

# Kondensacja Bosego-Einsteina

W opisie kwantowo-mechanicznym stan konkretnego układu fizycznego jest określony poprzez funkcję falową  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots)$ , gdzie  $\vec{r}_i$  oznaczają położenia poszczególnych cząstek. Ze względu na nierozróżnialność cząstek dla obiektów o spinie całkowitym funkcja falowa ma własność symetryczności na zamianę miejscami dowolnej pary cząstek

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j, \dots) = + \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_i, \dots) \quad (1)$$

Symetryczność funkcji falowej (1) implikuje, że stany kwantowe mogą być zajmowane przez arbitralną liczbę takich cząstek.

W układzie cząstek swobodnych wygodnym oznaczeniem stanów kwantowych jest wektor kwazipędu  $\vec{k}$  zaś postać stanów własnych hamiltonianu ma postać fal płaskich

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2)$$

o dopuszczalnych poziomach energetycznych

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (3)$$

W układzie wielu cząstek pozostających w równowadze termodynamicznej ze sobą prawdopodobieństwo obsadzenia poszczególnych poziomów energetycznych jest określone funkcją rozkładu Bosego-Einsteina

$$f_{BE}(\varepsilon_{\vec{k}}, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\vec{k}} - \mu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (4)$$

Aby określić rozkład cząstek na poszczególnych poziomach należy dopasować położenie potencjału chemicznego  $\mu \equiv \mu(T)$  na podstawie znajomości średniej liczby cząstek w układzie

$$\begin{aligned}
N &= \sum_{\vec{k}} f_{BE}(\varepsilon_{\vec{k}}, T) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3/V} \int d\vec{k} \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\vec{k}} - \mu}{k_B T}\right) - 1} \\
&= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int k^2 dk \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2/2m - \mu}{k_B T}\right) - 1}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Ze względu na wymóg, aby prawdopodobieństwo (4) było nieujemne potencjał chemiczny  $\mu(T)$  nie może znajdować się powyżej najniższego z dostępnych poziomów energetycznych, czyli w tym wypadku  $\varepsilon_{\vec{k}} = 0$ . Sprawdźmy teraz czy istnieje taka temperatura  $T_c$  (nazwijmy ją *krytyczną*), gdy potencjał chemiczny osiąga asymptotycznie wartość  $\mu(T \rightarrow T_c^+) = 0$  implikując nieskończenie wielkie prawdopodobieństwo obsadzenia stanu  $\varepsilon_{\vec{k}} = 0$  ?

W przypadku trójwymiarowych cząstek swobodnych warunek określający  $T_c$  może być wyznaczony w następujący sposób

$$\begin{aligned}
N &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int k^2 dk \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2/2m}{k_B T_c}\right) - 1} \quad \left\{ t \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T_c} \right\} \\
&= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2mk_B T_c}{\hbar^2}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^\infty dt \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}}_{=2,31}. \tag{6}
\end{aligned}$$

Na podstawie (6) temperatura krytyczna zależy od masy  $m$  i koncentracji cząstek  $n \equiv N/V$  poprzez relację

$$T_c = 3,31 \frac{\hbar^2}{2mk_B} n^{2/3}. \tag{7}$$

Powstaje teraz pytanie w jaki sposób wygląda dystrybucja cząstek w temperaturach niższych od  $T_c$  ? Aby zrozumieć tę kwestię powinniśmy uwzględnić, że potencjał chemiczny zachowuje się w następujący sposób

$$\begin{cases} \mu(T) < 0 & \text{dla } T > T_c \\ \mu(T) = 0 & \text{dla } T \leq T_c. \end{cases} \tag{8}$$

Wyznaczając liczbę cząstek  $\tilde{N}$  z zakresu energetycznego  $0 < \varepsilon < \infty$  przy użyciu schematu analogicznego do (6) znajdujemy

$$\tilde{N} = 2,31 \frac{V}{2\pi^2} \left( \frac{2mk_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (9)$$

Na podstawie wyrażen (6,9) względna liczba

$$\frac{\tilde{N}}{N} = \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (10)$$

Pozostała ilość cząstek

$$N_0 \equiv N - \tilde{N} = \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]. \quad (11)$$

ulega "zamrożeniu" na najniższym poziomie energetycznym  $\varepsilon = 0$  (a więc w stanie o pędzie  $\vec{k} = 0$ ), którego prawdopodobieństwo obsadzenia w temperaturach  $T \leq T_c$  jest nieskończenie duże. Tego rodzaju "zamrożone" obiekty nazywane są przez fizyków *kondensatem Bosego-Einsteina*.

### Uwagi historyczne

Koncepcję kondensacji, czyli "zamrożenia" makroskopowej liczby cząstek w jednym stanie kwantowym o najniższej energii, wprowadził w 1925 roku Albert Einstein. Inspiracją były dla niego wyniki hinduskiego fizyka (Satyendra Nath Bose), który w 1924 roku wyprowadził wyrażenie opisujące rozkład energii gazu fotonowego w oparciu o statystykę kwantowo-mechaniczną. A. Einstein był jednak dość sceptycznie nastawiony do możliwości praktycznej realizacji kondensatu.

Kondensacja BE oznacza, że poniżej temperatury  $T_c$  makroskopowa (porównywalna do liczby Avogadro) liczba cząstek  $N_0$  znajduje się w identycznym stanie kwantowym. Kondensat jest więc czymś w rodzaju gigantycznego

superatomu. Można go również traktować jako koherentną (spójną) paczkę fal materii - czyli maser.

Biorąc pod uwagę wzór na temperaturę krytyczną (7) kondensaty atomów jest tym łatwiej uzyskać im lżejsze są atomy. Inną możliwością jest ewentualne zwiększanie ich koncentracji poprzez przyłożenie ciśnienia. W normalnych warunkach atmosferycznych oszacowanie temperatury krytycznej bozonowych atomów  ${}^4\text{He}$  przewiduje  $T_c \sim 3,1$  K. Dopiero kilkanaście lat później niemiecki fizyk F. London skojarzył powyższe oszacowanie temperatury krytycznej (dokonane przez A. Einsteina) z odkrytym w 1937 roku zjawiskiem nadciekłości. Stan nadciekły został doświadczalnie zaobserwowany przy nieco niższej temperaturze  $T_\lambda = 2,17$  K.

Zanim przejdziemy do omówienia właściwości fizycznych nadciekłego helu (patrz następny rozdział) zastanówmy się *czy kondensacja BE realizuje się również w innych wymiarach?* Zjawisko kondensacji BE jest dość subtelnym efektem, który w istotny sposób zależy od takich czynników jak:

- a) wymiarowość układu,
- b) zależność dyspersyjna  $\varepsilon = \varepsilon_{\vec{k}}$ ,
- c) oddziaływanie cząstek,
- d) profil potencjału w układach o ograniczonych rozmiarach przestrzennych, itp.

Stosunkowo łatwo można przeanalizować wpływ wymiarowości układu fizycznego. Na przykład dla cząstek o parabolicznej zależności dyspersyjnej  $\varepsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$  w układach dwuwymiarowych oszacowanie temperatury krytycznej daje

$$\begin{aligned}
N &= \frac{V}{(2\pi)^2} \int d\vec{k} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar^2 k^2/2m}{k_B T_c}\right) - 1} \\
&= \frac{V}{2\pi} \frac{mk_B T_c}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^\infty dt \frac{1}{e^t - 1}}_{=\infty}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Rozbieżność pojawiającej się w (12) całki implikuje, że

$$T_c^{dim=2} = 0. \tag{13}$$

Również w układach jednowymiarowych dla cząstek o parabolicznej zależności dyspersyjnej zjawisko kondensacji BE nie realizuje się.

Omówienie wpływu oddziaływań zostanie przedstawione osobno przy okazji analizy charakteru wzbudzeń jednocząstkowych w nadcieczkach kwantowych. Kondensaty BE atomów w pułapkach przedstawione zostaną również w dalszych rozdziałach w kontekście współczesnych technik wykorzystujących chłodzenie laserowe do pułapu temperatur 100 nK.

### Fenomenologiczna interpretacja kondensatu BE

Fenomenologiczne uzasadnienie zjawiska kondensacji można podać w oparciu o koncepcję de Broglie'a fal materii. Według takiego scenariusza pęd cząstek  $|\vec{p}| \rightarrow h/\lambda$ , zatem średnia energia kinetyczna

$$\frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} \tag{14}$$

z uwzględnieniem zasady ekwipartycji

$$\frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T \tag{15}$$

implikuje długość de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}. \tag{16}$$

W wysokich temperaturach oraz dla dużych mas cząstek długość fali (16) jest znacznie mniejsza niż odległości między cząstkami dlatego można je traktować w przybliżeniu jako biekty punktowe. Przy stopniowym ochładzaniu  $\lambda(T)$  ulega wydłużeniu, aż w pewnej charakterystycznej temperaturze  $T_c$  staje się porównywalna do odległości międzycząsteczkowej  $d$ . Jest to niemal równoważne warunkowi (7) wyrażonemu przez Einsteina. Podstawiając do

$$k_B T_c = 3,31 \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} \quad (17)$$

długość de Broglie'a (16) uzyskujemy

$$\frac{\hbar^2}{3m\lambda^2} = 3,31 \frac{\hbar^2}{(2\pi)^2 m} \left[ \frac{1}{d} \right]^{2/3}. \quad (18)$$

Po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy, że

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{9,93}} d \simeq d. \quad (19)$$

Kondensacja oznacza więc powstanie przekrywających się paczek falowych. Zsynchronizowanie fal de Broglie'a powoduje pojawienie się kolektywnego zachowania cząstek. Powyższy schemat rozumowania jest jedynie poglądowy i należy traktować go z ostrożnością gdyż nie uwzględnia wielu ważnych czynników wpływających na kondensacje BE (np. oddziaływań, wymiarowości itp.)