacyjny Newtona ma postać

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j e_j(x)$$

gdzie

$$e_0(x) = 1,$$

$$e_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i), \quad j = 1, 2, \dots \quad - \text{wielomiany bazowe.}$$

Z założenia  $p_n(x)$  przechodzi przez zadane punkty  $\{(x_i, f_i = f(x_i))\}$ , czyli  $p_n(x_i) = f(x_i) =: [f_i], \forall i = 0, \dots, n$ . Współczynniki  $\alpha_i$  wyrażają się przez tzw. progresywne różnice dzielone.

$$p_n(x_0) = \alpha_0 = f(x_0) = [f_0]$$

$$p_n(x_1) = \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) = [f_1] \rightarrow \alpha_1 = \frac{[f_1] - [f_0]}{x_1 - x_0} = [f_0 f_1]$$

$$p_n(x_2) = \alpha_0 + \alpha_1(x_2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = [f_2] \rightarrow \alpha_2 = \frac{[f_0 f_2] - [f_0 f_1]}{x_2 - x_1}$$

Po reorganizacji

$$\alpha_2 = \frac{[f_1 f_2] - [f_0 f_1]}{x_2 - x_0} = [f_0 f_1 f_2]$$

Ogólnie

$$\alpha_k = \frac{[f_1 \dots f_k] - [f_0 \dots f_{k-1}]}{x_k - x_0} = [f_0 \dots f_k] \quad (14)$$

Interpolant Newtona jest więc

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n [f_0 \dots f_j] e_j(x)$$

Jeśli punkty  $x_i$  są równoodległe,  $x_{i+1} - x_i = h$ , to (Pokazać metodą indukcji, korzystając z (14))

$$[f_0 \dots f_n] = \frac{\Delta^n f_0}{h^n n!},$$

## Przypomnienie III

gdzie  $\Delta$  jest operatorem progresywnych różnic skończonych, zdefiniowanym jako

$$\Delta f_i := f_{i+1} - f_i, \quad \Delta^k f_i = \Delta(\Delta^{k-1} f_i)$$

Oznacza to, że

$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0, \quad \Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0$$

i ogólnie

$$\Delta^n f_0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i f_i.$$

Mamy więc,

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\Delta^j f_0}{h^j j!} e_j(x)$$

$$p_n(t) = p_n(x_0 + sh) \quad (15)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{\Delta^j f_0}{h^j j!} \prod_{i=0}^{j-1} (x_0 + sh - x_i)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{\Delta^j f_0}{h^j j!} \prod_{i=0}^{j-1} h(s - i)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{\Delta^j f_0}{j!} s(s-1)\dots(s-j+1)$$

$$= \sum_{j=0}^n \binom{s}{j} \Delta^j f_0. \quad (16)$$

## Przypomnienie V

Jeśli węzły są w porządku  $x_k, x_{k-1}, \dots, x_0$ , to wielomian Newtona jest

$$p_k(x) = [f_k] + [f_k f_{k-1}](x - x_k) + \dots + [f_k \dots f_0](x - x_k)(x - x_{k-1}) \dots (x - x_1)$$

Dla równoodległych punktów i dla  $x = x_k + sh$ ,

$x_i = x_k + (k - i)h$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$  dostajemy

$$\begin{aligned} p_k(x) &= [f_k] + [f_k f_{k-1}]sh + \dots + [f_k \dots f_0]s(s+1) \dots (s+k-1) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{-s}{i} i! h^i [f_k \dots f_{k-i}] \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{-s}{i} \nabla^i f_k. \end{aligned}$$

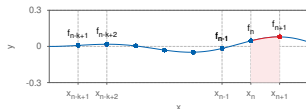
gdzie  $\nabla^j f_k$  oznacza  $j$ -tą różnicę wsteczną  $\nabla^0 f_k = f_k$ ,  $\nabla^{j+1} f_k = \nabla^j f_k - \nabla^j f_{k-1}$ .

### Theorem

$[f_{\sigma(0)} \dots f_{\sigma(n)}] = [f_0 \dots f_n]$  gdzie  $\sigma$  oznacza dowolną permutację zbioru wskaźników  $\{0, 1, \dots, n\}$

## Metody jawne

---



Rozwiązanie równania

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (17)$$

w punkcie  $x_{n+1}$  zapiszemy w postaci

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dt. \quad (18)$$

Jeśli znane są wartości  $y_i$  dla  $i = n - k + 1$  to znane są też wartości  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Poprowadzimy przez punkty  $x_i$  wielomian interpolacyjny Newtona

$$p(t) = p(x_n + sh) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n, \quad (19)$$

Stąd

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dt == y_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n, \quad (20)$$

gdzie

$$\gamma_j = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds$$

**Zadanie**

Obliczyć  $\gamma_j$  dla  $j = 1, 2, 3$ .



**Tablica 1:** Współczynniki  $\gamma$  jawnych metod Adamsa:  $j = 0, \dots, 6$

$j$	0	1	2	3	4	5	6
$\gamma_j$	1	1/2	5/12	3/8	251/720	95/288	19087/60480

Jawne metody Adamsa dla  $k = 1, 2, 3, 4$ .

$$k = 1 : y_{n+1} = y_n + hf_n \quad (21)$$

$$k = 2 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \quad (22)$$

$$k = 3 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \quad (23)$$

$$k = 4 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (24)$$

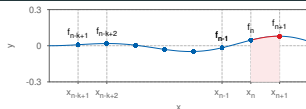
## Zadanie

Podać jawną metodę Adamsa dla  $k=5$ .

## Metody niejawne

---

# Niejawne metody Adamsa I



Włączenie do wielomianu interpolującego punktu  $(x_{n+1}, f_{n+1})$  prowadzi do metod niejawnych (implicit).

Wielomian Newtona ma teraz postać

$$p^*(t) = p^*(x + sh) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s+1}{j} \nabla^j f_{n+1}.$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^k \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1}$$

współczynniki

$$\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s+1}{j} ds$$

są pokazane w Tablicy (2)

**Tablica 2:** Współczynniki  $\gamma$  niejawnych metod Adamsa:  $j = 0, \dots, 6$

$j$	0	1	2	3	4	5	6
$\gamma_j^*$	1	-1/2	-1/12	-1/24	-19/720	-3/160	-863/60480

Pierwsze niejawne metody Adamsa dla  $k = 1, 2, 3, 4$ :

$$k = 1 : y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} \quad (25)$$

$$k = 2 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} - f_n) \quad (26)$$

$$k = 3 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \quad (27)$$

$$k = 4 : y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (28)$$

### Zadanie

Sprawdzić tablicę współczynników  $\gamma_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  niejawnych metod Adamsa.

Jak korzystać z metod niejawnych?

P: Obliczyć tzw. prognostyk (*predictor*)  $\hat{y}_{n+1}$  metodą jawną

E: Obliczyć (*evaluate*) przybliżenie  $\hat{f}_{n+1} = f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})$

C: Zastosować poprawkę (*corrector*)

$$y_{n+1} = y_n + h(\beta_k \hat{f}_{n+1} + \beta_{k-1} f_n + \cdots + \beta_0 f_{n-k+1})$$

E: Wyliczyć nową funkcję  $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ .

Powyższa procedura nosi nazwę PECE. Inne możliwe PECECE lub PEC.

Metod używali: F.R. Moulton (1926), W.E. Milne (1926))

## Równania wyższych rzędów

---

## Równanie drugiego rzędu

Dla specjalnych równań drugiego rzędu

$$y'' = f(x, y) \quad (29)$$

gdzie prawa strona nie zależy od  $y'$ , istnieją również metody wielokrokowe.

Dwukrotne całkowanie równania (29) daje

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + h^2 \int_0^1 (1-s)f(x+sh, y(x+sh)) ds.$$

Dodając ten wynik do podobnego rozwinięcia z krokiem  $-h$  i wstawiając interpolant Newtona (jak w metodach Adamsa), otrzymamy

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j \nabla^j f_n$$

gdzie

$$\sigma_j = (-1)^j \int_0^1 (1-s) \left[ \binom{-s}{j} + \binom{s}{j} \right] ds.$$

### Zadanie

Wyznaczyć kilka pierwszych ( $j = 0, \dots, 6$ ) współczynników  $\sigma$  i wypisać pierwszych kilka metod całkowania  $y'' = f(x, y)$ .



Thank you!

## Uzupełnienie

---

## Uzupełnienie I

Niech  $G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j t^j$ . Wstawimy tu definicję  $\gamma_j$ :

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_j (-t)^j \int_0^1 \binom{-s}{j} ds \\ &= \int_0^1 \sum_j (-t)^j \binom{-s}{j} ds \\ &= \int_0^1 (1-t)^{-s} ds = -t / [(1-t) \log(1-t)] \end{aligned}$$

Czyli

$$-\frac{\log(1-t)}{t} G(t) = \frac{1}{1-t}$$

lub

$$(1 + 1/2t + 1/3t^2 + \dots)(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \dots) = (1 + t + t^2 + \dots)$$

Stąd:

$$\gamma_m + 1/2\gamma_{m-1} + 1/3\gamma_{m-2} + \cdots + 1/(m-1)\gamma_0 = 1.$$

$$m = 0: \quad \gamma_0 = 1$$

$$m = 1: \quad \gamma_1 + 1/2\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$m = 2: \quad \gamma_2 = -1/4 - 1/3 + 1 = 5/12$$

$$m = 3: \quad \gamma_3 = 3/8$$

...

Dla metod niejawnych

$$\gamma_m^* + 1/2\gamma_{m-1}^* + \cdots + 1/(m+1)\gamma_0^* = 0, \gamma_0^* = 1$$

gdzie  $\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{-s+1}{j} ds$ .

## Obliczanie różnic skończonych

Budujemy następującą tablicę

x	$f(x)$				
-	$\Delta^0$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
0	$f_0$				
1	$f_1$	$\Delta^1 f_0$	$\Delta^2 f_0$		
2	$f_2$	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
3	$f_3$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$
4	$f_4$	$\Delta^1 f_3$			

Kolumny, poczynając od drugiej, tworzymy, odejmując od wartości w wierszu następnym wartość z wiersza bieżącego. Np.  $\Delta^1 f_2 = f_3 - f_2$ ,  
 $\Delta^2 f_2 = \Delta^1 f_3 - \Delta^1 f_2$ .

## Przykład interpolacji Newtona.

Przykład:  $f(x) = x^2$ .

x	$x^2$			
-	$\Delta^0$	$\Delta^1$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
0	0			
		1		
1	1		2	
		3		0
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		
4	16			

$$h = 1.$$

$$3.4^2 = 11.56$$

$$3.4^2 = 9 - 7 \frac{-0.4}{1} + 2 \frac{-0.4 \cdot 0.6}{2}$$

$$3.1^2 = 9 - 7 \frac{-0.1}{1} + 2 \frac{-0.1 \cdot 0.9}{2} = 9.61$$

## Definicje

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

$$Ef(x) = f(x+h)$$

- $Ef(x) = f(x+h) = [f(x+h) - f(x)] + f(x) = \Delta f(x) + f(x) = (\Delta + 1)f(x)$   
Stąd  $E = 1 + \Delta$ ,  $\Delta = E - 1$
- $\nabla(Ef(x)) = \nabla(f(x+h)) = f(x+h) - f(x) = \dots = f(x)$
- Ponieważ  $E = 1 + \Delta$ , więc  $(1 - \nabla)(1 + \Delta)f(x) = f(x)$ ,  
 $(1 + \Delta)^{-1} = 1 - \nabla$ ,  $\nabla = 1 - (1 + \Delta)^{-1}$ ,  $(1 - \nabla)^{-1} = 1 + \Delta = E \rightarrow$   
 $1 - \nabla = E^{-1}$
- $\Delta = (1 - \nabla)^{-1} - 1$ ,  $\nabla = 1 - E^{-1}$ .