

Rozpady jąder atomowych
i ich własności w stanach podstawowych

Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Marii Curie Skłodowskiej

Rozprawy habilitacyjne

LXIX

Andrzej Baran

Rozpady jąder atomowych
i ich własności w stanach podstawowych

Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie
Skłodowskiej

Lublin

1996

Recenzent
Stanisław Grzegorz Rohoziński

ISSN 0860-7729
ISBN 83-227-0864-5

W Y D A W N I C T W O
UNIwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej
PL. Marii Curie-Skłodowskiej 5, 20-031 LUBLIN
TEL. , FAX (0-81) 37-52-02, 37-53-04

Spis treści

Spis rysunków	vii
Spis tablic	ix
Rozdział 1. Uwagi wstępne	1
Rozdział 2. Rozpady jąder	5
2.1. Model makroskopowo–mikroskopowy	5
2.1.1. Model Nilssona	6
2.1.2. Model Woodsa–Saxona	7
2.2. Rozszczepienie	7
2.2.1. Czasy życia T_{sf} i bariery	11
2.2.2. Jądra nieparzyste	16
2.3. Rozpad α	18
2.4. Wychwył elektronu	20
2.5. Pełne czasy życia jąder najcięższych	21
2.5.1. Dyskusja	21
2.6. Dynamika pól <i>pairing</i>	23
2.6.1. Dyskusja	26
2.7. K–izomery	28
2.7.1. Dyskusja	29
Rozdział 3. Rozkłady materii jądrowej	33
3.1. Model Skyrme’a	34
3.1.1. Siły <i>pairing</i>	38
3.1.2. Metoda Lipkina–Nogamiego	40
3.1.3. Poprawka rotacyjna	41
3.1.4. Obliczenia z wiązami	43
3.2. Relatywistyczny model średniego pola	44
3.2.1. Oddziaływania NN	44

3.2.2.	Krótką historia modelu RMF	46
3.2.3.	Gęstość funkcji Lagrange'a i równania pola	47
3.2.4.	Metodyka obliczeń	51
3.2.5.	Modyfikacje potencjału $U(\sigma)$	52
3.2.6.	Parametry RMF	53
3.3.	Observable	55
3.3.1.	Masa jądra	55
3.3.2.	Moment kwadrupolowy	57
3.3.3.	Promień rozkładu ładunku i przesunięcia izotopowe	58
3.4.	Wyniki modeli SkHF i RMF	60
3.4.1.	Poprawka rotacyjna	60
3.4.2.	Promienie i przesunięcia izotopowe	65
3.4.3.	Jądra kuliste	70
3.4.4.	Skóra neutronowa	73
3.4.5.	Deformacje	80
3.4.6.	Momenty kwadrupolowe	83
3.4.7.	Masy jąder kulistych	85
3.4.8.	Halo neutronowe	90
	Rozdział 4. Podsumowanie	103
	Dodatek A. Oznaczenia i skróty	107
	Bibliografia	109
	Bibliografia	109

Spis rysunków

2.1	Czasy T_{sf}	13
2.2	Bariery potencjału.	14
2.3	Parametr masowy.	15
2.4	Czasy T_{sf} jąder nieparzystych.	17
2.5	Logarytmy T_{α} jąder einsteinu.	19
2.6	Czasy życia jąder p-p.	22
2.7	Czasy życia jąder p-n.	23
2.8	Czasy życia jąder n-p.	24
2.9	Czasy życia jąder n-n.	25
2.10	Dynamika <i>pairing</i> : Bariera, parametr masy.	27
2.11	Izomery $K = 7$	31
2.12	Izomery $K = 8$	32
3.1	Energia wiązania izotopów gadolinu ${}_{64}\text{Gd}$ w funkcji deformacji β	62
3.2	Moment pędu i moment bezwładności jąder gadolinu w funkcji A	63
3.3	Poprawka rotacyjna dla izotopów gadolinu ${}_{64}\text{Gd}$ jako funkcja A	63
3.4	Moment pędu i moment bezwładności jąder gadolinu w funkcji deformacji β	64
3.5	Poprawka rotacyjna E_{rot} w funkcji deformacji β dla izotopów ${}_{64}\text{Gd}$	65
3.6	Średnie promienie kwadratowe rozkładu ładunku w izotopach ${}_{38}\text{Sr}$	66
3.7	Średnie promienie kwadratowe rozkładu ładunku w izotopach ${}_{54}\text{Xe}$	67
3.8	Średnie promienie kwadratowe rozkładu ładunku w izotopach ${}_{56}\text{Ba}$	68
3.9	Przesunięcia izotopowe w jądrach strontu.	69
3.10	Energia stanu podstawowego izotopów ${}_{38}\text{Sr}$	70
3.11	Teoretyczne energie wiązania na nukleon dla jąder strontu.	71
3.12	Jądra kuliste	72
3.13	Grubość skóry neutronowej izotopów ${}_{38}\text{Sr}$	75
3.14	Grubość skóry neutronowej izotopów ${}_{54}\text{Xe}$	75
3.15	Grubość skóry neutronowej izotopów ${}_{56}\text{Ba}$	76

3.16 Grubość skóry neutronowej izotopów ${}_{64}\text{Gd}$	77
3.17 Grubość skóry neutronowej w jądrach kulistych	78
3.18 Różnica deformacji $\Delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p $ w jądrach ${}_{38}\text{Sr}$	80
3.19 Różnica deformacji $\Delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p $ w jądrach ${}_{54}\text{Xe}$	81
3.20 Różnica deformacji $\Delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p $ w jądrach ${}_{56}\text{Ba}$	81
3.21 Różnica deformacji $\Delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p$ w jądrach ${}_{64}\text{Gd}$	82
3.22 Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ${}_{38}\text{Sr}$	83
3.23 Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ${}_{54}\text{Xe}$	84
3.24 Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ${}_{56}\text{Ba}$	84
3.25 Momenty kwadrupolowe jąder ${}_{64}\text{Gd}$	85
3.26 Odchylenia wyliczonych mas jąder kulistych od mas doświadczalnych.	88
3.27 Odchylenia wyliczonych mas kulistych izotopów ołowiu od mas doświadczalnych.	89
3.28 Odchylenie względnej gęstości h . Model kropelkowy.	96
3.29 Logarytm z gęstości jądrowej.	98
3.30 Logarytm dziesiętny ze stosunku gęstości neutronowej i protonowej.	99
3.31 Ułamki parcjalnych gęstości jądrowych.	101
3.32 Oszacowania odchylenia względnej gęstości średniej h	102
3.33 Oszacowania czynnika halo neutronowego f	102

Spis tablic

2.1	Czasy życia i struktura izomerów K	30
3.1	Parametry sił Skyrme'a	35
3.2	Sprzężenia mezon-nukleon i ich wkłady do sił jądrowych	45
3.3	Lekkie mezony o masach < 1000 MeV	45
3.4	Parametry modeli RMF	53
3.5	Parametryzacja PL-40 modelu RMF	54
3.6	Średnie odchylenia kwadratowe promieni jąder kulistych	74
3.7	Średnie błędy kwadratowe w obliczeniach mas	86
3.8	Odchylenia standardowe obliczonych mas jąder sferycznych	87
3.9	Oszacowane i doświadczalne czynniki halo	97

Rozdział 1

Uwagi wstępne

Celem prezentowanej pracy jest opis wybranych własności jąder atomowych, z szerokiego zakresu pierwiastków układu okresowego, lekkich i najcięższych, w ich stanach podstawowych. Własności te szacowane są w ramach istniejących modeli średniego pola. Wśród prezentowanych modeli należy wymienić dwa modele mikroskopowo–makroskopowe, które można uważać za standardowe modele niskoenergetycznej struktury jądrowej oraz dwa modele nowszej generacji. Są to model Hartree’ego-Focka z siłami Skyrme’a (SkHF), zbudowany na bazie fenomenologicznych oddziaływań nukleon–nukleon i model relatywistyczno-polowy (RMF), którego podstawę stanowią oddziaływania wymienne.

Modele mikroskopowo–makroskopowe opierają się na makroskopowej energii modelu kropłowego [1, 2], kropelkowego [3, 4] lub tzw. modelu *Yukawa plus exponent* [5]. Energię makroskopową uzupełnia się poprawką Strutinskiego [6, 7, 8] oraz energią korelacji *pairing*¹, które oblicza się ze znajomości jednocząstkowych poziomów energetycznych oraz resztkowych oddziaływań typu *pairing*. Zazwyczaj, energetyczne widma jednocząstkowe generowane są w modelu Nilssona [10, 11] lub modelu Woods–Saxona [12, 13, 14].

Tak zbudowana energia potencjalna jądra zależy od różnych parametrów układu. Są to deformacje, parametry pola *pairing*, itd. Energia potencjalna

¹ Termin *pairing* przyjęł się w polskiej literaturze fizycznej ze względu na krótką formę. Jego odpowiednikiem jest wprowadzona przez Szymańskiego [9] wielowyrazowa nazwa *oddziaływanie kojarzące nukleony w pary*.

pomaga następnie wyznaczyć inne charakterystyki układu w stanie podstawowym, a często również w stanach wzbudzonych.²

Opisaną metodę można uważać za klasyczną. Istnieją prócz niej inne, bardziej podstawowe modele struktury jądrowej oparte na oddziaływaniach cząstka–cząstka lub oddziaływaniach wymiennych, polowych. Pierwsze, np. model Skyrme’a [15, 16], rozwijane są w formalizmie Hartree’ego–Focka lub Hartree’ego–Focka–Bogoliubowa (HFB). Modelem drugiego typu jest model relatywistyczny, zwany przez swoich twórców QHD³ [17]. Jest to model oddziaływań nukleon–nukleon polegających na wymianie pól mezonowych. Podobnie jak w przypadku modelu Skyrme’a, rozwija się go w formalizmie Hartree’ego.

Zadania obu modeli, relatywistycznego i klasycznego średniego pola są jednakowe, metodyka i natura, pomimo formalnych podobieństw, inne. Model relatywistyczny, oprócz pól nukleonowych, tworzą pola mezonowe. Pola te to odpowiedniki najbliższych obserwowanych mezonów, skalarnego, wektorowego i izowektorowo–wektorowego. Z nich zbudowana jest gęstość funkcji Lagrange’a modelu polowego. Metody wariacyjne pozwalają otrzymać równania ruchu pól. Równaniami tymi są równania Diraca dla pól nukleonowych, równania Kleina–Gordona dla mezonów masowych i klasyczne równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego. Rozwiązując je dla skończonych układów jądrowych, otrzymujemy wszystkie potrzebne składniki służące wyznaczeniu energii układu. Prócz niej możemy obliczać dowolne inne obserwable.

Problem rozwiązania wszystkich równań szerokiego modelu QHD jest skomplikowany. Zadanie ułatwiają symetrie czy też prawa zachowania. Wykorzystuje się tu ogólne własności układów jądrowych, symetrię odwrócenia czasu, zasadę zachowania ładunku czy symetrię osiową. Ta ostatnia jest raczej ograniczeniem modelu niż naturalną zasadą, lecz z powodu silnych uproszczeń jakie z niej wynikają dla modelu, jest chętnie

² W tym celu potrzebna jest znajomość dynamiki układu – równanie ruchu układu w przestrzeni kolektywnych stopni swobody lub znajomość struktury wzbudzeń.

³ Nazwa ta pochodzi od mieszanki językowej *quantum hadrodynamics*, oznaczającej kwantową dynamikę hadronów.

stosowana. Często, symetria osiowa jest zresztą dokładnie realizowana w układach jądrowych.

W przedstawianej pracy stosowano oba modele:

mikroskopowo–makroskopowy oraz modele samozgodne by uzyskać opis podstawowych cech układów jądrowych. Niżej podane są wszystkie badane cechy.

- Czasy życia jąder atomowych ze względu na spontaniczne rozszczepienie ze stanu podstawowego.
- Czasy życia izomerów K.
- Czasy życia ze względu na rozpady α , β oraz wychwyty elektronu.
- Wpływ dynamiki *pairing* na rozszczepienie.
- Deformacje i elektryczne momenty kwadrupolowe.
- Różnice deformacji rozkładów neutronowych i protonowych.
- Rozmiary jąder.
- Rozkłady ładunku w jądrach.
- Grubość skóry neutronowej.
- Peryferyjne własności rozkładów jądrowych. Halo neutronowe.
- Masy jąder atomowych.

Nowe metody i ulepszenia, które zastosowano w badaniu tych zagadnień zebrane są w następnym zestawieniu. Są to:

- Metoda dynamiczna w rozszczepieniu.
- Dynamika korelacji *pairing*.
- Poprawka rotacyjna w energii Hartree’ego–Focka.
- Średnie gęstości nukleonowe; definicja względnego odchylenia gęstości średnich; zastosowanie w opisie halo neutronowego.
- Zastosowanie oddziaływań typu $\delta(\vec{r})$ –*pairing* oraz rozszerzonego formalizmu BCS.
- Rozszerzenie modelu relatywistycznego o generowane oddziaływanie *pairing*.
- Zastosowanie metody Lipkina–Nogamiego.

Dla lepszego opisu wybierano zawsze model najbardziej odpowiedni do sytuacji. W rezultacie uzyskano informacje dotyczące nie tylko nowych zjawisk w fizyce jądrowej, lecz jednocześnie sugestie dotyczące ulepszeń

w stosowanych modelach. Na przykład, sugeruje się wprowadzenie dwu różnych deformacji, protonowej i neutronowej w klasycznych modelach powłokowych.

Organizacja pracy jest następująca. Klasyczny model mikroskopowo–makroskopowy oraz wyniki dotyczące rozszczepienia są opisane w rozdziale następnym (drugim). Rozdział trzeci dotyczy zastosowań modeli samozgodnych. Pokrótce, w kolejności powstawania, opisany jest model Skyrme’a, a dalej, relatywistyczny polowy model jądrowy. Wyniki zastosowań podane są łącznie tak, by można było je łatwo porównywać. Rozdział czwarty, ostatni, zawiera podsumowanie badań. Spis literatury znajduje się na końcu pracy. Dla ułatwienia poszukiwań, oprócz spisu treści, w pracy znajduje się spis rysunków oraz tabel w niej zamieszczonych. W Dodatku zamieszczony jest słowniczek skrótów używanych w pracy. Wyniki porównywane są między sobą oraz z wynikami modeli nie opisanych w pracy (np. z modelem Gogny’ego [18, 19], modelem ETFSI [20] itd.).

Uwaga. Odniesienia do prac autorskich lub prac wykonanych z udziałem autora, są podane jako numery zamieszczone w nawiasach kwadratowych wraz z następującym po nich dopiskiem „B”, np. [22, B] oznacza dwudziestą drugą pracę z bibliografii zamieszczonej na końcu pracy, wykonaną z udziałem autora. Odniesienia do innych prac są podawane jako numery prac, z tego samego spisu, i też podane są w nawiasach kwadratowych, lecz bez dopisków.

Rozdział 2

Rozpady jąder

W rozdziale tym opisane są te własności jąder atomowych, które charakteryzują ich nietrwałość. Są to czasy życia ze względu na procesy rozpadu takie jak samorzutne rozszczepienie, rozpad alfa i wychwyty elektronu. Wieloletnia praktyka pokazała, że najbardziej precyzyjnie opisuje je model mikroskopowo–makroskopowy.

2.1. Model makroskopowo–mikroskopowy

Energię potencjalną jądra, zależną od jego „kształtu”, można zapisać w postaci sumy dwu składowych, energii makroskopowej E_{makro} i poprawki mikroskopowej E_{mikro} :

$$V(N, Z, \text{deformacja}) = E_{\text{makro}} + E_{\text{mikro}}. \quad (2.1)$$

Najczęściej makroskopowa składowa energii potencjalnej jest wyznaczana z modelu kropłowego [1, 2] lub kropelkowego [3, 4]. Model kropelkowy jest ciągle rozwijany. W ostatnich pracach [21], gdzie wyznaczano masy jąder atomowych, błąd standardowy obliczeń wykonanych z zastosowaniem tego modelu wynosił tylko 0,669 MeV. Wadą modelu jest stosunkowo duża liczba parametrów. We wspomnianej pracy liczba wszystkich stałych wynosi 37. Ze względu jednak na swoją prostotę, łatwość zastosowań, a przede wszystkim dokładność z jaką model kropelkowy opisuje własności jądrowe, stał się on podstawowym narzędziem badania ciężkich układów jądrowych. Przyjmuje się, że pracuje on zadowalająco dla jąder o liczbach masowych $A \geq 16$.

Drugi składnik wyrażenia (2.1) – poprawka mikroskopowa E_{mikro} – składa się z dwóch części, tzw. poprawki powłokowej E_{pow} oraz poprawki *pairing* $E_{\text{p.c.}}$ zwanej też energią korelacji *pairing*

$$E_{\text{mikro}} = E_{\text{pow}} + E_{\text{p.c.}} \quad (2.2)$$

W celu wyliczenia E_{mikro} , należy wyznaczyć poziomy energii jednocząstkowych. W następnym kroku, po rozwiązaniu równań BCS oblicza się poprawkę *pairing* $E_{\text{p.c.}}$ oraz poprawkę powłokową E_{pow} , według klasycznej metody Strutinskiego [6, 7]. Przy zastosowaniu prostego modelu *pairing*, w którym natężenie sił G (wraz z zadanyam zakresem działania sił *pairing*) wyznacza przerwę energetyczną Δ i poziom Fermiego λ układu, poprawka ta jest postaci

$$E_{\text{p.c.}} = \sum_{k=N_1}^{N_2} (2v_k^2 - n_k)e_k - \frac{\Delta^2}{G} - \frac{G}{2} \sum_k (2v_k^4 - n_k), \quad (2.3)$$

gdzie e_k są energiami obliczonymi w modelu Nilssona lub Woodsa–Saxona, v_k^2 są prawdopodobieństwami obsadzeń stanów jednocząstkowych, a $n_k = 2$ lub 0 są współczynnikami obsadzenia stanów w układzie bez oddziaływań *pairing*. W układach o nieparzystej liczbie cząstek, poprawkę (2.3) należy uzupełnić o energię nieparzystej cząstki.

Poprawka powłokowa Strutinskiego, E_{pow} , jest postaci

$$E_{\text{pow}}(\text{deformacja}) = \sum_i e_i - \tilde{E}(\text{deformacja}). \quad (2.4)$$

Tutaj $\tilde{E}(\text{deformacja})$ jest gładką częścią energii neutronów lub protonów wyliczoną zgodnie z procedurą Strutinskiego [6, 7].

Energię *pairing* (2.3) poprawia się dodatkowo, o średnią energię korelacji *pairing*, którą można z dobrym przybliżeniem uznać za stałą [11]. Pomijając jej wpływ na masę jądra oraz rozszczepienie, jej obecność nie zmienia znacząco własności jądrowych w stanach podstawowych.

2.1.1. Model Nilssona

W tej pracy, w jej pierwszej części, stosowany jest zwykły model Nilssona w parametryzacji ϵ_k [11]. Maksymalna liczba deformacyjnych stopni

swobody rozważanych w pracy wynosi 6, $k = 2, 3, 4, 5, 6$ oraz $k = 1$. Deformacja ϵ_1 kompensuje przesunięcie środka ciężkości jądra, spowodowane obecnością w układzie, nieparzystych deformacji ϵ_3 i ϵ_5 . W obliczeniach czasów życia jąder stosujemy standardowe parametry κ i μ (patrz np. [11],[22, B]) lub parametry dobrane dla konkretnego obszaru jądrowego.

2.1.2. Model Woodsa–Saxona

Drugim modelem mikroskopowo–makroskopowym, który wykorzystany został do obliczeń mas, barier na rozszczepienie jąder parzystych i nieparzystych, ciepła reakcji Q_{ec} oraz Q_α był model Woodsa–Saxona [23, 12, 13, 14]. Zastosowano tzw. „optymalne” [14] parametry modelu.

2.2. Rozszczepienie

W Rozdziale tym dyskutowane będą metody i wyniki otrzymane w opisie samorzutnego rozszczepienia (pękania¹) jąder ze stanu podstawowego oraz z najniższych stanów dwukwazicząstkowych, tzw. stanów izomerycznych. Uwzględnienie dynamiki w przestrzeni parametrów *pairing* (δ_n i δ_p) istotnie zmienia wyniki obliczeń czasów życia jąder ze względu na spontaniczne rozszczepienie.

W stosowanych współcześnie teoriach, spontaniczne rozszczepienie jądra atomowego opisuje się używając przybliżonego rozwiązania równania Schrödingera w jednowymiarowej przestrzeni deformacji. W przypadkach, w których wybrana przestrzeń deformacji jest wielowymiarowa, obliczenia sprowadzają się do wyznaczenia prawdopodobieństwa przenikania jednowymiarowej bariery potencjału kolektywnego. Ten wybrany *wymiar* jest najczęściej związany z wydłużeniem jądra. Inne stopnie swobody są związane z przewężeniem jądra oraz z asymetrią mas powstających fragmentów rozszczepienia. Te stopnie swobody uwzględnia się w wielu

¹ Termin *pękanie* pochodzi z jednej z pierwszych polskich prac o rozszczepieniu jąder atomowych, napisanej przez profesora J. Błatona i pośmiertnie opublikowanej w pierwszym tomie Postępów Fizyki z roku 1950 [24].

wypadkach w przybliżony sposób. Najczęściej, *ścieżka* do rozszczepienia jest krzywą w takiej wielowymiarowej przestrzeni. W przypadku gdy używamy ścieżek statycznych, na których energia potencjalna jest najniższa, zaniedbujemy wiele efektów wynikających z wielowymiarowości procesu kwantowego jakim jest rozszczepienie. Stosując metody dynamiczne, oparte na minimalizacji zredukowanego działania WKB, uwzględniamy dokładniej wpływ masy jądra (parametrów masowych) na proces rozszczepienia. Prowadzi to do innej ścieżki do rozszczepienia i innych, na ogół wyższych, barier potencjału. Oba podejścia nie są zadowalające. Pojedyncza ścieżka do rozszczepienia nie daje pełnego kwantowego opisu procesu.

W latach siedemdziesiątych zaproponowano dynamiczny model wielowymiarowy rozszczepienia [8]. Pełną realizację tego modelu wykonał autor w rozprawie doktorskiej [25, B]. Wykorzystano tam metody programowania dynamicznego [26] do minimalizacji funkcjonału działania. Działanie dynamiczne jest w tym modelu działaniem typu działania Jacobiego ([27] §16), tzw. działaniem zredukowanym [28] ($\hbar = 1$)

$$S = 2 \int_{s_a}^{s_b} \sqrt{2M(s) |E - V(s)|} ds. \quad (2.5)$$

W wyrażeniu tym masa efektywna $M(s)$ jest

$$M(s) = \sum_{i,j} M_{\beta_i \beta_j} \frac{d\beta_i}{ds} \frac{d\beta_j}{ds}, \quad (2.6)$$

gdzie $M_{\beta_i \beta_j}$ są składowymi tensora masowego. Wielkość s jest parametrem krzywej w przestrzeni deformacji.

Ścieżka do rozszczepienia realizuje warunek minimum działania S

$$\delta S = 0 \quad (2.7)$$

w zbiorze krzywych z przestrzeni deformacji $\{\beta\}$, zaczepionych w punktach zwrotnych, spełniających równanie

$$E - V(\{\beta\}) = 0. \quad (2.8)$$

Klasyczne punkty zwrotne dane tym równaniem wyznaczają deformację jądra w punkcie „wejścia” pod barierę (w pobliżu deformacji stanu

podstawowego) i jego deformację w punkcie „wyjścia” spod bariery potencjału w obszar $E > V(\{\beta\})$. Prawdopodobieństwo przenikania bariery, jakie dostaje się w tym modelu, jest [29]

$$P \approx (1 + \exp S)^{-1}, \quad (2.9)$$

a okres połowicznego rozpadu jądra w stanie podstawowym wynosi

$$T_{sf} = \frac{\ln 2}{n P}. \quad (2.10)$$

Wykonane prace, oparte o te założenia [22, 30, B], pokazały dobrą zgodność uzyskanych wyników dla czasów rozpadu T_{sf} w porównaniu z danymi doświadczalnymi. Prace te dotyczyły jąder ciężkich transuranowców ($Z > 92$) jak też jąder najcięższych o liczbach atomowych $Z > 106$.

Dokładna analiza dynamiki rozszczepienia została przeprowadzona w pracy [22, B]. Oprócz czasów T_{sf} wyznaczone były inne charakterystyki jądrowe takie jak wysokości pierwszej (V_A) i drugiej (V_B) bariery na rozszczepienie. Głównym osiągnięciem tej pracy było zastosowanie efektywnej metody minimalizacji działania S w dwuwymiarowej przestrzeni deformacji.

Wprowadzenie większej liczby deformacji nie stanowiło problemu. Prace uwzględniające trzy i więcej stopni swobody pojawiły się jednak dopiero w latach osiemdziesiątych [30, B] (trzy wymiary: jeden parametr deformacji i dwa parametry Δ) oraz później [31] (cztery wymiary w przestrzeni kształtów). Obecnie, (patrz np. [32]) liczba dynamicznych stopni swobody może być w zasadzie dowolna.

Zarówno w pierwszych pracach na ten temat, jak i później, kilkakrotnie udowodniono, że dynamiczne włączenie wszystkich diagonalnych i niediagonalnych składowych tensora masowego prowadzi do dużej redukcji czasów T_{sf} .

Jednym z najważniejszych odkryć w tej dziedzinie jest zauważenie silnego wpływu wibracji pól *pairing* na proces rozszczepienia. Okazuje się, że dynamiczne włączenie pola *pairing*, polegające na potraktowaniu parametru przerwy energetycznej Δ tak samo jak zwykłych parametrów deformacji obniża efektywne działanie S o ponad 10%. Prowadzi to do zmniejszenia czasów T_{sf} o wiele rzędów wielkości. Jest to wynik stosowania rozszerzonej

dynamiki rozszczepienia. Niestandardowe potraktowanie pól *pairing* — „deformacji” pól *pairing* — prowadzi do nowej fizyki procesu. Ponieważ masa efektywna jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do kwadratu parametru Δ to rozszczepienie, realizowane w przestrzeni parametrów {deformacja, Δ }, przebiega w rozpatrywanym modelu po krzywej, na której masa efektywna jest mniejsza niż masa odpowiadająca stałej wartości parametru Δ wynikającej z rozwiązań równań BCS. Efekt ten odkrył Moretto [33]. Jego model uogólniono na trójwymiarowy przypadek realistyczny włączając do rozważań oba pola *pairing*, protonowe i neutronowe oraz deformację. Wpływ pól *pairing* na rozszczepienie został zbadany w latach osiemdziesiątych w pracy *Coupling of the Pairing Vibrations with the Fission Mode* [30, B]. Zagadnienie to będzie dokładniej omówione w dalszej części tego rozdziału.

Obecny stan wiedzy o obliczeniach czasów życia T_{sf} , sprawia wrażenie kompletności teorii rozszczepienia. Dane eksperymentalne zdają się potwierdzać wyniki otrzymane z zastosowaniem skomplikowanych modeli kolektywnych. Spostrzeżenie to jest jednak błędne. Jak już wspominałem, model rozpadu przez rozszczepienie, opiera się na jednowymiarowym przybliżeniu nawet wtedy gdy rozważa się wielowymiarowe modele przestrzeni deformacji jądrowych bądź ich uogólnienia, takie jak np. opisane wyżej, dotyczące traktowania oddziaływań *pairing*.

Jakie są możliwe drogi rozwiązania problemu? Wspomnę o jednym nurcie badań. W latach osiemdziesiątych pojawiły się prace oparte na feynmanowskiej koncepcji całek po trajektoriach [34, 35, 36]. Pierwsze wyniki, które uzyskano tymi metodami dotyczyły prostych, jednowymiarowych barier potencjału [37, 38, 39]. Ostatnie, zacytowane prace można traktować jako elementarne wprowadzenie do problematyki. W tym duchu formułuje się również zależne od czasu modele średniego pola. Przy zastosowaniu przybliżenia stacjonarnej fazy [40, 41, 42] można z nich wyprowadzić formuły opisujące prawdopodobieństwo przenikania barier w układach wielociałowych. W przypadku jednowymiarowym i przy zaniedbaniu fluktuacji kwantowych, są one takie same jak w przybliżeniu WKB. Widać z nich, że człony interferencyjne, zaniedbane w przybliżeniach półklasycznych, wnoszą istotny wkład do prawdopodobieństwa przenikania.

Podobnie rzecz wygląda ze stanami związanymi układów złożonych. Metoda Feynmana, oprócz ruchu do rozszczepienia, uwzględnia żuchy poprzeczne układu prowadzące do jego wzbudzeń bądź niestabilności związanych z istnieniem wielu wymiarów. Poprawki związane z tym typem wzbudzeń rozszczepiającego się jądra uwzględniał, na innej drodze, Hofmann [43] stosując uproszczone metody rozwiązywania złożonego dwuwymiarowego równania Schrödingera.

Wydaje się, że całki Feynmana mogą dostarczyć zarówno metody jak też innej jakościowo reprezentacji rozszczepienia. Zjawisko to widzimy tu jako ruch układu po *wszystkich, a nie jednej* różnych trajektoriach. Suma wkładów od wszystkich trajektorii daje wynik końcowy. Jest prawdą, że maksymalny wkład pochodzi od trajektorii klasycznych (może być ich kilka tak jak np. w wypadku tzw. rozszczepienia bimodalnego [44]) ale kwantowe fluktuacje, o ile tylko potrafimy je zachować, wnoszą istotne poprawki do opisu (interferencja trajektorii).

2.2.1. Czasy życia T_{sf} i bariery

Szeroką dyskusję wyników dotyczących dynamiki rozszczepienia jąder parzysto–parzystych, przeprowadzono w pracy [22, B]. Uzyskane tam wyniki można już uznać za klasyczne. Czasy życia T_{sf} jąder z obszaru $Z = 92 \div 100$ wyliczono bez używania parametrów swobodnych. Model zawierał mikroskopową energię Nilssona–Strutinskiego i makroskopową energię modelu kropelkowego. Przestrzeń deformacji rozpięto na pięciu współrzędnych kolektywnych ϵ_λ , o multipolowościach od $\lambda = 2 \dots 6$. Tak duża przestrzeń kolektywna, zawierająca oprócz parametrów charakteryzujących wydłużenie jądra, parametry opisujące przewężenie (ϵ_4 , ϵ_6) i asymetrię mas fragmentów (ϵ_3 , ϵ_5) pozwala dokładnie prześledzić ważność poszczególnych stopni swobody. Parametry masowe były wyliczone w modelu *cranking* [45, 8].

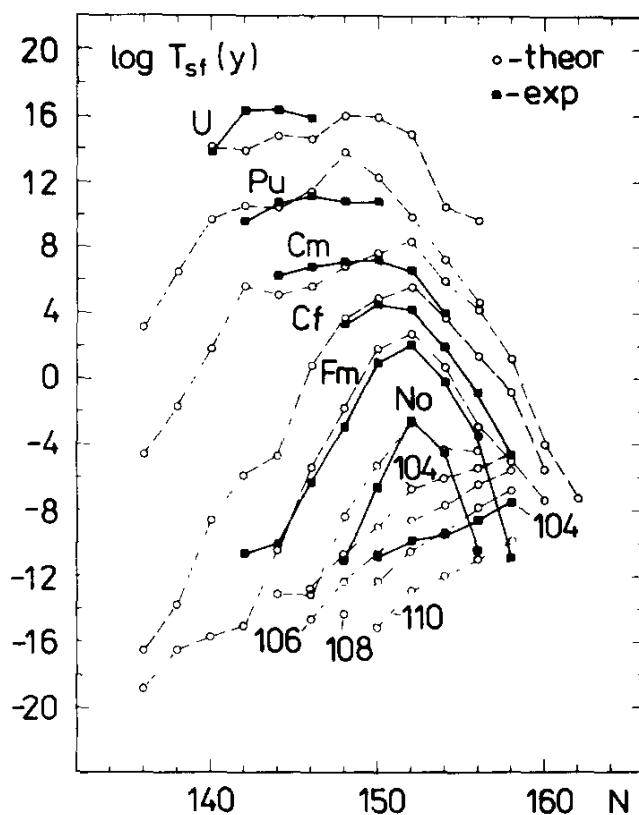
Obliczenia przeprowadzono dla ok. 100 jąder w myśl minimalizacyjnej metody dynamicznej opracowanej przez autora [25, B]. Wyniki uzyskane dla wysokości barier na rozszczepienie odtwarzają zmierzone w doświadczeniu wartości z dokładnością $1,5 \div 2$ MeV, a czasy życia ze względu na spontaniczne rozszczepienie różnią się średnio od danych doświadczalnych

czynnikiem 60. Zważywszy fakt braku parametrów swobodnych w modelu, wynik ten należy uznać za bardzo dobry. Jak pokazano w pracy [22, B], deformacje jądrowe można uszeregować w kolejności ich ważności następująco: kwadrupolowa (ϵ_2) i heksadekapolowa (ϵ_4). W następnej kolejności należy wymienić (ϵ_6), deformacje oktupolową (ϵ_3) oraz (ϵ_5) i nieosiową (γ). Wkład deformacji nieparzystych w proces rozszczepienia jest porównywalny do dokładności obliczeń jaką można uzyskać w rachunkach rozszczepieniowych.² Poprawka dynamiczna $\Delta T_{\epsilon_6}^{\text{dyn}}$ do czasów T_{sf} , która opisuje wkład stopnia swobody ϵ_6 do dynamiki rozszczepienia, była przedmiotem badań również innych prac. Autorzy pracy [47] pokazali, że dla nuklidów z obszaru $92 \leq Z \leq 102$ czasy życia T_{sf} mogą zmaleć w niektórych wypadkach aż o cztery rzędy wielkości jeśli włączy się stopień swobody ϵ_6 . Dotyczy to głównie ciężkich izotopów fermu ($Z = 100$) i nobla ($Z = 102$). Podobnie zdefiniowana poprawka statyczna jest dla tych jąder o rząd wielkości mniejsza. Deformacje ϵ_3 jak też ϵ_5 są ważne w obszarze, gdzie $\epsilon_2 > 0,65$. Deformacja ϵ_6 obniża natomiast położenie pierwszego minimum energii potencjalnej o kilkaset keV podnosząc tym samym wysokości barier na rozszczepienie.

Wydawało się, że deformacje wyższych multipolowości nie muszą być brane pod uwagę. Wniosek ten okazał się niesłuszny. W nowszych pracach stosujących metodę Woodsa–Saxona–Strutinskiego, dotyczących rozszczepienia, rozważa się deformacje aż do ósmego rzędu: β_8 [49]. Wprowadzenie tak wysokich multipolowości, chociaż nie zmienia znacząco czasów T_{sf} , okazuje się ważne w opisie procesu rozszczepienia bimodalnego, odkrytego w końcu lat osiemdziesiątych [44, 50]. Włączenie ich modyfikuje znacznie powierzchnię jądrowej energii potencjalnej za barierą do rozszczepienia, w obszarze dużych deformacji $\epsilon_2 > 1$.

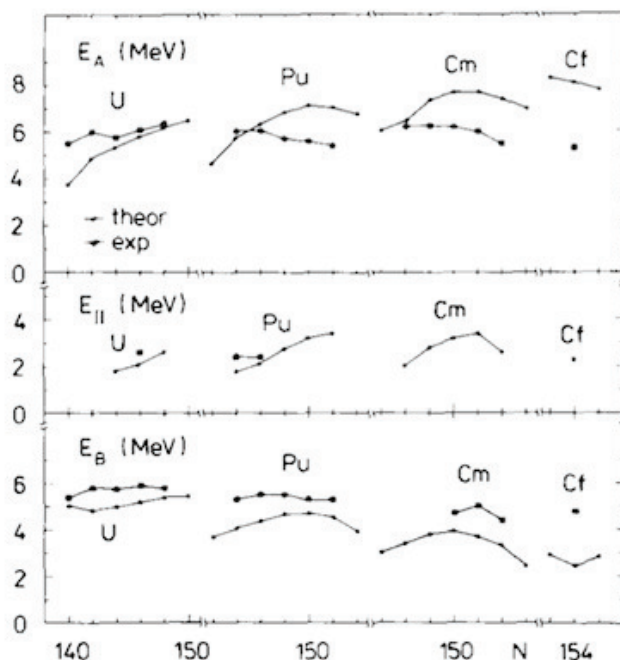
W tej samej pracy [22, B] stwierdzono, że przy stosowaniu metody dynamicznej parametry masowe (*cranking*) „tracą” w procesie rozszczepienia silną zależność powłokową jaką wykazywały przy wcześniej stosowanej metodzie statycznej (z minimalną energią potencjalną). Wartości

² Dokładność obliczeń numerycznych stosowanych w rachunkach rozszczepieniowych analizowana jest w pracy [46, B]. Użyte metody pozwoliły oszacować błędy pochodzące między innymi od wielkości stosowanych siatek przestrzennych.



Rysunek 2.1. Logarytmy wyliczonych (puste kółka) i zmierzonych (czarne kwadraciki) [48] połówkowych czasów T_{sf} (w latach) w funkcji liczby neutronów [22, B].

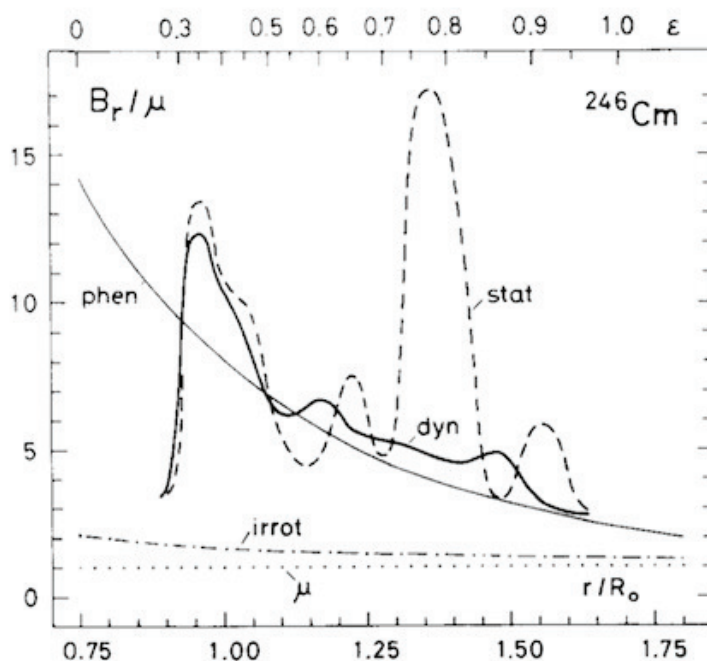
dynamicznego parametru masowego odtwarzają na średnio fenomenologiczny parametr masowy, który jest znormalizowaną masą otrzymaną w modelu hydrodynamicznym [51, B].
 Następny wniosek [51, 22, B] można zamknąć w stwierdzeniu, że parametr masowy *cranking* jest w rozszczepieniu wielkością o dobrych wartościach. Oznacza to, że wraz z mikroskopowo–makroskopową barierą potencjalną Nilssona–Strutinskiego i przy uwzględnieniu dynamiki procesu



Rysunek 2.2. Obliczone (czarne punkty) i zmierzone (czarne kwadraciki) wysokości pierwszej bariery (E_A), drugiego minimum (E_{II}) i drugiej bariery (E_B) w funkcji liczby neutronów N dla wybranych izotopów [22, B].

rozszczepienia parametr masowy pozwala na odtworzenie czasów T_{sf} z dobrą dokładnością (1, 5–2 rzędy wielkości). Przypomnijmy, że parametry masowe są średnio około 1, 5 ÷ 3 razy za małe jeśli zastosować je do opisu niskich stanów kolektywnych jąder atomowych [52, 53]. Opisane wyżej wyniki przedstawiają rysunki 2.1–2.3.

Otrzymane wysokości barier na rozszczepienie (rys. 2.2) tylko na średnio odtwarzają wysokości doświadczalne. Jest to wynikiem nie tylko teoretycznych niedostatków modeli rozszczepienia, lecz również rezultatem stosowania stałej masy jądra w procesie obróbki danych eksperymentalnych (patrz np. [54]). Porównywanie barier na rozszczepienie ma więc tylko jakościowe znaczenie i nie powinno wpływać na ocenę stosowanych modeli.



Rysunek 2.3. Dynamiczne (gruba linia ciągła, *dyn*) i statyczne (linia przerywana, *stat*) parametry masowe $B_r(r/R_0)$ dla jądra ^{246}Cm [22, B]. Deformację jądra uwzględnia parametr odległości środków masy fragmentów rozszczepienia $r(\epsilon_2, \dots, \epsilon_6)$. Dla porównania pokazano fenomenologiczną masę kropłową (*phen*), masę hydrodynamiczną (*irrot*) i zredukowaną masę układu μ (linia kropkowana). Odpowiadające r wartości parametru deformacji ϵ_2 zostały podane na górnej ramce rysunku. Innych deformacji nie pokazano.

Warto zwrócić uwagę na asymptotyczne zachowanie się dynamicznego parametru masowego w funkcji odległości r centrów mas fragmentów rozszczepienia i porównać go z przebiegiem statycznym (rys. 2.3). Obserwowane oscylacje wokół średnich wartości modelu fenomenologicznego i asymptotyczna zbieżność dynamicznego parametru masowego do masy zredukowanej symetrycznych fragmentów rozszczepienia, stały się powodem, iż w wielu pracach, w których opisuje się

np. rozszczepienie bimodalne, stosuje się z powodzeniem fenomenologiczny parametr masowy [55].

2.2.2. Jądra nieparzyste

Z opisem jąder nieparzystych związane są dodatkowe trudności (np. problem *pairing*, problem parametrów masowych). Pierwsze prace teoretyczne dotyczące ich rozszczepienia wykonana w końcu lat pięćdziesiątych Wheeler [56]. Pomorski [57] obliczył czasy T_{sf} dla jąder nieparzystych w końcu lat siedemdziesiątych.

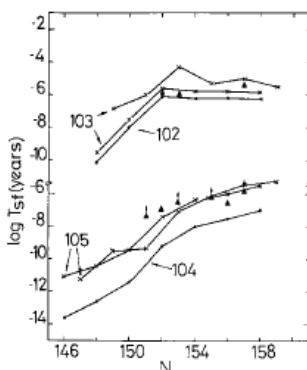
W pracach [58, 59, B] wykonane zostały szerokie obliczenia dotyczące czasów T_{sf} dla wszystkich typów jąder. Dotyczą one zarówno jąder parzysto–parzystych ($p-p$), nieparzystych ($n-p$ lub $p-n$) i nieparzysto–nieparzystych ($n-n$). W pierwszej z prac dyskutuje się jądra podwójnie nieparzyste z obszaru $Z \geq 97$ ($140 \leq N \leq 160$). Jest to pierwsza praca dotycząca jąder nieparzysto–nieparzystych, w której jawnie uwzględniono efekt nieparzystych cząstek. Parametry κ i μ występujące w potencjale Nilssona, dobrano tak, by spiny jąder nieparzystych w stanach podstawowych odpowiadały spinom obserwowanym. Uzyskana zgodność spinów (z wyjątkiem dwu przypadków) dla ponad trzydziestu nuklidów oraz zgodność energii stanów jednocząstkowych pozwala przypuszczać, że wyniki dla logarytmów z czynników opóźnienia (wzbronięcia)

$$h = \log \frac{T_{sf}^{n-p(n)}}{T_{sf}^{p-p}} \approx \Delta S, \quad (2.11)$$

obliczone z takimi parametrami κ i μ będą wiarygodne dla jąder z obszaru szerszego niż opisany, a więc w szczególności dla jąder o $Z \geq 102$, dla których nie istniały dane eksperymentalne o spinach stanów podstawowych i tym bardziej o kolejności poziomów jednocząstkowych.

We wzorze (2.11) T_{sf}^{n-n} , T_{sf}^{n-p} i T_{sf}^{p-p} oznaczają kolejno czasy życia T_{sf} dla nuklidów nieparzysto–nieparzystych, nieparzystych i parzysto–parzystych. Wynik $h \approx \Delta S$ jest otrzymany przy założeniu, że słuszna jest przybliżona formuła (2.9). Wielkość ΔS jest przyrostem działania liczonego wzdłuż statycznej ścieżki do rozszczepienia w układach $n - n$ i $n - p$. Dla

określenia parametrów (κ , μ) zastosowano wcześniej opracowane metody opublikowane w pracach [60, 61, B].



Rysunek 2.4. Czasy życia ze względu na rozszczepienie spontaniczne ze stanu podstawowego jąder nieparzystych N_0 ($Z=102$), Lr ($Z=103$), $Z=104$ oraz Ha ($Z=105$) [58, B].

Wyniki otrzymane dla czynników wzbronienia h można streścić następująco. Dla jąder o liczbie atomowej $Z \leq 101$ wielkości h są większe niż w przypadku jąder o $Z > 102$. Dla pierwszej grupy — jąder lżejszych — $h = 5 \div 7$, a dla jąder cięższych $h \leq 1 \div 3$. Ich wartości są porównywalne z doświadczalnymi. Opóźnione rozpady jąder nieparzystych w stosunku do ich bezpośrednich, lekkich i parzystych sąsiadów, tłumaczy się jako wynik dodania do bariery potencjału jądra parzystego, tzw. energii specjalizacji. Jest to energia cząstki nieparzystej (znajdującej się poza parzystym rdzeniem), która zwiększa barierę potencjału. Zakłada się, że stan nieparzystej cząstki zachowuje swoje charakterystyki kwantowe, trzecią składową momentu pędu i parzystość, podczas „przejścia” układu pod barierą potencjału.³ Na proces mają też wpływ parametry masowe. W dyskutowanej pracy były one

³ Wykonano również obliczenia czasów T_{sf} przy założeniu, że Ω nie jest zachowana w procesie rozszczepienia. „Przejście pod barierą” odbywa się „wzdłuż” najniższych stanów nieparzystej cząstki. Wyniki opublikowane są w pracy [62, B]. Czynniki wzbronienia są w tym przypadku mniejsze o ~ 2 rzędy od czynników wyliczonych przy założeniu zachowania trzeciej składowej momentu pędu.

wyliczane z formuł mikroskopowych słusznych dla jąder nieparzystych. Zmiany w parametrach masowych, powodowane prawami zachowania momentu pędu i parzystości stanu jądra nieparzystego, wynoszą około 5% jego wartości, podczas gdy zmiany wysokości barier energii potencjalnej dochodzą nawet do 20%. W sumie, prowadzi to do zmian w czasach T_{sf} , szczególnie istotnych tam, gdzie efekty powłokowe są dominujące. Kształt części kropłowej bariery potencjału wpływa słabo na charakterystyki rozszczepienia. Pokazano to również w pracy [31]. Koncepcja energii specjalizacji jest znana od roku 1958 i pochodzi od Wheelera [56]. Wyniki pracy [58, B], omówione wyżej, ilustruje rys. 2.4. Pokazuje on czasy życia jąder No ($Z = 102$), Lr ($Z = 103$), Rf (Ku, Du, $Z = 104$) i Ha ($Z = 105$). Trójkątami zaznaczone są dane doświadczalne.

2.3. Rozpad α

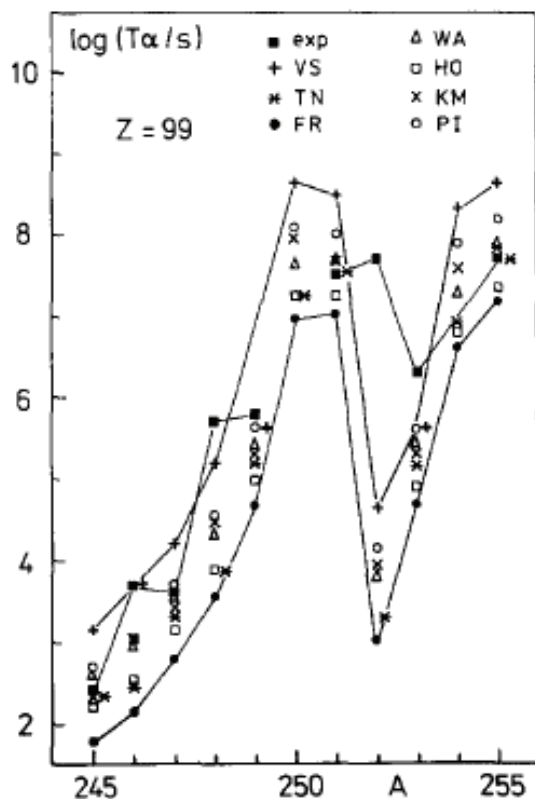
W odróżnieniu od omówionych wyżej wyników otrzymanych w oparciu o model Nilssona–Strutinskiego, rezultaty pracy [59, B] otrzymano stosując model Woodsa–Saxona–Strutinskiego. Obliczenia energii poziomów jednocząstkowych wykonano z zestawem parametrów *optimal* [12, 63, 14]. Praca dotyczy całkowitych czasów życia jąder atomowych o $Z \geq 104$ i wstępnie rozstrzyga problem samorzutnego rozszczepienia jąder najcięższych o $Z \sim 110$. Dla uproszczenia obliczeń w ich części rozszczepieniowej, użyto fenomenologicznego parametru masowego [64]

$$B_r = \mu \left(1 + k \frac{17}{15} \exp \left(- \frac{r - R}{d} \right) \right), \quad (2.12)$$

gdzie $k = 14$, $R = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1,175$ fm.

W celu oszacowania czasów życia ze względu na rozpad α , po przebadaniu szeregu modeli fenomenologicznych, zastosowano najlepszy istniejący wówczas zestaw parametrów z modelem Violi–Seaborga (VS) [65, 66]. Model VS okazał się najbardziej spójnym w obszarze, gdzie istniały dane doświadczalne o czasach życia T_α i ciepłach reakcji Q_α . Obliczone z użyciem wszystkich formuł logarytmu czasów T_α zostały przedstawione dla przykładu jądra einsteinu ($Z=99$) na rys. 2.5. Tam, gdzie znane są dane pomiarowe

(czarne kwadraty na rys. 2.5) formuła VS jest najlepsza. Pozostałe formuły, dają na ogół, o 0,5 ÷ 1,5 rzędu niższe czasy życia niż obserwowane.



Rysunek 2.5. Logarytmy czasów T_α wyliczonych z formuły Violi–Seaborga (patrz tekst) dla jąder einsteinu (Es , $Z = 99$) [59, B]. Dane doświadczalne pochodzą z pracy [66].

Formuła Violi–Seaborga na logarytm z czasu życia (w sekundach) jest następująca

$$\log(T_\alpha s) = A_Z Q_\alpha^{-1/2} + B_Z, \quad (2.13)$$

$$Q_\alpha(Z, N) = [M(Z, N) - M(Z - 2, N - 2) - M(2, 2)]c^2, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} A_Z &= 2,11329 Z - 48,9879, \\ B_Z &= -0,390040 Z - 16,9543. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Wielkość $M(Z, N)$ w wyrażeniu dla ciepła reakcji Q_α oznacza masę jądra o liczbie atomowej Z i masowej A . Masy wyznaczono z teoretycznie obliczonej energii stanu podstawowego. Należy zwrócić uwagę, że zgodność pomiędzy teorią a doświadczeniem jest, w omawianym modelu Woodsa–Saxona, lepsza dla ciepła reakcji Q_α ($\sim 0,5$ MeV) niż wyliczonych czasów życia T_α ($\sim 10^2$), co najpewniej świadczy o wadach zastosowanych modeli rozpadu α . W pracy podano zarówno ciepła reakcji Q_α jak i czasy T_α dla wszystkich typów jąder (parzystych i nieparzystych) o $Z \geq 104$. Praca ta jest jednym z niewielu przykładów zastosowań jednolitych obliczeń dotyczących struktur jądrowych o różnej parzystości. W tym czasie znane były podobne obliczenia dla jąder parzystych [67]. Otrzymane wyniki zgadzały się we wspólnych obszarach.

Uwaga. Rozszerzona dyskusja czasów życia jąder ze względu na rozpady α oraz tabele rozpadów α dotyczące wszystkich rozważanych jąder opublikowane są w pracach [68, 69, B]. Obliczenia zostały wykonane z masami oszacowanymi teoretycznie z modelu Woodsa–Saxona–Strutinskiego dla szesnastu formuł fenomenologicznych, według prac Viola–Seaborg [65], Taagepara–Nurmia [70], Keller–Münzel [71], Hornshoj i współpracownicy [72], Fröman [73], Wapstra [74], Poenaru i współpracownicy [75].

2.4. Wychwył elektronu

Oprócz analizy rozpadów α i rozszczepienia jąder atomowych, praca [59, B] zawiera również informacje o czasach życia jąder ze względu na wychwył elektronu z atomowej powłoki K. Wykorzystano tutaj wyrażenie dla ciepła reakcji

$$Q_{e.c.} = [M(Z, N) - M(Z - 1, N + 1)] \quad (2.16)$$

oraz odpowiednie wyrażenie dla $T_{e.c.}$ zaczerpnięte z pracy [76]. Obliczenia dały wartości $T_{e.c.}$ rzędu $\sim 10^2$ s dla wszystkich jąder z wyjątkiem jąder parzysto–parzystych, dla których zmieniały się w zakresie $10^2 - 10^4$ sekund. W porównaniu z otrzymanymi czasami rozpadów alfa oraz czasami spontanicznego rozszczepienia jąder, czasy $T_{e.c.}$ są prawie stałe i niemal jednakowo modyfikują czasy życia wszystkich rozważanych jąder. Proces wychwytu elektronu jest w wielu wypadkach, konkurencyjny do rozpadu alfa czy rozszczepienia. Dotyczy to jednak uformowanych atomów. W przypadku pojedynczych jąder najcięższych, powstałych w wyniku zderzeń ciężkich jonów, czas ten jest nieporównanie długi z czasem tworzenia się powłok elektronowych. Ich brak powoduje, że proces wychwytu elektronu nie występuje.⁴

2.5. Pełne czasy życia jąder najcięższych

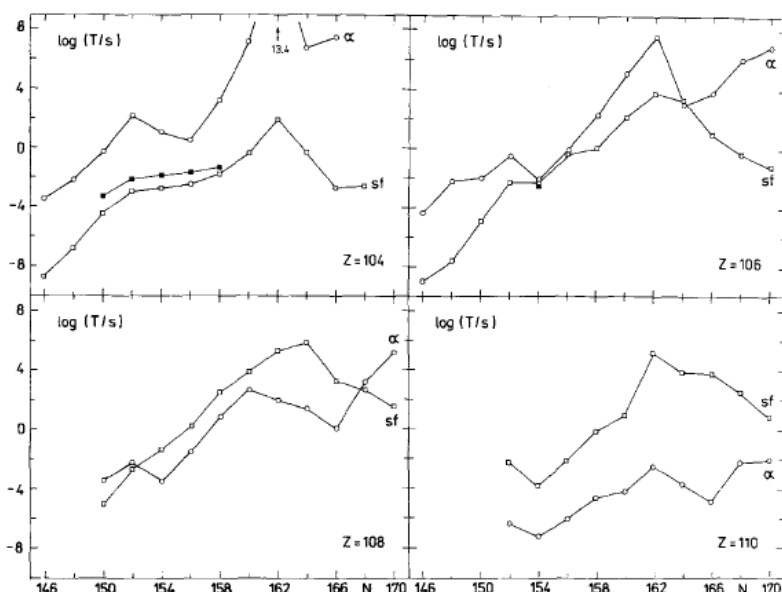
Na podstawie przedstawionych wyników można otrzymać sumaryczne czasy życia jąder atomowych T uwzględniające rozpady α , wychwyt elektronu i rozszczepienie spontaniczne. Przedyskutujemy tylko wkłady do T pochodzące od rozpadu α oraz samorzutnego rozszczepienia.

2.5.1. Dyskusja

Rysunki 2.6–2.9 przedstawiają czasy życia ze względu na rozpady α i rozszczepienie. Wyniki przedstawiono kolejno dla jąder parzysto–parzystych (rys. 2.6), o parzystym Z (rys. 2.7), o parzystym N (rys. 2.8) oraz dla jąder nieparzysto–nieparzystych (rys. 2.9). Wszystkie przedstawione nuklidy można podzielić na trzy klasy.

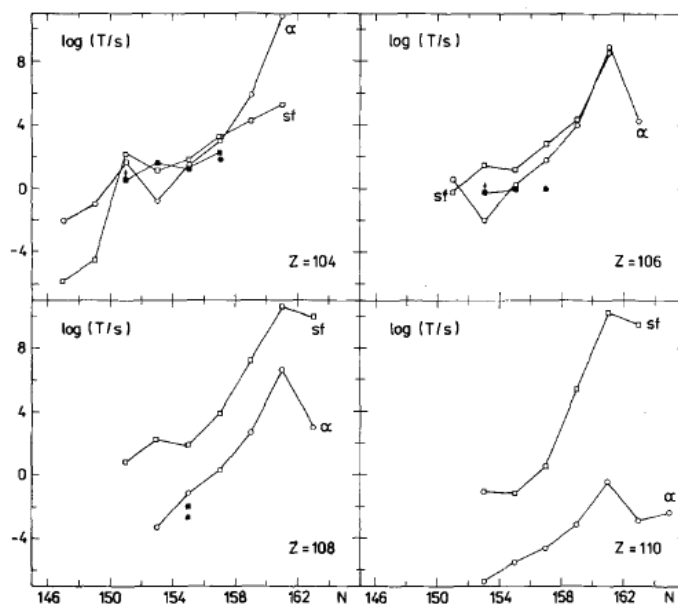
1. Nuklidy α — należą tu jądra rozpadające się głównie przez emisję cząstek α . Są to jądra z obszaru $Z = 107 \div 111$.
2. Nuklidy f — jądra rozpadające się głównie przez rozszczepienie spontaniczne. Do klasy f należy większość nuklidów lekkich o $Z \sim 104$.
3. Nuklidy $f\alpha$ — o podobnych czasach T_{sf} i T_α . Są to jądra o $Z = 105, 106$.

⁴ Komentarz ten zawdzięczam Z. Łojewskiemu.



Rysunek 2.6. Logarytmy wyliczonych połówkowych czasów życia T_{sf} (puste kółka, sf) i czasów T_{α} (puste kwadraty, α) ciężkich jąder parzysto–parzystych [59, B]. Zmierzone czasy T_{sf} zaznaczone są czarnymi kwadratami.

Powyzsza klasyfikacja, została potwierdzona w najnowszej pracy na ten temat [77]. Podział ten jest również w zgodzie z doświadczeniem. Prace wykonane w GSI, Darmstadt [78, 79, 80, 81, 82, 83], w ZIBJ Dubna [84, 85] oraz w Berkeley [86, 44, 50, 87] potwierdzają przedstawiony schemat. Stosunek T_{sf}/T_{α} dla jąder klasy α zmienia się w przedziale $10^4 \div 10^{10}$ (l). Obserwacja rozszczepienia tych jąder jest więc trudna. Jedynym źródłem ich identyfikacji jest dokładny pomiar energii emitowanych cząstek α . Pozwala to określić masę najcięższych jąder (emiterów α) powstałych w reakcjach zderzenia jąder lżejszych. Przedstawione wnioski są ważne dla eksperymentu w dziedzinie wytwarzania jąder najcięższych i potwierdzają jednocześnie w miarę zadowalający stan teoretycznej wiedzy o rozszczepieniu i rozpady alfa. Należy jednak pamiętać, że wyniki dla T_{sf}

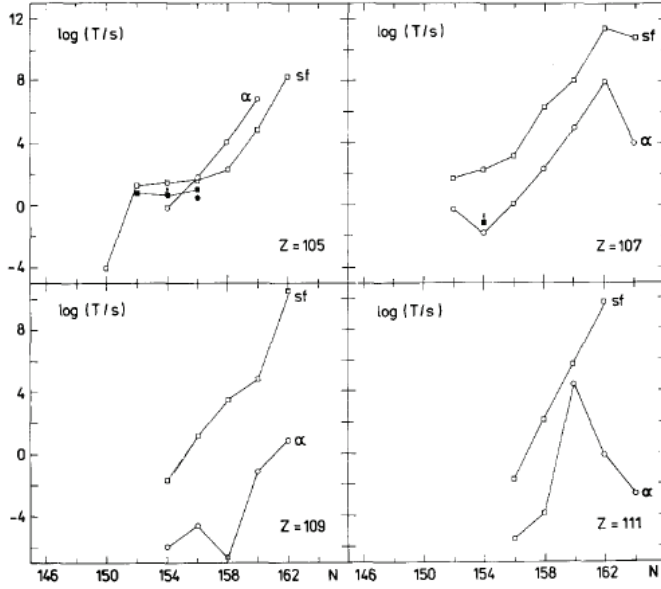


Rysunek 2.7. Logarytmy wyliczonych połówkowych czasów życia T_{sf} (puste kółka, sf) i czasów T_{α} (pusty kwadrat, α) ciężkich jąder parzysto–nieparzystych [59, B]. Zmierzone czasy T_{sf} zaznaczone są czarnymi kwadratami.

wciąż różnią się od zmierzonych wartości o około dwóch rzędów wielkości (patrz rys. 2.1 oraz rysunki 2.6–2.9).

2.6. Dynamika pól pairing

Metody wariacyjne stosowane w dynamicznym modelu rozszczepienia, pozwalają wprowadzić do jego opisu dowolną liczbę stopni swobody. Praca [33], pokazała, że parametry opisujące średnie pola *pairing* można potraktować dynamicznie – podobnie jak deformacje przestrzenne jądra. Warto prześledzić tok rozumowania przedstawiony w pracy Moretto [33]. Dotyczy ona tunelowania bariery potencjału jądrowego w obecności pola *pairing*. Oznaczmy wydłużenie jądra przez ℓ , a parametr przerwy energetycznej *pairing* przez δ . Energia potencjalna $V(\ell, \delta)$ jądra (dla



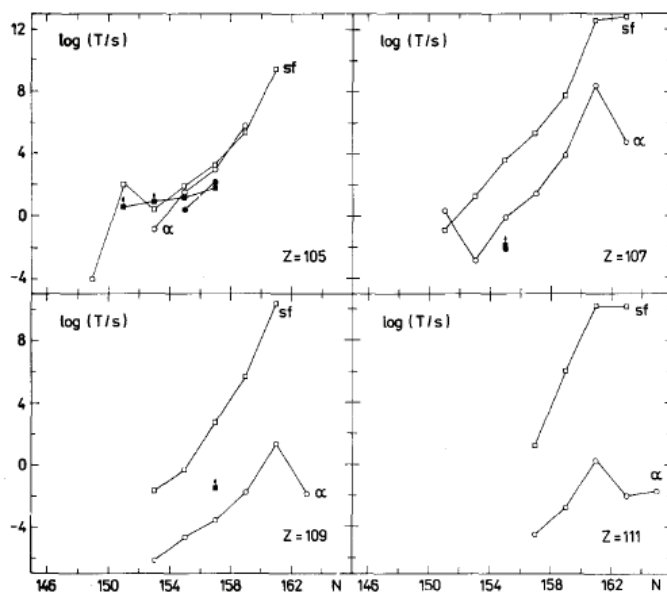
Rysunek 2.8. Logarytmy wyliczonych połówkowych czasów życia T_{sf} (puste kółka, sf) i czasów T_{α} (pusty kwadrat, α) ciężkich jąder nieparzysto–parzystych [59, B]. Zmierzone czasy T_{sf} zaznaczone są czarnymi kwadratami.

uproszczenia oba pola *pairing* neutronowe i protonowe traktujemy jako jedno) jest średnią wartością operatora Hamiltona

$$V(\ell, \delta) = \langle \bar{H} \rangle = 2 \sum v_k^2 (e_k - \lambda) - G \left(\sum u_k v_k \right)^2, \quad (2.17)$$

gdzie v_k , u_k są amplitudami BCS, G jest natężeniem sił *pairing*. Stosując model z jednorodnym widmem energii jednocząstkowych o stałej gęstości poziomów energii g , możemy zamienić sumy w wyrażeniu (2.17) odpowiednimi całkami po energii

$$\sum_k \longrightarrow g \int de. \quad (2.18)$$



Rysunek 2.9. Logarytmny wyliczonych połówkowych czasów życia T_{sf} (puste kółka, sf) i czasów T_{α} (pusty kwadrat, α) ciężkich jąder nieparzysto–nieparzystych [59, B]. Zmierzone czasy T_{sf} zaznaczone są czarnymi kwadratami.

i stąd obliczyć współczynnik sztywności energii potencjalnej względem drgań pola *pairing* Δ

$$\frac{\partial^2 \langle \bar{H} \rangle}{\partial \delta^2} = 2g \left(1 - \frac{1}{2}G\right) \approx 2g. \quad (2.19)$$

Zgodnie z tym $V(\ell, \delta)$ można przybliżyć parabolą w funkcji δ , postaci

$$V(\ell, \delta) \approx V(\ell, \delta_0) + g(\delta - \delta_0)^2. \quad (2.20)$$

Parametr masowy *cranking*, obliczony w modelu jednorodnej gęstości, jest równy [8]

$$B = \frac{a}{\delta^2} + b. \quad (2.21)$$

Stałe a i b zależą od jądra. Działanie WKB jest w tym przybliżeniu postaci

$$S = \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{2B(\delta)(V(\ell, \delta) - E)} d\ell. \quad (2.22)$$

Warunek najmniejszego działania

$$\delta S = 0 \quad (2.23)$$

proceedzi do równania

$$\frac{d}{d\delta} \sqrt{\left(\frac{a}{\delta^2} + b\right) \left[V(\ell, \delta_0) - E + g(\delta - \delta_0)^2 \right]} = 0. \quad (2.24)$$

Rozwiązaniem tego równania przy założeniu, że $b = 0$, jest

$$\delta = \delta_0 \left[1 + \frac{V(\ell, \delta_0) - E}{g\delta_0^2} \right]. \quad (2.25)$$

Wynika stąd, że parametr δ w procesie rozszczepienia, rośnie od wartości δ_0 (w punkcie ℓ_0 spełniającym równanie $E = V(\ell, \delta_0)$) do wartości maksymalnej w punkcie ℓ_m , w którym $V(\ell, \delta_0)$ jest największe (maksimum bariery V) i następnie maleje do wartości δ_0 . Dla typowych wartości parametrów ($g \approx 6 \text{ MeV}^{-1}$, $\delta_0 \approx 1 \text{ MeV}$, $V(\ell, 0) \approx 6 \text{ MeV}$) otrzymamy $\delta \approx 2 \text{ MeV}$. Ta maksymalna wartość parametru δ odpowiada maksimum potencjału $V(\ell, \delta_0)$. Średnią wartość δ można więc oszacować jako $\delta \approx 1,5 \text{ MeV}$. Przyrost działania związany z tą zmianą δ wynosi

$$\Delta S = S(\delta) - S(\delta_0) = S(\delta_0) \left(\frac{S(\delta)}{S(\delta_0)} - 1 \right) = S(\delta_0) \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} S(\delta_0). \quad (2.26)$$

2.6.1. Dyskusja

Włączenie pola *pairing* jako kolektywnego stopnia swobody w opisie procesu rozszczepienia, obniżyło działanie o ponad 30%. Ponieważ przyjęliśmy $b = 0$ i zaniedbaliśmy niediagonalne składowe tensora B (tzn. $B_{\ell, \delta} = 0$), można się spodziewać, że w realistycznym rachunku stosunek $\Delta S/\dot{S}$ zmieni się. Wniosek ten okazał się słuszny. Dokładne obliczenia [30, 88, B]

Rysunek 2.10. Bariera na rozszczepienie, składowa parametru masy obliczona dla kierunku do rozszczepienia (B) i parametr przerwy energetycznej *pairing* δ w funkcji parametru ϵ_2 , wyliczony na średniej ścieżce do rozszczepienia $\epsilon_{24} = (\epsilon_2, \epsilon_4(\epsilon_2))$ [30, B]. Parametr ϵ_4 zmienia się w funkcji ϵ_2 zgodnie z formułą: $\epsilon_4 = -0,06 + 0,2\epsilon_2$ jak w pracy [22, B]. Krzywe $\Delta(\epsilon_{24})$ pokazane w dolnej części rysunku obrazują zmiany parametrów *pairing* protonowego (gruba kreska) i neutronowego (cienka kreska) w procesie tunelowania bariery.

pokazały, że dynamika *pairing* zmniejsza działanie średnio o 15%. Obliczenia przeprowadzono dla izotopów fermu. Bariery na rozszczepienie, podobnie jak w przypadku innych obliczeń dynamicznych, wzrosły. Wzrost wynosił około 18% w obszarze ważnym dla rozszczepienia. Przykładowo, dla jądra ^{252}Fm wzrost ten wyniósł 1,4 MeV w punkcie deformacji odpowiadającej pierwszej barierze i około 0,8 MeV w punkcie drugiej bariery. Wynik ten ilustruje rys. 2.10.

Potwierdzono też prawie dwukrotny wzrost parametrów przerwy energetycznej *pairing* $\Delta_{n,p}$ (dla neutronów i protonów) pod barierą potencjału co zgadza się z oszacowaniami modelu jednorodnego. Dla izotopów fermu efekt dynamiki *pairing* zmniejsza czasy T_{sf} średnio o 6 rzędów wielkości! Praca ta pokazała ważność kolektywnych stopni swobody charakteryzujących *pairing*. Rozszerzone obliczenia, które zasugerowane zostały w pracy [30, B] i przeprowadzone przez Staszczaka i współpracowników [89, 90], w pełni potwierdziły słuszność przytoczonych wniosków.

Inne efekty wywołane obecnością pól *pairing* ilustruje następny rozdział pracy. Pomimo, że dotyczy on wzbudzonych stanów izomerycznych jąder, jego obecność, ze względu na możliwość mieszania się różnych kanałów rozpadu (przy emisji α lub rozszczepieniu jąder) nie jest tutaj przypadkowa.

2.7. K-izomery

W roku 1973 zaobserwowano, w obszarze aktywności, nowe stany w jądrach ^{250}Fm i ^{254}No o długich czasach życia [91]. Czasy życia aktywności zmierzonych w obu izotopach, wynoszą: dla ^{250}Fm – 1,8 s (30 min w stanie podstawowym), a dla ^{254}No – 0,28 s (55 s w stanie podstawowym). Dane o czasach życia stanów podstawowych pochodzą z pracy [92]. Pokazano jednocześnie, że obserwowanym aktywnościom nie odpowiadały żadne obserwowane dotąd stany jądrowe. Stany te nazwano K-izomerami. Zakłada się, że są to dwukwazicząstkowe (2qp) stany wzbudzone o energiach bliskich podwojonej, średniej przerwie energetycznej *pairing*, $2\bar{\Delta}$. Momenty pędu tych stanów są duże i wynoszą 7–8ħ. Wynika to z przybliżonej analizy struktury poziomów jednocząstkowych w modelu Nilssona w okolicy stanów

o kolejnych numerach porządkowych 75, 76, 77, odpowiadających liczbie neutronów 150–154 oraz stanów protonowych z numerami: 50 i 51, odpowiadających liczbom protonów 100 i 102. Wysoki moment pędu tych stanów zapewnia, że przejścia do stanu podstawowego są silnie wzbronione. Pojawia się pytanie, jak szybko taki stan K-izomeryczny, rozpadnie się na drodze rozszczepienia? Problem ten podniesiono w pracach [93, 94, B]. Pierwsza z prac dotyczyła jąder dyskutowanych przez Ghiorso i współautorów [91], natomiast w pracy następczej dyskutowano możliwość występowania stanów K-izomerycznych w jądrach parzysto-parzystych z obszaru aktywności. Przyjęty model zakładał, tak jak zaproponowano w [91], że K-izomer charakteryzuje się niską energią i dużym momentem pędu. Używano jednocząstkowego potencjału Nilssona. Dla każdego jądra z obszaru $96 \leq Z \leq 110$ i $144 \leq N \leq 158$, przebadano dwukwazicząstkowe stany neutronowe i protonowe o trzeciej składowej momentu pędu $K = 5, 6, \dots, 9\hbar$ i o parzystościach $\pi = \pm 1$. Razem, w przypadku każdego jądra, przebadano dwadzieścia najniższych stanów wzbudzonych. Wyniki obliczeń zostały przedstawione w postaci map, na których, we współrzędnych N i Z , pokazane są poziomicę logarytmu z czynników wzbronienia

$$h = \log \frac{T_{sf}^m}{T_{sf}}. \quad (2.27)$$

Górny wskaźnik m oznacza, że wynik dotyczy izomeru K.

2.7.1. Dyskusja

Logarytmy czynników wzbronienia szybko zmieniają się z N i Z . Są one małe ($h \leq 2$) w przypadku prawie wszystkich jąder o $Z \geq 104$. Dla jąder lekkich, $Z < 102$, są one zwykle bardzo duże ($h \geq 4$), co oznacza, że obserwacja rozszczepienia z tych stanów może okazać się trudna. Powodem mogą być reakcje z udziałem szybszych procesów, takich jak emisja α lub powrót do stanu podstawowego przez emisję kwantu γ . W przypadku jąder o $Z \geq 104$ wydaje się prawdopodobne mieszanie się obu typów rozszczepienia ze stanu podstawowego i ze stanu K-izomerycznego. Dla nich wzbronienia są bliskie jedności. Oba procesy są więc jednakowo szybkie. Jeśli populacja stanów podstawowego i izomerycznego powstałych w jądrach ciężkich (lub

supercieżkich) w reakcjach zderzania ciężkich jonów, są podobnie liczne, to oba typy rozszczepienia są nie do odróżnienia. Formułując ten wniosek inaczej można powiedzieć, że jeśli rozszczepia się jądro, dla którego $h \sim 0$, to możliwe jest, że obserwujemy w tym wypadku, mieszanę co najmniej dwóch typów rozszczepienia. Nie znamy stanu początkowego. Dla jąder o $Z < 102$ tego typu mieszanie się modów nie powinno być silne. Główna aktywność powinna być udziałem stanu podstawowego.

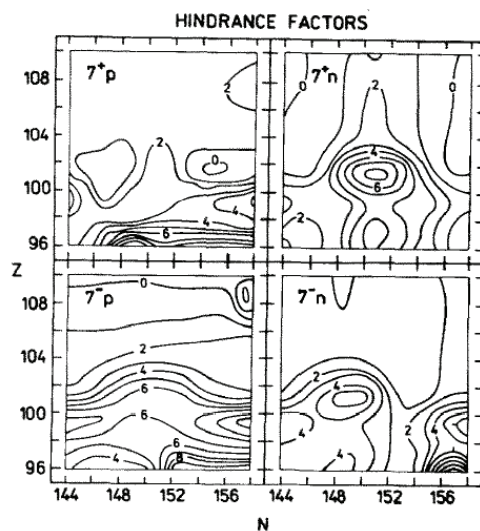
Tablica 2.1. Czasy życia i logarytmy opóźnienia h w stanach Ghiorso [91]

Jądro	K^π	$(\Omega^\pi, \Omega^\pi)_n$	$(\Omega^\pi, \Omega^\pi)_p$	$\log T_{sf}$	h
^{250}Fm	0^+			1,93	0
	8^-	$(\frac{7^+}{2}, \frac{9^-}{2})$		5,26	3
	7^-		$(\frac{7^-}{2}, \frac{7^+}{2})$	8,99	8
^{254}Nd	0^+			-4,64	0
	8^-	$(\frac{9^-}{2}, \frac{7^+}{2})$		3,15	1
	8^-		$(\frac{7^-}{2}, \frac{9^+}{2})$	0,87	-1

W pracy [62, B] pokazano, że stanem o $K^\pi = 8^-(7^-)$ dyskutowanym przez Ghiorso i współpracowników w przypadku ^{250}Fm może być albo dwukwazicząstkowy stan protonowy $(\frac{7^+}{2}, \frac{9^-}{2})_p$ albo dwukwazicząstkowy stan neutronowy $(\frac{7^-}{2}, \frac{7^+}{2})_n$ (patrz tabela 2.1). Podobnie dla izotopu ^{254}No dwukwazicząstkowy stan neutronowy $(\frac{9^-}{2}, \frac{7^+}{2})_n$ lub protonowy $(\frac{7^-}{2}, \frac{9^+}{2})_p$. Na rysunkach 2.11 i 2.12 pokazane są logarytmy czynników wzbronienia h zdefiniowane wzorem 2.27 w funkcji (Z, N) , w przypadku spinów $K = 7$ (rys. 2.11) oraz $K = 8$ (rys. 2.12) dla obu parzystości $\pi = \pm 1$ oraz wszystkich rozważanych jąder.

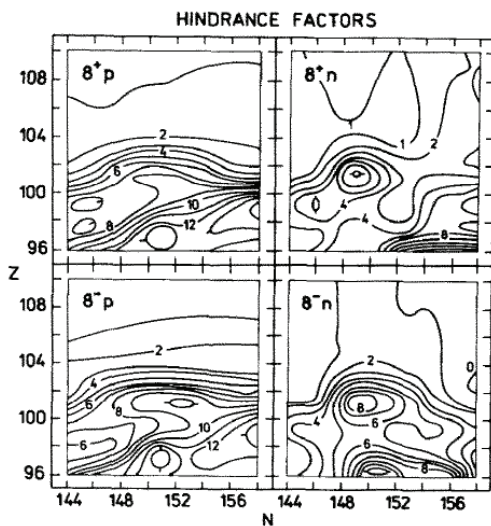
Można zauważyć wyraźny wzrost czasów życia stanów neutronowych relatywnie do stanu podstawowego w okolicy $N = 148, \dots, 152$ i $Z = 100, 102$, a więc izomery K lokalizują się w tym rejonie. Jest to zgodne z obserwacją.

Czasy życia ze względu na rozszczepienie oraz logarytmy czynników wzbronienia h dla jąder dyskutowanych przez Ghiorso i współpracowników przedstawia tabela 2.1. W przedostatniej kolumnie, piątej, podane są



Rysunek 2.11. Logarytmy czynników wzbronienia h (2.27) obliczone w stanach $K = 7$ w funkcji (Z, N) dla obu parzystości (na górze rysunku $\pi = +1$, na dole $\pi = -1$). Lewa strona dotyczy wzbudzeń protonowych, prawa — neutronowych [94, B].

logarytmy z czasów T_{sf} , a w kolumnie ostatniej czynniki wzbronienia h . W kolumnach 4–5 podana jest struktura jednokwazicząstkowa dwukwazicząstkowych stanów wzbudzonych K-izomerycznych: protonowych (kolumna 3) i neutronowych (kolumna 4).



Rysunek 2.12. Logarytmy czynników wzbronienia h (2.27) w stanach $K = 8$ w funkcji (Z, N) dla obu parzystości (na górze rysunku $\pi = +1$, na dole $\pi = -1$). Lewa strona dotyczy wzbudzeń protonowych, prawa – neutronowych [94, B].

Rozdział 3

Rozkłady materii jądrowej

Modele powłokowe jąder atomowych zastępuje się obecnie przez modele samozgodne, oparte na realistycznych oddziaływaniach (siłach) jądrowych lub realistycznych funkcjach Lagrange'a, w których używa się oddziaływań typu pole–pole. Wygenerowane stąd funkcjonały energii (zależne od gęstości różnych wielkości) minimalizuje się metodami Hartree'ego lub Hartree'ego–Focka (HF), poszukując optymalnych konfiguracji jednocząstkowych, z których konstruowane są wielociałowe funkcje układu. Te zaawansowane teorie jądra atomowego zdobywają popularność z dwóch powodów. Pierwszym jest powód fizyczny. Teorie te pozwalają uwzględnić w jednolity sposób dowolne fizyczne oddziaływania między nukleonowe. Powodem drugim jest łatwość z jaką można obecnie wykonać obliczenia. Teorie te, chociaż bardzo atrakcyjne, w wielu przypadkach (pomijając proste modelowe obliczenia) długo czekały na swoją realizację praktyczną. Dla przykładu, pierwsze duże obliczenia z oddziaływaniami zaproponowanymi przez Skyrme'a w latach pięćdziesiątych [15, 95, 96], były wykonane dopiero na początku lat siedemdziesiątych przez Brinka i Vautherin [16, 97]. Podobna sytuacja powtórzyła się z relatywistycznymi modelami pól jądrowych. Pierwsze obliczenia pojawiły się w końcu lat osiemdziesiątych, podczas gdy zaawansowane badanie teorii i pierwsze obliczenia (dla kulistych jąder magicznych) prowadzono od początku lat siedemdziesiątych. Ze względu na swoją przyrodę (bogactwo oddziaływań i pól) modele te, nawet w swojej fenomenologicznej postaci pozwalają otrzymać większość charakterystyk jądrowych i wyjaśnić te cechy, których nie można opisać przy pomocy modelu mikroskopowo–makroskopowego. Prostem przykładem może służyć oddziaływanie spin–orbita, które jest immanentną

cechą modelu relatywistycznego. Podobnie jest z własnością krótkozasięgowości oddziaływania Skyrme'a.

Oprócz opisu stanu podstawego, modele średniego pola, pozwalają opisać dynamikę jądrową, stany wzbudzone (wysokie spiny), jak również bariery na rozszczepienie. Obliczenia tego typu są wciąż jednak bardzo mało wydajne. W rozdziale tym zostaną przedstawione główne założenia obu modeli, modelu Skyrme'a wraz z procedurą Hartree'ego–Focka (SkHF) i relatywistycznego modelu polowego (RMF). W dalszej kolejności zaprezentowane będą wyniki obliczeń mas, rozmiarów jąder atomowych (promieni jądrowych), deformacji (momentów multipolowych), peryferyjnych rozkładów gęstości jądrowych (halo neutronowe) – własności, które otrzymane zostały z ich pomocą.

3.1. Model Skyrme'a

Oddziaływanie Skyrme'a [15, 95], oprócz sił dwuciałowych $v_{ij}^{(2)}$, zawiera człon opisujący oddziaływania trójciałowe $v_{ijk}^{(3)}$ [16, 97, 98, 99, 100]:

$$v = v^{(2)} + v^{(3)} = \sum_{i<j} v_{ij}^{(2)} + \sum_{i<j<k} v_{ijk}^{(3)}. \quad (3.1)$$

Człon trójciałowy, który w oryginalnym sformułowaniu Skyrme'a jest równy $v_{123}^3 = t_3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, sprowadza się do członu dwuciałowego zależnego od gęstości $v_{12} = 1/6 t_3 (1 + P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \rho((\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2)$ [16]. Zmodyfikowane oddziaływanie Skyrme'a zależne od gęstości i pędów, w reprezentacji położeniowej jest postaci

$$\begin{aligned} V_{12} &= t_0 (1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &- \frac{1}{2} t_1 (1 + x_1 P_\sigma) \left[\overleftarrow{\nabla}_{12}^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overrightarrow{\nabla}_{12}^2 \right] \\ &- t_2 (1 + x_2 P_\sigma) \overleftarrow{\nabla}_{12} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overrightarrow{\nabla}_{12} \\ &+ \frac{1}{6} t_3 (1 + x_3 P_\sigma) [\rho_n(\vec{r}_1) + \rho_p(\vec{r}_2)]^\gamma \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &- iW_0 \overleftarrow{\nabla}_{12} \wedge \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \overrightarrow{\nabla}_{12} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) + V_{\text{Coul}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

W wyrażeniu tym, wielkości $\vec{\sigma}_{1,2}$ są operatorami spinu, P_σ jest operatorem wymiany spinu w stanach nukleonowych, wektory \vec{r}_1 i \vec{r}_2 określają położenia cząstek. Funkcje $\rho_n(\vec{r})$ i $\rho_p(\vec{r})$, są gęstościami neutronów (n) i protonów (p) w punktach przestrzennych \vec{r} . Strzałka nad operatorem *nabla* oznacza kierunek jego działania. Pozostałe wielkości, takie jak t_0, \dots, t_3 oraz x_0, \dots, x_3 , γ i W_0 są parametrami oddziaływania. W przedstawionej postaci pełne oddziaływanie Skyrme'a zawiera dziesięć parametrów. Wyznacza się je przez porównanie wyników obliczeń z doświadczeniem. W tabeli 3.1 podane są parametry dla tych sił Skyrme'a, z którymi wykonane zostały obliczenia w tej pracy.

Tablica 3.1. Parametry wybranych sił Skyrme'a używanych w pracy: Sk1 [16], Sk3, Sk6 [99], Sk7 [101], SkSC4 [20].

Parameter	Sk1	Sk3	Sk6	Sk7	SkSC4
$t_0(\text{MeV} \cdot \text{fm}^3)$	-1057,3	-1128,75	-1101,81	-1096,80	-1789,42
$t_1(\text{MeV} \cdot \text{fm}^5)$	235,9	395,0	271,67	246,2	283,467
$t_2(\text{MeV} \cdot \text{fm}^5)$	-100	-95,0	-138,33	-148,0	-283,467
$t_3(\text{MeV} \cdot \text{fm}^{3+3\gamma})$	14463,5	14000,0	17000,0	17626,0	12782,3
x_0	0,56	0,45	0,583	0,62	0,79
x_1	0	0	0	0	-0,5
x_2	0	0	0	0	-0,5
x_3	0	1	1	1	1,13871
$W_0(\text{MeV} \cdot \text{fm}^5)$	120	120	115	112	124,877
γ	1	1	1	1	0,3333333

Energię jądra można zapisać jako wartość średnią operatora energii kinetycznej oraz oddziaływań między nukleonowych

$$E = \left\langle \Phi \left| T + v^{(2)} + v^{(3)} \right| \Phi \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^N \langle k | \frac{p_i^2}{2m} | k \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k,l}^N \langle kl | \bar{v}^{(2)} | kl \rangle + \frac{1}{6} \sum_{k,l,m}^N \langle klm | v^{(3)} | klm \rangle. \quad (3.3)$$

Stany Φ są wyznacznikami Slatera zbudowanymi z jednocząstkowych funkcji falowych nukleonów. Kreski nad v w tym wyrażeniu oznaczają antysymetryzowane elementy macierzowe oddziaływań $v^{(2)}$ i $v^{(3)}$ w dwu- i trójciałowych stanach nukleonowych.

Ponieważ siły Skyrme'a są siłami zerowego zasięgu, wyrażenie na energię (3.3) daje się sprowadzić do postaci

$$E[\rho, \tau, \vec{J}] = \int H(\rho(\vec{r}), \tau(\vec{r}), \vec{J}(\vec{r})) d^3\vec{r}. \quad (3.4)$$

Gęstość energii, którą oznaczyliśmy przez H , zależy od gęstości nukleonów (ρ), gęstości energii kinetycznej (τ) oraz gęstości spinu nukleonów (\vec{J}).

Wielkości te są dane równaniami

$$\begin{aligned} \rho_q(\vec{r}) &= \sum_{k \in q} w_k |\phi_k(\vec{r})|^2, \\ \tau_q(\vec{r}) &= \sum_{k \in q} w_k |\nabla \phi_k(\vec{r})|^2, \\ \vec{J}_q(\vec{r}) &= -i \sum_{k \in q} w_k \phi_k^*(\vec{r}) \cdot (\nabla \phi_k(\vec{r}) \wedge \vec{\sigma}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

W powyższych formułach sumowanie przebiega również po zmiennych spinowych. Funkcje ϕ_k są jednocząstkowymi funkcjami stanów nukleonowych k , natomiast w_k są prawdopodobieństwami obsadzenia stanów nukleonowych. Można je wyznaczać stosując teorię BCS lub inną teorię oddziaływań resztkowych.

W celu wyznaczenia energii jądra należy dokonać minimalizacji funkcjonału (3.4). Wariację $E[\rho, \tau, \vec{J}]$ po funkcjach jednocząstkowych ϕ_k , od których zależą gęstości ρ , τ i \vec{J} , prowadzi się przy warunku, że funkcje ϕ_k są unormowane. Prowadzi to do równania

$$\frac{\delta}{\delta \phi_k} \left(E[\rho, \tau, \vec{J}] - \sum \epsilon_l \int d^3\vec{r} |\phi_l(\vec{r})|^2 \right) = 0, \quad (3.6)$$

w którym ϵ_l są mnożnikami Lagrange'a. Całkowanie przez części prowadzi do następującego wyrażenia dla wariacji

$$\delta E = \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \delta\tau(\vec{r}) + U(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}) + \vec{W}(\vec{r})\delta\vec{J}(\vec{r}) \right). \quad (3.7)$$

Wielkość $m^*(\vec{r})$ występująca w tym równaniu jest masą efektywną nukleonu w jądrze, a $U(\vec{r})$ jest średnim potencjał jądrowym (średnim polem), w którym poruszają się nukleony. Składowa $\vec{W}(\vec{r})$, występująca w (3.7) opisuje oddziaływanie spin-orbita. Ogólną zależność tych wielkości od różnych gęstości jądrowych i od parametrów oddziaływania można znaleźć w pracy [102].

Jeśli wyznaczymy teraz wariacje $\delta\rho$, $\delta\tau$ oraz $\delta\vec{J}$, względem funkcji ϕ_k i wstawimy je do równania (3.7), otrzymamy

$$\delta E = 2 \sum_{l=1}^N \int d^3r \delta\phi_l^* \left[-\nabla \frac{\hbar^2}{2m^*(\vec{r})} \nabla + U(\vec{r}) + \vec{W}(-i)(\nabla \times \vec{\sigma}) \right] \phi_l. \quad (3.8)$$

Wstawiając to do wyjściowego równania wariacyjnego (3.6) ostatecznie otrzymamy

$$\left[-\nabla \frac{\hbar^2}{2m^*(\vec{r})} \nabla + U(\vec{r}) + \vec{W}(-i)(\nabla \times \vec{\sigma}) \right] \phi_l = \epsilon_l \phi_l. \quad (3.9)$$

W ten sposób, problem minimalizacji funkcjonału energii $E[\rho, \tau, \vec{J}]$ (3.4), sprowadzony został do nieliniowego problemu własnego dla funkcji własnych ϕ_l , i wartości własnych ϵ_l , $l = 1, 2, \dots$. Rozwiązań równań (3.9) poszukuje się w realnych obliczeniach metodami numerycznymi.

Oddziaływanie kulombowskie V_{Coul} w wyrażeniu dla oddziaływań Skyrme'a (3.2) prowadzi do gęstości energii kulombowskiej w równaniu (3.4) $H_C(\vec{r})$ złożonej z dwu części, prostej

$$H_C(\vec{r}) = \frac{e^2 \rho_p(\vec{r})}{2} \int \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.10)$$

i wymiennej

$$H_C(\vec{r}) = -\frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} e^2 \rho_p^{4/3}(\vec{r}), \quad (3.11)$$

pochodzącej z uwzględnienia zasady Pauliego. W tych formułach e jest ładunkiem protonu.

3.1.1. Siły *pairing*

W przedstawionym modelu oddziaływań jądrowych Skyrme'a, brakuje oddziaływań reszkowych typu *pairing*. Jak już wspomniano, można je wprowadzić, podobnie jak w zwykłych modelach mikroskopowych na poziomie, gdy wyznaczone są już energie jednocząstkowe.¹ W prostej wersji metody BCS, zakłada się, że element macierzowy sił kojarzących nukleony w parę [9, 100, 103] jest stały, równy G . Jego wartość ustala się na drodze empirycznej z mas jąder atomowych. Natężenie sił *pairing* zależy od liczby cząstek w układzie i liczby stanów jednocząstkowych rozpatrywanych w oddziaływaniu.

Bardziej eleganckim i uniwersalnym sposobem włączenia oddziaływań *pairing* na poziomie BCS² jest wygenerowanie elementów macierzowych tych oddziaływań przy założeniu odpowiedniej ich postaci v i następnie rozwiązanie rozszerzonych równań BCS. Ogólny element macierzowy G_{ij} , oddziaływania *pairing* jest

$$G_{ij} = \langle \bar{i} | v | j \rangle - \langle \bar{i} | v | \bar{j} \rangle. \quad (3.12)$$

W równaniu tym, $|i\rangle$ oraz $|\bar{i}\rangle$ są stanami jednocząstkowymi sprzężonymi relacją odwrócenia czasu.

Zakładając podwójną degenerację stanów (symetria odwrócenia czasu) równania na przerwy energetyczne (każdemu stanowi $|k\rangle$ odpowiada w ogólności inna przerwa energetyczna Δ_k) można w tym wypadku zapisać w postaci [103]

$$2\Delta_k = \sum_i \frac{G_{ki}\Delta_i}{\sqrt{(\epsilon_i - \lambda) + \Delta_i^2}}. \quad (3.13)$$

¹ Należy zauważyć, że nie bierzemy tu tymczasem pod rozwagę możliwości rzutowania na dobrą liczbę cząstek.

² Nie będą tu omawiane bardziej zaawansowane metody Hartree'ego–Focka–Bogoliubowa [102] czy też metoda współrzędnej generującej [104].

Wielkości ϵ_k są energiami jednocząstkowymi (np. wyznaczonymi z równania (3.9)), a λ jest energią Fermiego układu. Podobnie jak w przypadku stałego G , równanie liczby cząstek jest

$$n = 2 \sum_k v_k^2 = \sum_k \left(1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{E_k} \right), \quad (3.14)$$

gdzie E_k jest energią kwazicząstki

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta_k^2}. \quad (3.15)$$

Nieliniowe równania BCS (3.13 i 3.14), w ilości $K + 1$, gdzie K jest liczbą poziomów włączonych w zakres działania sił *pairing*, rozwiązujemy oddzielnie dla protonów i neutronów. Liczba K i wielkość elementów macierzowych G_{ij} nie są tutaj tak ściśle związane jak w przypadku stałego natężenia G sił *pairing* (patrz [105]).

Pełna energia układu jest sumą energii Skyrme'a–Hartree'ego–Focka (SkHF) (3.4) i energii *pairing*

$$E_{\text{pair}} = E_{\text{pair},n} + E_{\text{pair},p}, \quad (3.16)$$

gdzie $E_{\text{pair},q}$ jest energią *pairing* dla protonów ($q = p$) lub neutronów ($q = n$). Np. dla protonów

$$E_{\text{pair},p} = -\frac{1}{4} \sum_k \frac{\Delta_{k,p}}{E_{k,p}} \quad (3.17)$$

i podobnie dla neutronów.

W dalszej dyskusji przyjmiemy, że oddziaływanie *pairing* jest postaci

$$v(\vec{r}) = V^\delta(\vec{r}) = v_0 \delta(\vec{r}), \quad (3.18)$$

gdzie v_0 jest stałe i ujemne. Jest to więc oddziaływanie przyciągające zerowego zasięgu. W teorii SkHF, elementy macierzowe oddziaływania v danego w tej postaci, łatwo jest policzyć numerycznie według wzoru

$$G_{kl} = v_0 \int d^3\vec{r} \sum_\sigma |\phi_{k,\sigma}|^2 \sum_\sigma |\phi_{l,\sigma}|^2. \quad (3.19)$$

W tym wzorze, $\phi_{k,\sigma}$ jest k -tym, jednocząstkowym stanem nukleonu o jawnie zapisanej, określonej wartości spinu σ .

Jednymi z pierwszych obliczeń, w których zastosowano oddziaływanie $\delta(\vec{r})$, były obliczenia przeprowadzone w pracach [105, 106, 107] oraz w [108, 20].

W ostatnich dwu pracach, autorzy używają dodatkowo metody Lipkina–Nogamiego do korekcji energii układu [109, 110, 111, 112]. Metoda ta zostanie omówiona później. Uzyskane tam wyniki potwierdziły użyteczność wprowadzenia sił *pairing* typu δ .

Podobne lecz rozszerzone o zależność od gęstości siły *pairing*, zastosowano w obliczeniach HFB, w pracach [102, 113, 114, 115]. Używane siły były postaci

$$V^{\delta\rho}(\vec{r}_{12}) = (V_0 + \frac{1}{6}\rho^\gamma V_3)\delta(\vec{r}_{12}). \quad (3.20)$$

Człon zawierający gęstość wprowadza tutaj szczególną zależność sił *pairing* od odległości od centrum jądra. Ponieważ gęstość przy powierzchni jądra jest mała w porównaniu z gęstością centralną, człon ten dla $\gamma < 0$ rośnie w stosunku do wartości centralnej i jego wkład przy powierzchni jądra przewyższa wkład członu pierwszego. Podobne siły *pairing* o skończonym zasięgu badali Kuzmenko i Mikhajlov [116]. Ich modelowe obliczenia potwierdzają, że największe siły *pairing* występują w obszarach małych gęstości, przy powierzchni jądrowej.

3.1.2. Metoda Lipkina–Nogamiego

Przy okazji omawiania metod stosowanych w obliczeniach BCS, warto przypomnieć, że funkcje BCS nie są funkcjami własnymi operatora liczby cząstek. Jest to ich wadą. Istnieje kilka sposobów korygowania obserwabli związanych z układem. Jednym z nich jest przepis podany przez Nogamiego w latach sześćdziesiątych [109, 110, 111] i rozwinięty następnie w pracy [112]. Oprócz przybliżenia Lipkina–Nogamiego istnieją metody dokładne [117]. Metoda Nogamiego jest łatwiejsza w użyciu, szybsza i wystarcza do poprawiania energii BCS.

Jej założenie można sprowadzić do dwóch żądań

$$\langle \hat{n} \rangle = n,$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle^2. \quad (3.21)$$

Oznaczają one, że a) liczba cząstek w układzie jest zachowana i b) fluktuacja kwadratowa liczby cząstek znika. Warunki te, w przypadku uogólnionych oddziaływań *pairing* prowadzą do nowego wyrażenia dla energii układu, poprawionego o dodatkowy człon

$$-2\lambda_2 \sum_k v_k^2 u_k^2, \quad (3.22)$$

w którym λ_2 otrzymuje się z równania

$$\lambda_2 = \frac{G}{4} \left[\frac{\left(\sum_k u_k^3 v_k \right) \left(\sum_k v_k^3 u_k \right) - \sum_k u_k^4 v_k^4}{\left(\sum_k u_k^2 v_k^2 \right)^2 - \sum_k u_k^4 v_k^4} \right], \quad (3.23)$$

gdzie

$$u_k^2 = 1 - v_k^2, \quad (3.24)$$

a k przebiega po oddziałujących stanach *pairing*.

3.1.3. Poprawka rotacyjna

Obliczenia HF łamią również symetrię obrotową układu. Moment pędu nie jest zachowany. Oznacza to, że funkcja falowa układu jądra jest kombinacją funkcji o różnych momentach pędu. Ma to miejsce również w przypadku stanu podstawowego. Wnioskujemy stąd, że należy poprawić utraconą symetrię. Do pewnego stopnia jest to możliwe.

Problemowi przywrócenia symetrii w układach Hartree'ego-Focka poświęcono wiele miejsca w literaturze fizycznej [100]. Najbardziej intuicyjną jest następująca metoda. Załóżmy, że moment pędu w rozważanym stanie podstawowym powinien zniknąć. Ponieważ wartość średnia kwadratu momentu pędu w stanie podstawowym otrzymanym w procedurze HF jest równa $\langle \hat{j}^2 \rangle \neq 0$, oznacza to, że układ posiada *dodatkową* energię obrotową równą $\langle \hat{j}^2 \rangle / (2\mathcal{J})$. Przyпускаjemy, że energia

stanu podstawowego układu będzie równa energii HF pomniejszonej o tę nadwyżkę energii obrotowej. W przypadku innych obserwabli należy naszkicowaną metodę zamienić na ogólniejszą.

Istnieją sposoby przywracania symetrii przez rzutowanie funkcji układu na podprzestrzeń o określonych własnościach – w dyskutowanym przypadku na podprzestrzeń o zadanym (u nas zerowym) momencie pędu. Jedną z takich metod jest metoda podana przez Kamlaħa [118]. W przypadku momentu pędu, ma ona zastosowanie w układach silnie zdeformowanych. Naszkicujemy tylko tę metodę. Jej opis można znaleźć w pracach [118, 100]. Zakłada się, że układ jest silnie zdeformowany ($\langle \hat{J}^2 \rangle \gg 1$), posiada określoną sygnaturę (tzn. $e^{i\pi \hat{J}_z} |\rangle \sim |\rangle$) oraz prawie osiową symetrię w stanach o małych momentach pędu I. Energię E_{proj}^I , w wyrzutowanym stanie $|IM\rangle$, o dobrym momencie pędu I i jego trzeciej składowej M można zapisać jako wartość oczekiwaną operatora Hamiltona H w tym stanie. Mamy

$$\begin{aligned} E_{\text{proj}}^I &= \langle IM|H|IM\rangle = \frac{\langle HP_M^I \rangle}{\langle \hat{P}_M^I \rangle} \\ &= \langle H \rangle - \frac{\langle \Delta \hat{J}^2 \rangle}{2\mathcal{J}} + \omega(\sqrt{I(I+1) - \langle \hat{J}_x \rangle}) + \frac{1}{2\mathcal{J}}(\sqrt{I(I+1) - \langle \hat{J}_x \rangle})^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Przybliżony operator rzutowania P_M^I jest postaci

$$P_M^I = \sum_K P_{MK}^I = \sum_K \sqrt{\frac{2I+1}{8\pi^2}} \int d\Omega D_{MK}^{I*}(\Omega) \hat{R}(\Omega). \quad (3.26)$$

Występują tu znane wielkości, macierze Wignera $D_{MK}^I(\Omega)$ oraz operator obrotu układu $\hat{R}(\Omega)$. Moment bezwładności jądra \mathcal{J} , występujący w (3.25) jest dany równością

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{\langle (H - \langle H \rangle) \Delta \hat{J}^2 \rangle}{\langle \Delta \hat{J}_x^2 \rangle^2 + \langle \Delta \hat{J}_y^2 \rangle^2 + \langle \Delta \hat{J}_z^2 \rangle^2}. \quad (3.27)$$

Dokonując wariacji E_{proj}^I względem funkcji stanu $|\rangle$ przy zaniedbaniu w wariacji poprawki „rotacyjnej” $\langle \Delta \hat{J}^2 \rangle / 2\mathcal{J}$ i przy warunku

$$\langle \hat{J}_x^2 \rangle = \sqrt{I(I+1) - \langle \hat{J}_z^2 \rangle}, \quad (3.28)$$

otrzymuje się równanie modelu wymuszonego obrotu (*cranking*)

$$\delta(H - \omega \hat{J}_x) = 0. \quad (3.29)$$

W stanie podstawowym jądra parzysto-parzystego z $I = 0$, dostaniemy

$$E_{\text{proj}}^I = \langle H \rangle - \frac{\langle \hat{J}^2 \rangle}{2\mathcal{I}}. \quad (3.30)$$

W obliczeniach jakie przeprowadzimy w tej pracy, zakłada się dla uproszczenia, że moment bezwładności \mathcal{I} jest momentem Belyaeva [119].

3.1.4. Obliczenia z więzami

W wielu przypadkach zachodzi potrzeba wykonania samozgodnych obliczeń HF z więzami. Pozwala to wyznaczyć energię w funkcji parametrów charakteryzujących układ. Przykładem mogą służyć obliczenia barier potencjału jądrowego [120]. Stosuje się dwa podstawowe rodzaje więzów: liniowe i kwadratowe. Są one w pewnych wypadkach równoważne [100]. Będziemy stosować więzy kwadratowe. Zamiast minimalizować funkcjonal energii E (3.4), będziemy minimalizowali wielkość

$$E'(q) = E + \frac{1}{2}C(q - q_0)^2. \quad (3.31)$$

Parametrami q mogą być w szczególności momenty kwadrupolowe, przy czym q_0 oznacza wartość zadaną parametru, a q wartość obliczaną, zależną od stanu układu. Współczynnik sztywności C jest stały i powinien spełniać nierówność

$$C \gg \left| \frac{d^2 E}{dq^2} \right|, \quad (3.32)$$

w której, po prawej stronie, występuje druga pochodna wyznaczonej energii układu liczona po parametrze q . Problem polega na tym, że z góry tej zależności nie znamy, i dopiero *post factum* przekonujemy się o dobroci rachunku.

Można zadać dowolną liczbę więzów, które ma spełniać układ. Wykonując systematycznie wariacje równania (3.31) w wielu wybranych punktach q_0 można otrzymać numeryczną zależność $E(q)$. Ta „funkcja”, zależna od kolektywnego (najczęściej) parametru q , nazywa się energią potencjalną układu.

3.2. Relatywistyczny model średniego pola

Relatywistyczny model średniego pola (RMF) pomimo pewnych formalnych podobieństw, różni się zasadniczo od przedstawionego w rozdziale (3.1) modelu oddziaływań Skyrme'a. Różnica polega na zastąpieniu cząstek i sił jądrowych (potencjałów jądrowych) przez fermionowe pola nukleonów, które oddziałują między sobą wymieniając inne, ogólnie biorąc oddziałujące, pola bozonowe masowe lub tak jak foton, o zerowej masie. Jest tu zrealizowana stara idea oddziaływań jądrowych, zaproponowana przez Yukawę jeszcze w połowie lat trzydziestych – w okresie tworzenia podstaw fizyki jądrowej.

3.2.1. Oddziaływania NN

Model relatywistyczny powinien odzwierciedlać podstawowe własności oddziaływań nukleon–nukleon (NN). Jest to przede wszystkim, krótkozasięgowy charakter oddziaływań. Oddziaływanie NN na odległościach $\sim 2 \div 3$ fm powinno mieć charakter przyciągający, natomiast na odległościach $< 0,6$ fm powinno być odpychające (twardy rdzeń). Następną cechą, która wyróżnia oddziaływania NN wśród innych, jest oddziaływanie spinowo–orbitalne. Cecha ta wiąże się z relatywistycznym opisem fermionów – z równaniem Diraca [121]. W modelach już dyskutowanych (mikroskopowo–makroskopowych i Skyrme'a) oddziaływania te są dodane do oddziaływań centralnych niejako z zewnątrz. Widzimy więc, że nowa teoria powinna być oparta na równaniu Diraca. Oddziaływania zaś powinny być opisane przez odpowiednie niezmienniki transformacji Lorentza i wbudowane w funkcję Lagrange'a teorii. Oznaczmy spinorowe pola nukleonowe przez ψ . Niezmiennik zbudowany jest z dirakowskiego skalaru $\bar{\psi}\psi$, wektora $\bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$, itd. oraz partnera, którym jest odpowiednie pole tensorowe. Te pola tensorowe można utożsamiać z polami mezonowymi pośredniczącymi w oddziaływaniach. Żądania nakładane na teorię powinny zdecydować, które z niezmienników wejdą do gęstości funkcji Lagrange'a. Obecna wiedza o oddziaływaniach NN wynika głównie z badania rozpraszania NN i przynosi dokładne informacje o realizacji oddziaływań

nukleon–nukleon z wymianą mezonów. W tabeli 3.2 (zaadoptowanej za pracą [122] str. 214) zestawiono podstawowe charakterystyki sił wynikające z analizy różnego typu niezmienników, a z drugiej strony, możliwe cząstki pośredniczące w oddziaływaniach NN. W kolumnie pierwszej, skróty oznaczają s: skalar, ps: pseudo-skalar, w: wektor oraz t: tensor.

Tablica 3.2. Sprężenia mezon-nukleon i ich wkłady do sił jądrowych. I oznacza izospin bozonu. (Podane za pracą [122])

sprężenie	I = 0 [1]	I = 1 [$\tau_1 \cdot \tau_2$]	Centralne [1]	Spin-Spin [$\sigma_1 \cdot \sigma_2$]	Tensorowe [S_{12}]	Spin-Orbita [$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$]
ps	η (słabe)	π (silne)	–	Słabe, zgodne z w, t	Silne	–
s	σ (silne)	δ (słabe)	Silne, przyciągające	–	–	Zgodne z w
w	ω (silne)	ρ (słabe)	Silne, odpychające	Słabe, zgodne z ps	Przeciwne do ps	Silne, zgodne z s
t	ω (słabe)	ρ (silne)	–	Słabe, zgodne z ps	Przeciwne do ps	–

Tablica 3.3. Lekkie mezony o masach < 1000 MeV [123]. Oznaczenia: spin J; parzystość P; izospin, I; G–parzystość G.

Mezon	J ^P	I ^G	Masa (MeV)	Szerokość (MeV)	Główny sposób rozpadu
π^\pm	0 ⁻	1 ⁻	140,98	0	$\mu^\pm \nu$
π^0	0 ⁻	1 ⁻	135,57	0	$\gamma\gamma$
η	0 ⁻	0 ⁺	547,45	1,20	$\gamma\gamma, 3\pi^0$
ρ	1 ⁻	1 ⁺	769,9	151,2	2π
ω	1 ⁻	0 ⁻	781,94	8,43	3π
η'	0 ⁻	0 ⁺	957,77	0,2	$\eta\pi\pi$
f_0	0 ⁺	0 ⁺	980	40–400	$2\pi, K\bar{K}$
a_0	0 ⁺	1 ⁻	982,4	500–300	$\eta\pi, K\bar{K}$

W następnej tabeli, (3.3), przedstawione są mezony, które można uważać za nośniki oddziaływań NN, zapewniające żądany krótkozasięgowy charakter sił jądrowych. Tabela oparta jest na danych zespołu Particle Data Group [123].

Analiza obu tabel pozwala przypuszczać, że relatywistyczny model polowy, oprócz oczywistych pól nukleonowych (ψ) oraz pola elektromagnetycznego (A^μ), mógłby zawierać następujące pola (cząstki) pośredniczące: pole izowektorowo–pseudoskalarne ($\vec{\pi}$), pole izoskalarno-wektorowe ω i pole izowektorowo–wektorowe $\vec{\rho}$.

Trzy typy mezonów ($\vec{\pi}$, $\vec{\rho}$ i ω) odtwarzają prawie wszystkie własności sił jądrowych z wyjątkiem przyciągania w obszarze pośrednim. Tę własność odtwarzałby skalarno–izoskalarny bozon o masie w granicach 500–700 MeV. Takiego bozonu niestety nie obserwuje się w doświadczeniu ale wprowadza się go do teorii dla zapewnienia brakującego przyciągania. Wyprzedzając nieco fakty, można dodać, że hipotetyczne pole σ bierze na siebie odpowiedzialność za różne utracone efekty, związane z przedstawionym minimalnym wyborem pól teorii. Można też powiedzieć, że mezony skalarne σ są to parzyste nienaładowane układy pionów sprzężonych do momentu pędu $J = 0$.

Piony odpowiadają za oddziaływania dalekie. Przy opisie stanów podstawowych jąder, o określonej parzystości, pseudoskalarne pojedyncze pola pionowe π są niedopuszczalne. Pole ω odpowiada za odpychanie w obszarze twardego rdzenia, oraz reguluje oddziaływanie spin–orbita, a pole $\vec{\rho}$ jest odpowiedzialne za efekty izospinowe.

Okazało się, że pozostałe mezony z tabeli (3.3) nie ulepszają modelu na tyle by w nim występować. Dzieje się tak ze względu na małe stałe sprzężenia z polami nukleonowymi lub duże masy mezonów.

3.2.2. Krótka historia modelu RMF

Pierwsze modele RMF jądra atomowego, sugerowano jeszcze w latach pięćdziesiątych. Praca Johnsona i Tellera [124] pokazała, że zależne od pędu oddziaływanie pola skalarnego z nukleonem pozwala otrzymać wysycenie sił jądrowych. W jednej z następnych prac Duerr [125] analizował oddziaływanie spin–orbita oraz potencjały optyczne wynikające z teorii relatywistycznej. W pracy [126] Miller wyznaczył momenty magnetyczne jąder. Przełom w badaniach struktury jądra w ramach RMF nastąpił po ukazaniu się w roku 1974 pracy Walecki [127]. Model ten analizował

równanie stanu i własności gęstej materii jądrowej w oparciu o mezony wektorowe i skalarne oraz w oparciu o formalizm Lagrange'a.

Późne lata siedemdziesiąte i następnie osiemdziesiąte to lata renesansu teorii. Oprócz prac dotyczących materii jądrowej, pojawia się cały szereg prac dotyczących jądra atomowego. Ich tematyka dotyczy wszystkich zagadnień, którymi zajmuje się fizyka jądrowa poczynając od własności jąder atomowych w stanach podstawowych [128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135], hiperjąder [136], poprzez opis stanów wzbudzonych, wysokospinowych [137], opis oddziaływania spin-orbita w jądrach superzdeformowanych [138], badania jąder egzotycznych [139] aż do obliczeń barier na rozszczepienie [140, 141].

Bardzo wiele miejsca poświęca się badaniu struktury tego typu teorii, oraz możliwości jej renormalizacji. Wymienić należy prace [127, 142, 143] oraz prace [144, 145, 146, 147], w których badano wpływ zaniedbywanych na poziomie fenomenologicznym efektów polaryzacji próżni (poprawki Focka; patrz dalej).

3.2.3. Gęstość funkcji Lagrange'a i równania pola

Z tego, co zostało powiedziane na temat oddziaływań NN poprzez pola mezonowe, wynika, że gęstość funkcji Lagrange'a relatywistycznego modelu polowego (RMF) jądra powinna mieć postać³ [148, 135]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - U(\sigma) - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}\Omega^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu} - \frac{1}{4}\vec{R}_{\mu\nu}\vec{R}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2\vec{\rho}_{\mu}\vec{\rho}^{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ & + g_{\sigma}\bar{\psi}\psi - g_{\omega}\omega_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - g_{\rho}\vec{\rho}_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\vec{\tau}_N\psi - eA^{\mu}\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Wielkości γ_{μ} są macierzami Diraca. Tensory drugiego rzędu $\Omega^{\mu\nu}$, $\vec{R}^{\mu\nu}$ i $F^{\mu\nu}$ są tensorami polowymi opisującymi swobodne pola ω^{μ} , $\vec{\rho}^{\mu}$ oraz pole

³ Wszędzie dalej przyjmujemy jednostki $\hbar = c = 1$.

elektromagnetyczne A^μ . Definiują je równania

$$\begin{aligned}\Omega^{\mu\nu} &= \partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu, \\ \vec{R}^{a\mu\nu} &= \partial^\mu \vec{\rho}^{a\nu} - \partial^\nu \vec{\rho}^{a\mu} + g_\rho \epsilon_{abc} \rho^{b\mu} \rho^{c\nu}, \\ F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Pole $\vec{\rho}^\mu$ jest wektorem czasoprzestrzennym (wskaźniki greckie μ, ν, \dots) oraz izowektorem (strzałka nad nazwą pola lub wskaźniki łacińskie a, b, \dots).

Równanie (3.33) zawiera prócz tego, nieliniowy potencjał

$$U(\sigma) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{3} g_2 \sigma^3 + \frac{1}{4} g_3 \sigma^4.\tag{3.35}$$

Został on wprowadzony do teorii przez Bodmera i Bogutę [149, 128, 150] i pozwala na lepszy opis wielu charakterystyk jądrowych. W pierwszych pracach dotyczących własności jądrowych [129] człon ten nie występował. Podana postać $U(\sigma)$ jest najprostszą i zapewnia renormalizowalność teorii. Wynika to z kwantowej teorii pola, w której efekty dodawania nieliniowości tego typu były wielokrotnie dyskutowane (patrz np. [151, 152]). Człon ten wygodnie jest potraktować jako fenomenologiczne rozszerzenie teorii o proste efekty nieliniowe.

Stałymi parametrami teorii są natężenia oddziaływań i masy bozonów:

- g_σ – wielkość yukawowskiego oddziaływania pola sigma i pola nukleonu,
- g_ρ – wielkość oddziaływania pola ρ i pola nukleonu,
- g_ω – wielkość siły ω -nukleon,
- g_2 – stała w potencjale nieliniowym $U(\sigma)$ w członie sześciennym σ^3 ,
- g_3 – stała w potencjale nieliniowym $U(\sigma)$ w członie czwartego rzędu σ^4 ,
- m_σ – masa pomocniczego pola σ .

Pozostałe wielkości to stała struktury subtelnej $e^2 = 1/137$ oraz masa nukleonu m . Masy mezonów ρ i ω : m_ρ, m_ω można zasadniczo wziąć z doświadczenia. Praktyka pokazuje jednak, że lepiej traktować je jako parametry swobodne. W ten sposób teoria posiada sześć lub osiem swobodnych parametrów, które należy wyznaczyć z doświadczenia.

Istnieją dwie metody dalszego postępowania, obie służące wyznaczeniu równań ruchu pól wchodzących do teorii.

Jedną z nich (historycznie młodszą) jest następująca [17, 133]. Buduje się tensor energii pędu $T^{\mu\nu}$ odpowiadający gęstości funkcji Lagrange'a (3.33), i dalej wylicza się wartość średnią $H(r)$ jego składowej T^{00} – gęstość energii, w ogólnym stanie wielociałowym. Funkcjonał energii, podobnie jak w przypadku $E(r)$ z modelu SkHF (patrz równanie (3.4)), minimalizuje się przy warunku unormowania spinorów ψ , metodami wariacyjnymi. Stąd dostaje się równania ruchu wszystkich pól, fermionowych i bozonowych. Metoda ta jest wygodna jeśli wzbogacamy teorię o takie efekty jak dyskutowany potencjał nieliniowy lub efekty związane z wprowadzeniem oddziaływań *pairing*.

Drugą metodą jest równoważna metoda wariacji funkcjonału działania zbudowanego z gęstości funkcji Lagrange'a (3.33). Odpowiadające równania Eulera–Lagrange'a przechodzą kolejno w równania Diraca dla pól fermionowych, równania Kleina–Gordona dla bozonów masowych i równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego.

Należy dokładniej sprecyzować warunki przy jakich będziemy stosować teorię. Uproszczenia i przybliżenia modelu można przedstawić w kilku punktach.

1. Najważniejszym uproszczeniem jest przybliżenie średniego pola. Polega ono na zastąpieniu pól mezonowych ich wartościami oczekiwanymi w stanie próżni (podstawowym). Oznacza to, że zanedbujemy fluktuacje pól mezonowych.
 2. Zakładamy, że model nie przewiduje mieszania się jednocząstkowych stanów protonowo–neutronowych. Stąd wynika, że niezerowymi składowymi wszystkich pól teorii w przestrzeni izospinowej będą obojętne składowe zerowe.
 3. Następnym jest założenie stacjonarności. Wynika z niego, że pochodne czasowe pól (i wszystkich gęstości) znikają. Znikają również składowe przestrzenne tych wielkości.
 4. W stosunku do pól nukleonowych przyjmujemy przybliżenie Hartree'ego, a więc zanedbujemy korelacje wielocząstkowe. Prócz tego przyjmujemy tzw. przybliżenie *no sea*, to znaczy, że w zanedbujemy antycząstki.
- Są to bardzo silne założenia. Nie pozbawiają one jednak teorii podstawowych cech teorii polowej. W rezultacie tych założeń liczba pól

występujących w teorii redukuje się do pól nukleonowych, pola σ i składowych ρ_0^0 , ω^0 i A_0 pól bozonowych. Biorąc to pod uwagę, otrzymamy następujące równania Diraca dla pól nukleonowych

$$\{-i\alpha\nabla + V(\mathbf{r}) + \beta[m + S(\mathbf{r})]\}\psi_i = \varepsilon_i\psi_i. \quad (3.36)$$

W odróżnieniu od równań dla pól swobodnych fermionów o masie m , równania te opisują ruch nukleonów w potencjale wektorowym

$$V(\mathbf{r}) = g_\omega\omega_0(\mathbf{r}) + g_\rho\tau_3\rho_0(\mathbf{r}) + e\frac{1 + \tau_3}{2}A_0(\mathbf{r}). \quad (3.37)$$

Z postaci równania Diraca (3.36) wynika, że masa efektywna nukleonu w jądrze, $m^*(\mathbf{r})$, jest równa

$$m^*(\mathbf{r}) = m + S(\mathbf{r}), \quad (3.38)$$

gdzie $S(\mathbf{r})$ jest potencjałem skalarnym

$$S(\mathbf{r}) = g_\sigma\sigma(\mathbf{r}). \quad (3.39)$$

Masa efektywna m^* zależy od położenia \vec{r} i tylko tam, gdzie $S = 0$ jest równa masie nukleonu swobodnego m .

Dla masywnych pól mezonowych równaniami pola są równania Kleina–Gordona

$$\{-\Delta + m_\sigma^2\}\sigma(\mathbf{r}) = -g_\sigma\rho_s(\mathbf{r}) - g_2\sigma^2(\mathbf{r}) - g_3\sigma^3(\mathbf{r}), \quad (3.40)$$

$$\{-\Delta + m_\omega^2\}\omega_0(\mathbf{r}) = g_\omega\rho_v(\mathbf{r}), \quad (3.41)$$

$$\{-\Delta + m_\rho^2\}\rho_0^0(\mathbf{r}) = g_\rho\rho_3(\mathbf{r}), \quad (3.42)$$

a dla pola elektromagnetycznego jest to równanie Maxwella

$$-\Delta A_0(\mathbf{r}) = e\rho_c(\mathbf{r}). \quad (3.43)$$

Występujące po prawych stronach tych równań człony źródłowe są gęstościami zbudowanymi z pól fermionowych (patrz analogiczne wyrażenia w teorii SkHF (3.5)):

$$\begin{aligned}
 \rho_s &= \sum_i w_{i,q} \bar{\psi}_i \psi_i, \\
 \rho_v &= \sum_i w_{i,q} \psi_i^\dagger \psi_i, \\
 \rho_3 &= \sum_{p=1}^Z w_{i,p} \psi_p^\dagger \psi_p - \sum_{n=1}^N w_{i,n} \psi_n^\dagger \psi_n, \\
 \rho_c &= \sum_{p=1}^Z w_{i,p} \psi_p^\dagger \psi_p.
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Wielkości $w_{i,q}$ są to prawdopodobieństwa obsadzenia stanów jednonukleonowych. Tymczasem założymy, że $w_i = 1$ dla stanu obsadzonego, a dla pustego $w_i = 0$.

Warto zwrócić uwagę na gęstość ρ_3 , która jest różnicą protonowej i neutronowej gęstości wektorowej $\rho_{v,p} - \rho_{v,n}$. Wielkość tego członu odpowiada za efekty asymetrii izospinowej. Wielkość ρ_c jest rozkładem gęstości ładunku pochodzącego od „punktowych” protonów w jądrze (suma przebiega tylko po protonach).

3.2.4. Metodyka obliczeń

Następny krok polega na określeniu symetrii przestrzennej rozpatrywanego układu jądrowego. Z praktyki wiadomo, że założenie symetrii osiowej w układach jądrowych wystarcza w wielu wypadkach do opisu ich podstawowych własności. Założenie to jednocześnie bardzo upraszcza rozważania i obliczenia. W modelu RMF, który będziemy dalej rozwijać i stosować, zakładamy dokładną symetrię osiową jąder. Czasami do obliczeń wystarcza założenie symetrii sferycznej. W tym wypadku, całkowanie równań ruchu i obliczenia energii układu i innych obserwabli jest prawie banalne.

W celu rozwiązania równań pola (3.36) i (3.40–3.42) postępujemy w ogólności według następującego schematu. Zakładamy jakieś próbne rozkłady gęstości występujące po prawych stronach równań Diraca (3.36)

oraz Kleina–Gordona (3.40–3.42) i rozwiązujemy te równania w jakiś sposób. Ze znalezionych funkcji pól budujemy na podstawie równań (3.44) nowe gęstości. Procedurę tę powtarzamy tak długo aż otrzymane nowe gęstości przestaną się różnić od gęstości z poprzedniego kroku. Metoda ta może być poprawiona o elementy dotyczące zbieżności oparte na badaniu funkcjonału energii układu

$$E[\rho_s, \rho_v, \rho_3, \rho_c] = \int H(r) d^3\vec{r}. \quad (3.45)$$

W przypadku układów osiowych obliczenia przeprowadza się w bazie funkcji własnych potencjału oscylatora zdeformowanego, dla którego związki między parametrami długości (b_0) i deformacjami (β_b) bazy jednoczątkowych stanów nukleonowych, są zadane według formuł

$$\begin{aligned} b_z &= b_z(b_0, \beta_b) = b_0 \exp(\sqrt{5/(16\pi)}\beta_b) \\ b_\perp &= b_\perp(b_0, \beta_b) = b_0 \exp(-\sqrt{5/(64\pi)}\beta_b) \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.2.5. Modyfikacje potencjału $U(\sigma)$

Potencjał $U(\sigma)$ wybrany został jako najprostszy i zapewnia dodatkowo, że teoria jest renormalizowalna [149].

Najlepsze dopasowanie parametrów teorii odpowiadają jednakże ujemnym, niefizycznym wartościom parametru g_3 [149, 131]. Potencjał dla dużych wartości pola σ dąży do $-\infty$. Prowadzi to np. do niestabilnych rozwiązań dla niektórych jąder. Przykładem jest węgiel ^{12}C , który jest niestabilny w większości znanych przypadków parametryzacji [153]. W związku z tym próbowano znaleźć nową postać potencjału $U(\sigma)$ [150, 153, 154, 141]. Potencjał zaproponowany przez Reinharda, tzw. nieliniowy funkcjonał stabilizujący, ma postać [141]

$$\begin{aligned} U(\sigma) &= \frac{1}{2} m_\infty^2 \sigma^2 + \Delta m^2 \left(\frac{\delta \sigma^2}{2} \left(\log \left(1 + \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\delta \sigma} \right)^2 \right) - \log \left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\delta \sigma} \right)^2 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sigma \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{\sigma_0}{\delta \sigma} \right)^2 \right)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Trzy stare parametry m_σ , g_2 i g_3 zostały tu zastąpione przez cztery nowe m_∞ , Δm^2 , σ_0 oraz $\delta \sigma$. Istnieją przybliżone związki pomiędzy nimi.

Bodmer i Price podają inną możliwość. Ich potencjał [150] jest

$$U(\sigma) = \frac{\sigma^2 m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} + \left(\frac{1}{2} A \sigma^3 - \frac{1}{4} |B| \sigma^4 \right) e^{-|\sigma|/M_c}, \quad (3.48)$$

gdzie $M_c \sim \mathcal{O}(m)$.

Postać potencjału Reinharda (3.47) wykorzystano dalej w badaniu mas i promieni jąder kulistych. Zastosowaną w tym przypadku parametryzacją jest PL-40 (patrz tabela 3.5).

3.2.6. Parametry RMF

Istnieje kilkanaście parametryzacji modelu RMF. Nie jest z góry do końca jasne, które z nich są lepsze. W tej pracy używanych jest kilka parametryzacji w badaniach mas i promieni jąder kulistych i jedna parametryzacja dla wszystkich pozostałych obliczeń. Jest to parametryzacja Sharmy [155] zwana NL-SH.

Tablica 3.4. Parametry modeli RMF używanych w pracy (NL1 [156], NL2 [148], NL-SH [155], L-HS [129, 157])

NAZWA	M	m_σ	m_ω	g_σ	g_ω	g_ρ	g_2	g_3
—	MeV	MeV	MeV	—	—	—	—	fm ⁻¹
L-HS	938,9	520	783	10,4814	13,8144	8,08488	0	0
NL1	938,0	492,25	795,359	10,1377	13,2846	4,9755	-12,1724	-36,2646
NL2	938,0	504,89	780	9,11122	11,4928	5,5507	-2,30404	13,7844
NL-SH	939,0	526,059	783	10,444	12,945	4,383	-6,9099	-15,8337

Tabela 3.4 przedstawia wybrane parametryzacje modelu oraz ich nazwy. Masa nukleonu jest równa $m = 938$ MeV, a masa mezonu ρ , $m_\rho = 763$ MeV. Wyjątek stanowi parametryzacja L-HS, w której $m = 938,9$ MeV, $m_\rho = 770$ MeV. W tabeli 3.5 przedstawione są parametry modelu Reinharda PL-40.

Tablica 3.5. Parametryzacja Reinharda PL-40 modelu RMF [141, 154]. Jednostki: $1 \text{ fm}^{-1} = 197,327 \text{ MeV}$.

M	m_ω	m_ρ	g_σ	g_ω	g_ρ	m_∞	Δm^2	$\delta\sigma$	$\delta\sigma_0$
MeV	MeV	MeV	–	–	–	fm^{-2}	fm^{-2}	fm^{-1}	fm^{-1}
938,9	780	763	10,0514	12,8861	4,81014	4,0	3,70015	0,269688	-0,111914

Jak znaleźć parametry modelu?

Warto zwrócić uwagę na sposób w jaki sposób wyznaczane są parametry modelu RMF. Najdokładniej traktują o tym prace [148, 156, 154, 130]. W bardziej podstawowych badaniach materii jądrowej, sprawdza się przede wszystkim energię wiązania na nukleon ($-15, 75 \text{ MeV}$), gęstość materii jądrowej ($1,4 \text{ fm}^{-3}$) oraz parametr ściśliwości, który nie jest wielkością mierzoną ($K=211,7$ dla sił NL1, $K=399,2 \text{ MeV}$ dla sił NL2, $K=626,3 \text{ MeV}$ dla modelu kroplowego [154]). W obliczeniach jądrowych, dodatkowo, dopasowuje się masy, średnie promienie rozkładu ładunku oraz różnice promieni rozkładów protonów i neutronów w ośmiu jądrach magicznych: ^{16}O , ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{56}Ni , ^{90}Zr , ^{116}Sn , ^{124}Sn i ^{208}Pb . Liczba danych doświadczalnych jest ograniczona do 24 danych (8×3). Ta minimalna liczba danych opisujących jądra z całego zakresu mas, powinna według wielu autorów wystarczyć na znalezienie optymalnej parametryzacji modelu. Z pokazanej w tabelach 3.4 i 3.5 liczby parametryzacji modelu wynika co innego. Wydaje się, że odtworzenie danych dla wybranej grupy jąder wcale nie gwarantuje dobrej interpretacji danych w szerszym zakresie. Pokazują to obliczenia mas, które przedstawione będą w jednym z następných rozdziałów.

3.3. *Observable*

W części tej zdefiniowane są wielkości, które będą następnie wyliczone i porównane do zmierzonych. Większość z nich obliczono używając modeli SkHF oraz RMF.

3.3.1. Masa jądra

Energie wiązania są najważniejszą charakterystyką jądra w jego stanie podstawowym. Ich odtworzenie stanowi o dobroci modelu. Całkowita energia układu, poprawiona o przybliżoną energię fikcyjnego ruchu środka masy, który jest wynikiem łamania symetrii translacyjnej w użytej metodzie Hertree–Focka⁴ oraz energię korelacji *pairing*, jest w modelu RMF następującą sumą

$$\begin{aligned}
 E(\psi_i^\dagger, \psi_i, \sigma, \omega^0, \rho_0^0, A^0, v_i) = \\
 = E_{\text{nukl}} + E_\sigma + E_\omega + E_\rho + E_c + E_{\text{pair}} + E_{\text{CM}} + AM. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

⁴ Przyjmuje się też inną postać tego członu, np. w pracy [154] człon E_{CM} wylicza się mikroskopowo jako $E_{\text{CM}} = -\langle \hat{p}^2 \rangle / (2Am_N)$. Inne, przybliżone wartości to $-17, 2A^{-0,2}$ MeV lub $-30, 75A^{-1/3}$ MeV [148]. Postać E_{CM} odpowiada konkretnej parametryzacji modelu. Podana tutaj poprawka jest związana z parametryzacjami NL1 i NL-SH.

Kolejne składowe tej sumy to

$$\begin{aligned}
 E_{\text{nukl}} &= \sum_i w_i \epsilon_i && \text{wkład nukleonów} \\
 E_{\sigma L} &= -\frac{g_\sigma}{2} \int d^3\vec{r} \rho_s(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) && \text{wkład pola sigma} \\
 E_{\sigma NL} &= -\frac{1}{2} \int d^3\vec{r} \left\{ \frac{2}{3} g_2 \sigma(\vec{r})^3 + \frac{1}{2} g_3 \sigma(\vec{r})^4 \right\} && \text{wkład członów nieliniowych} \\
 E_\omega &= -\frac{1}{2} g_\omega \int d^3\vec{r} \rho_v(\vec{r}) \omega^0(\vec{r}) && \text{wkład pola } \omega \\
 E_\rho &= \frac{g_\rho}{2} \int d^3\vec{r} \rho_3(\vec{r}) \rho_0^0(\vec{r}) && \text{wkład pola } \rho \quad (3.50) \\
 E_c &= \frac{-e^2}{8\pi} \int d^3\vec{r} \rho_c(\vec{r}) A^0(\vec{r}) && \text{wkład pola Coulomba} \\
 E_{\text{pair}} &= -\Delta \sum_{i>0} w_i (1 - w_i) && \text{wkład } \textit{pairing} \\
 E_{\text{CM}} &= -\frac{3}{4} \cdot \hbar \omega_0 = -\frac{3}{4} 41 A^{-1/3} && \text{wkład drgań środka masy}
 \end{aligned}$$

Ponieważ model RMF, podobnie jak model SkHF, nie zawiera sam w sobie oddziaływań *pairing*, należy go o tę energię uzupełnić. Przyjęta postać poprawki *pairing* odpowiada modelowi, w którym zakłada się znajomość $\Delta_{n,p}$ (np. z doświadczenia). W innych modelach, gdzie parametry Δ wyznaczane są na podstawie znajomości natężenia sił *pairing* G , ta składowa energii wymaga modyfikacji. Jej wymienna postać jest

$$E_{\text{pair}} = -G \left(\sum u_k v_k \right)^2. \quad (3.51)$$

Jednocześnie, we wszystkich gęstościach występujących w teorii (równania 3.44) należy uwzględnić odpowiednie prawdopodobieństwa obsadzeń $w_{k,p(n)}$ stanów jednocząstkowych protonowych (p) lub neutronowych (n). Współczynniki obsadzeń w_k otrzymuje się, podobnie jak opisano dla przypadku SkHF, z odpowiednich równań *pairing* (patrz część 3.1.1). W wielu pracach stosuje się uproszczone metody traktowania oddziaływań *pairing*, przyjmując np. doświadczalne (wyznaczone z mas jąder) przerwy energetyczne Δ i następnie, rozwiązując tylko jedno z równań BCS –

równanie na liczbę cząstek. Metoda ta nie nadaje się do obliczeń w tych rejonach układu okresowego, gdzie tych mas nie znamy.

Innym stosowanym uproszczeniem jest schematyczne traktowanie korelacji *pairing* Błockiego–Flocarda [158]. Współczynniki w_k oblicza się ze wzoru

$$w_k = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{e_k - e_F}{\sqrt{(e_k - e_F)^2 + \Delta^2}} \right\}, \quad (3.52)$$

w którym ustalona jest przerwa energetyczna $\Delta = 11, 2/\sqrt{A}$ MeV. Położenie poziomu Fermiego e_F oblicza się z równania na liczbę cząstek. Zaletą tego modelu jest szybkość i niezawodność obliczeń. Taką metodę zastosowano np. w pracy [159].

W tej pracy korzystamy zarówno z metody z doświadczalną przerwą Δ jak też z metod bardziej zaawansowanych (siły δ , metoda Lipkina–Nogamiego; patrz (3.1.1))

3.3.2. Moment kwadrupolowy

Moment kwadrupolowy Q_2 jest podstawową miarą odstępstwa od symetrii sferycznej. Jest on zdefiniowany równością

$$Q_2 = \langle 2r^2 P_2(\cos \theta) \rangle = \langle 2z^2 - x^2 - y^2 \rangle. \quad (3.53)$$

Tutaj P_2 jest wielomianem Legendre'a, a kąt θ jest mierzony od osi symetrii jądra przebiegającej wzdłuż osi z układu współrzędnych.

Związek Q_2 z jądrową deformacją β można oszacować wykorzystując moment kwadrupolowy Q_2 i moment monopolowy Q_0 rozkładu materii w jądrze [160]

$$\beta_{n,p} = \frac{\langle Q_2 \rangle_{n,p}}{\langle Q_0 \rangle_{n,p}}. \quad (3.54)$$

Moment monopolowy rozkładu neutronowego $\langle Q_0 \rangle_n = N \langle \bar{r}^2 \rangle_n$, a protonowego $\langle Q_0 \rangle_p = Z \langle \bar{r}^2 \rangle_p$. Oszacowanie (3.54) jest słuszne tylko dla małych deformacji β .

3.3.3. Promień rozkładu ładunku i przesunięcia izotopowe

Rozkład ładunku w jądrze jest złożeniem (konwolucją) rozkładu $\rho_p(\vec{r})$ ładunku punktowych protonów (formuła (3.44)) oraz wewnętrznego rozkładu ładunku w protonie $\rho_{E,p}(r)$

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \rho_{E,p}(\vec{r} - \vec{r}') \rho_p(\vec{r}'). \quad (3.55)$$

Rozkład ładunku elektrycznego w protonie, przy założeniu jego symetrii sferycznej, dany jest jako rozkład gaussowski [131, 161, 135, 162]

$$\rho_E(r) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3.56)$$

Parametr σ i średni promień kwadratowy rozkładu ładunku w protonie $\langle r_{E,p}^2 \rangle^{1/2}$ wiąże relacja $\sigma = \sqrt{2/3} \langle r_{E,p}^2 \rangle^{1/2}$. Średni promień kwadratowy wewnętrznego rozkładu ładunku w protonie jest równy $\langle r_{E,p}^2 \rangle^{1/2} = 0,805 \pm 0,011$ fm [163]. Jest to kilkakrotnie mniej niż wynosi promień jądra. Z bardzo dużą dokładnością pracuje następujące przybliżenie dla promienia rozkładu złożonego r_{ch} (patrz [164, 160])

$$r_{ch} = \sqrt{r_p^2 + r_E^2} = \sqrt{r_p^2 + 0,64}. \quad (3.57)$$

To wyrażenie jest podstawą obliczeń średnich promieni kwadratowych. Dokładny promień kwadratowy wyliczony dla rozkładu (3.55) i promień (3.57) są praktycznie jednakowe.

Bardziej subtelny obraz struktury jądrowej obserwuje się w przyrostach promieni jądrowych wraz ze zmianą liczby nukleonów o jeden lub dwa – przesunięciach izotopowych. Wielkości te, oznaczane przez $\delta\langle r^2 \rangle$ są bezpośrednio mierzone przy użyciu nowoczesnych metod laserowych [165, 166]. Definicja $\delta\langle r^2 \rangle$ jest

$$\delta\langle r^2 \rangle^{1/2} = r_{ch}(A) - r_{ch}(A_0), \quad (3.58)$$

gdzie A jest liczbą masową badanego jądra, a A_0 jest liczbą masową jądra odniesienia. Najczęściej przyjmuje się, że jest to jądro magiczne lub półmagiczne.

Uwaga.

W roku 1972, Bertozzi i współpracownicy, opublikowali pracę o wpływie rozkładu ładunku elektrycznego i rozkładu momentu magnetycznego wewnątrz neutronu⁵ na czynniki kształtu jądra atomowego i związane z nimi rozkłady ładunków. Ich oszacowania dają zmniejszenie średniego promienia kwadratowego o wielkość $0,06N/(r_p Z)$. Daje to zanedbywalną poprawkę do promienia jądrowego (0,1%). Podobne efekty w obliczeniach HF rozkładów gęstości dyskutuje Campi [167].

Według pracy [168], wyrażenie na średni promień kwadratowy, uwzględniające efekty skończonych rozkładów momentu magnetycznego należy poprawić o składnik

$$+\frac{1}{Z}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\{\bar{\mu}_p\Sigma_p + \bar{\mu}_n\Sigma_n\}, \quad (3.59)$$

gdzie Σ_p i Σ_n są to następujące sumy

$$\Sigma_\tau = \sum_{k \in \tau} (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{I})_k (2j + 1)_k v_k^2. \quad (3.60)$$

po obsadzonych stanach protonowych i neutronowych. Czynniki v_k^2 są prawdopodobieństwami obsadzeń stanów z powłok o momencie pędu j . Ponieważ, jak podają autorzy tej pracy, $\langle r_{E,n}^2 \rangle = -0,1192(18)$ (patrz przypis (5)) więc jak przypuszczano, poprawka ta jest rzędu 0,01%, a więc jest do pominięcia w realnych obliczeniach.

Dla sprawdzenia tej tezy, wykonane zostały obliczenia dla jąder sferycznych w teorii nie zawierającej członów nieliniowych. Jak już wynika to z wyrażenia (3.59), poprawki od stanów protonowych i neutronowych wchodzą do r_{ch} z przeciwnymi znakami, i prawie się znoszą. Wynik ten potwierdziły obliczenia.

W dalszych rozważaniach wpływ efektu spinowo-orbitalnego na promień ładunku będzie w związku z tym pominięty.

⁵ Bohr [163] podaje promień tego rozkładu jako równy $\langle r_E \rangle_n^{1/2} = 0,36 \pm 0,01$ fm. „Ogon” rozkładu gęstości ładunku w neutronie jest ujemny. Rozkład tego typu powinien redukować promień rozkładu ładunku w jądrze. Jednocześnie, promienie rozkładów momentu magnetycznego protonowego i neutronowego są prawie jednakowe: $\langle r_{M,p} \rangle^{1/2} = 0,80 \pm 0,03$ i $\langle r_{M,n} \rangle^{1/2} = 0,79 \pm 0,15$. Pozwala to wyjaśnić, np. anomalne zachowanie promieni rozkładu ładunków w izotopach wapnia ^{40}Ca i ^{48}Ca , które pozostają w relacji $r(^{48}\text{Ca}) < r(^{40}\text{Ca})$

3.4. Wyniki modeli SkHF i RMF

W tej części pracy przedstawione są wyniki obliczeń promieni rozkładu materii jądrowej oraz ładunku, deformacji, momentów kwadrupolowych, mas i energii wiązania oraz innych wielkości charakterystycznych dla stanów podstawowych jąder. Do obliczeń wybrano jądra strontu, ksenonu, baru i gadolinu. Jądra te (ich rozmiary i deformacje) trudno jest opisać stosując standardowe modele mikroskopowo–makroskopowe. Z drugiej strony własności ich są dokładnie zmierzone w szerokim zakresie zmienności liczby neutronowej N . Jeśli uda się opisać np. efekt zagięcia (ang. *kink*) w przesunięciach izotopowych $\delta\langle r^2 \rangle$ tych jąder, będzie to sukcesem zastosowanego modelu. Z tym większym zaufaniem można go będzie używać w tych obszarach układu okresowego, dla których brakuje danych pomiarowych, a więc np. odległych od ścieżki β –stabilności.

Wyniki otrzymane z modeli SkHF oraz RMF są porównane z obliczeniami przeprowadzonymi w modelu oddziaływań Gogny’ego [18, 169] oraz z obliczeniami w modelu efektywnym Skyrme’a zastosowanym w metodzie Thomasa–Fermiego (SkTF) [108, 20].

Na początku dyskutowany jest wpływ poprawki rotacyjnej na energie wiązania nuklidów. Następnie omówione zostały średnie promienie kwadratowe i przesunięcia izotopowe. W dalszej części przedstawione zostały wyniki obliczeń mas. Dyskusja mas dotyczy w zasadzie tylko jąder kulistych z całego układu okresowego. Globalne obliczenia wykonane w modelu relatywistycznym dotyczyły energii wiązania oraz promieni rozkładu ładunku tych jąder. Wyniki wskazują na pewne braki parametryzacji modeli RMF. W końcowej części rozdziału dyskutowane są własności peryferyjnych, dalekich od centrum, obszarów rozkładów gęstości w jądrach atomowych.

3.4.1. Poprawka rotacyjna

Wpływ poprawki rotacyjnej (patrz część 3.1.3) przebadano w przypadku izotopów strontu ${}_{38}\text{Sr}$ i gadolinu ${}_{64}\text{Gd}$. Obliczenia wykonano metodą HF z siłą Sk3.

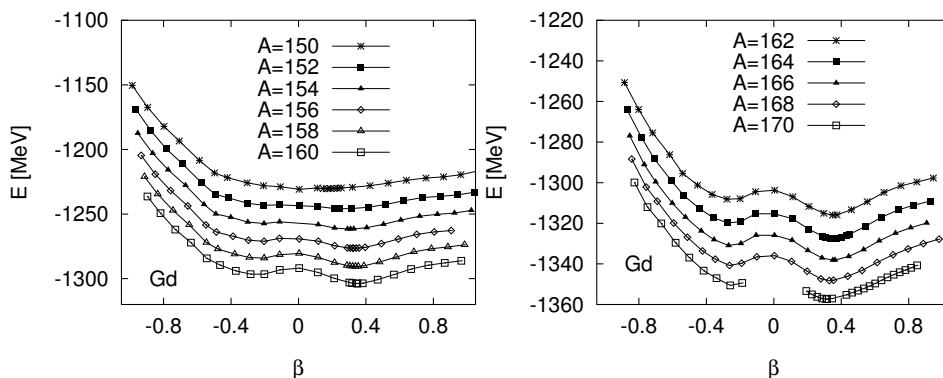
W przypadku gadolinu, zastosowano uniwersalny *pairing* z oddziaływaniem $v_0\delta(\vec{r})$ (3.18). Stała natężenia tych sił została oszacowana z mas jąder gadolinu i sąsiadujących z nimi izotonów. Jej wielkość wynosi -71 MeV. Wielkość $|v_0|$ jest mniejsza niż w pracach Tondeura [105, 108] oraz Dobaczewskiego i Nazarewicza [113, 115]. Okno energii oddziaływań *pairing* rozciąga się od dna studni potencjału jednocząstkowego do $+1/2\hbar\omega$ MeV, zgodnie z przepisem z pracy [105].

Dla sprawdzenia niezależności rezultatów od przyjętego modelu *pairing*, przypadek strontu rozpatrzono w tradycyjnym modelu BCS. Zależność stałej natężenia sił *pairing* G od Z oraz N jest podobna do zależności z pracy [170] i jest postaci $G_Z = G_{0Z}/Z$ dla protonów i $G_N = G_{0N}/N$ dla neutronów. Stałe $G_{0Z} = 16,5$ MeV i $G_{0N} = 12,3$ MeV, wyznaczone zostały ze znanych mas jąder. Okno *pairing* rozciąga się od poziomu najniższego do poziomu odległego o $1,2\hbar\omega$ powyżej powierzchni Fermiego.

Stosowano rachunek z kwadrupolowymi więzami kwadratowymi (patrz część 3.1.4, równanie 3.31). Wnioski z obu studiów są podobne. Zostały one opublikowane w pracach [171, 172, B].

Dla ilustracji wyników przedyskutujemy przypadek izotopów gadolinu. Łańcuch jąder ${}_{64}\text{Gd}$ zawiera jądro magiczne $A = 146$. W związku z tym, że opisany formalizm poprawki rotacyjnej stosuje się tylko do układów dobrze zdeformowanych, będziemy dyskutować tylko jądra o $A > 148$.

Deformacje stanów podstawowych jąder można odczytać z przebiegu ich energii wiązania przedstawionych na rys. 3.1. Z wyjątkiem izotopu $A = 150$, wszystkie pozostałe jądra można uważać za dobrze zdeformowane. Ich deformacja $\beta \approx 0,3$ (patrz również rys. 3.25, gdzie pokazane są ich momenty kwadrupolowe). Deformacje stabilizują się ze wzrostem liczby masowej. Minima energii odpowiadające kształtom spłaszczonym ($\beta < 0$) są położone o kilka megaelektronowoltów wyżej niż minima z obszaru kształtów wydłużonych ($\beta > 0$). Rozdziela je wysoka bariera potencjału (≈ 10 MeV). W celu wyliczenia poprawki rotacyjnej (3.30) wyznaczone zostały elementy macierzowe operatora momentu pędu $\langle \hat{j}^2 \rangle$ oraz momenty bezwładności \mathcal{J} . Obie wielkości w stanach podstawowych jąder przedstawiono na rys. 3.2. Wyniki obliczeń momentu bezwładności porównano z doświadczalnymi momentami bezwładności, wyliczonymi dla stanu rotacyjnego $I^\pi = 2^+$



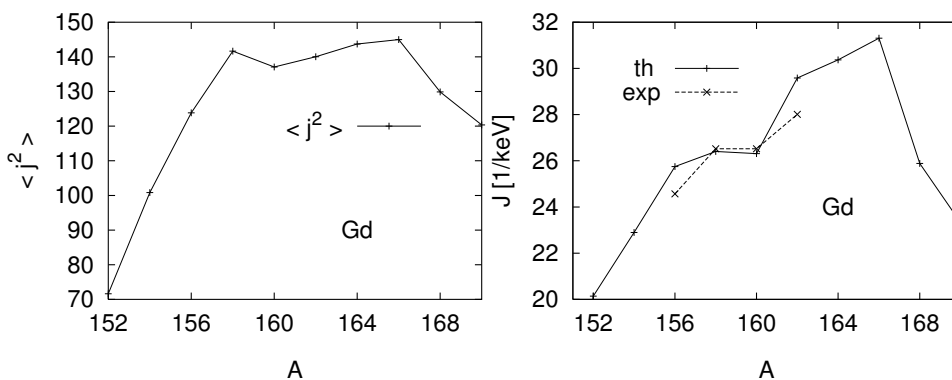
Rysunek 3.1. Energia wiązania izotopów gadolinu ${}_{64}\text{Gd}$ w funkcji deformacji β . Lewa strona rysunku przedstawia izotopy lżejsze $A = 150 \div 160$, prawa cięższe $A = 162 - 170$. Rys. 1 i 2 z pracy [172, B].

z formuły $\mathcal{J}/\hbar^2 = 3/E_{2+}$. Obserwuje się dużą zgodność między wielkością teoretyczną i doświadczalną momentu bezwładności.

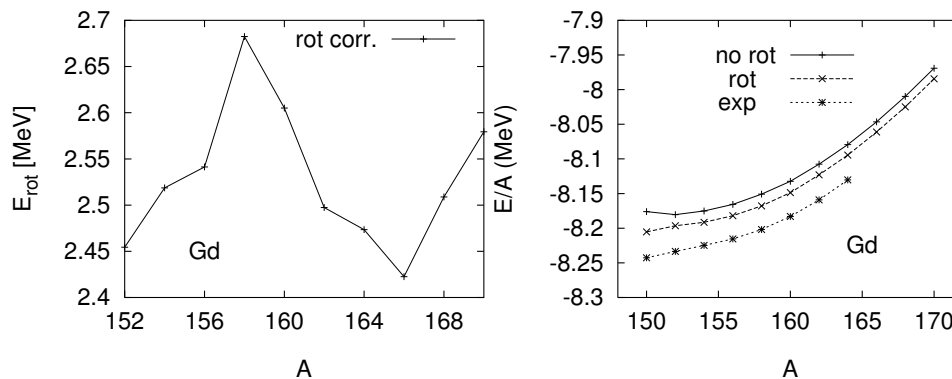
Kończącą poprawkę rotacyjną przedstawia rys. 3.3 (lewa część). Jej wielkość zmienia się w granicach $E_{\text{rot}} = 2,46 \div 2,68$ MeV w całym badanym zakresie jąder. W skali całkowitej energii wiązania zmiany te są zaniedbywalne.

Prawa część rys. 3.3 przedstawia zwykłe i poprawione średnie energie wiązania na nukleon E/A . Krzywa poprawiona (krzyżyki) znajduje się pomiędzy energią E_{HF}/A (znaki plus) i danymi doświadczalnymi (gwiazdki) [174]. Model $\text{Sk}3^{\delta}\text{HF}$, poprawiony o rotację wciąż nie odtwarza danych eksperymentalnych. Różnice wynoszą $\approx 0,035$ MeV. W skali pełnej energii wiązania jest to około 5 MeV.

Bardziej istotna, np. dla obliczeń barier na rozszczepienie, jest zależność poprawki rotacyjnej od deformacji jądra. Na rys. 3.4 przedstawiono zależność elementu macierzowego $\langle \hat{j}^2 \rangle$ (lewa strona) oraz momentu bezwładności (prawa strona) w funkcji deformacji β dla czterech izotopów gadolinu. Zależność $\langle \hat{j}^2 \rangle$ jest w przybliżeniu kwadratową funkcją β : $\langle \hat{j}^2 \rangle \sim \beta^2$, natomiast zależność momentu bezwładności jest bardziej skomplikowana, szczególnie w obszarze deformacji bliskich deformacji równowagi i większych ($\beta \sim 0,3-0,4$). W obszarze $\beta < 0$ mamy

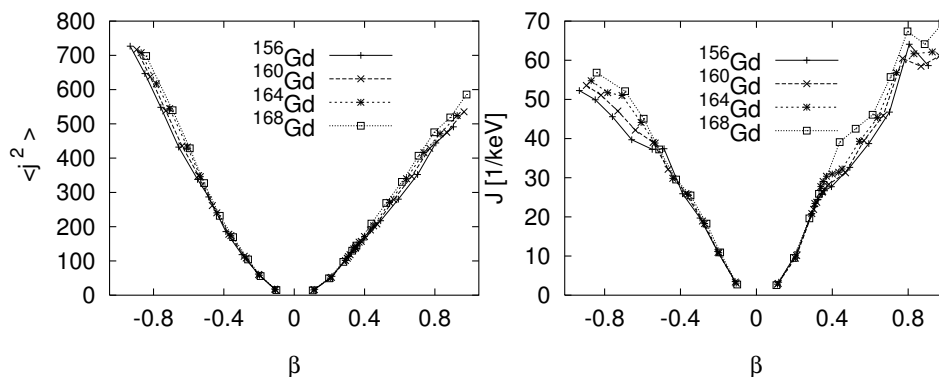


Rysunek 3.2. Momenty pędu $\langle j^2 \rangle$ i momenty bezwładności \mathcal{J}/\hbar^2 wyliczone w podstawowych stanach Hartree’ego–Focka jąder gadolinu ${}_{64}\text{Gd}$, w zależności od liczby masowej A . Dla porównania pokazano momenty bezwładności wyznaczone dla stanu rotacyjnego $I^\pi = 2^+$ z formuły $\mathcal{J}/\hbar^2 = 3/E_{2^+}$. Doświadczalne energie E_{2^+} pochodzą z elektronicznej bazy danych NNDC [173].



Rysunek 3.3. Poprawka rotacyjna (E_{rot}) dla izotopów gadolinu (lewa strona rysunku) i średnia energia na nukleon E/A (prawa część rysunku), jako funkcje liczby masowej A . Górna krzywa (no rot, +) jest energią Hartree’ego–Focka (E_{HF}). Krzyżyki (\times) oznaczają poprawioną energię na nukleon. Gwiazdki ($*$) obrazują dane doświadczalne [174].

w przybliżeniu $\mathcal{J} \sim \beta$. To sprawia, że poprawka rotacyjna jest dla kształtów wydłużonych ($\beta > 0$) złożoną funkcją deformacji.

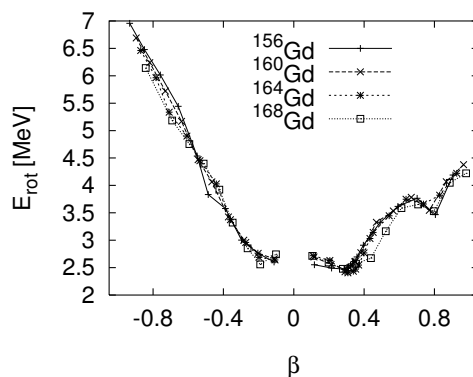


Rysunek 3.4. Moment pędu $\langle \hat{J}^2 \rangle$ (rysunek lewy) i moment bezwładności \mathcal{J}/\hbar^2 (rysunek prawy) jąder gadolinu ^{156}Gd , ^{160}Gd , ^{164}Gd i ^{168}Gd w funkcji deformacji β .

Poprawkę E_{rot} przedstawia rys. 3.5. Widoczne są minima przy deformacjach równowagi $\beta \approx 0,3$ i dużych deformacjach $\beta \approx 0,8$. W obszarze $\beta < -0,2$ poprawka jest prawie liniową funkcją deformacji i nie ujawnia prawie żadnej struktury.

Najważniejszym wnioskiem z przytoczonej dyskusji jest zmienność poprawki rotacyjnej z deformacją. Ta zmienność prowadzi do niewielkich przesunięć deformacji stanów podstawowych ($\Delta\beta \approx 0,01$) i dużych, na ogół rosnących ze wzrostem deformacji β , ujemnych wkładów do energii wiązania, które mogą w istotny sposób zmienić wyniki obliczeń barier na rozszczepienie itp. Bariery na rozszczepienie dyskutowano np. w pracach [120, 175, 141, 140]. Wysokości barier energii potencjalnej dla jądra ^{240}Pu są we wszystkich przypadkach za duże. Ich wyliczona wielkość sięga kilkunastu megaelektronowoltów. W świetle tego co zostało powiedziano w części 2.2, dotyczącej rozszczepienia, jest to 2–2,5 razy za dużo (patrz rys. 2.2). Prócz tego, bariery tam otrzymane są za długie.⁶

⁶ W pracy Brack i współautorzy [175] zastosowano model ETF (ang. *Extended Thomas*



Rysunek 3.5. Poprawka rotacyjna E_{rot} w funkcji deformacji β wyliczona dla izotopów gadolinu ^{156}Gd , ^{160}Gd , ^{164}Gd i ^{168}Gd .

Izotopy strontu dyskutowano również w pracy [104] w modelu współrzędnej generującej, GCM. Rozpatrywano ogólne kształty nieosiowe. Otrzymane wyniki sugerują istnienie γ -zdeformowanego minimum w jądrze ^{80}Sr . Podobny wniosek wynika z modelu oddziaływań Gogny'ego [176, B]. Deformacja γ wnosi poprawkę do energii wiązania równą około 1 MeV. Systematyczne obliczenia energii wiązania izotopów ^{80}Sr wykonano również w pracy [177]. Obliczenia te przeprowadzono w modelu relatywistycznego średniego pola bez poprawki rotacyjnej. Otrzymany kształt energii wiązania w funkcji deformacji przypomina rys. 3.10. Dokładność wyliczonych energii wiązania w stanach podstawowych jąder strontu jest podobna do uzyskanej w przedstawionym modelu Sk3 $^{\delta}$ HF.

3.4.2. Promienie i przesunięcia izotopowe

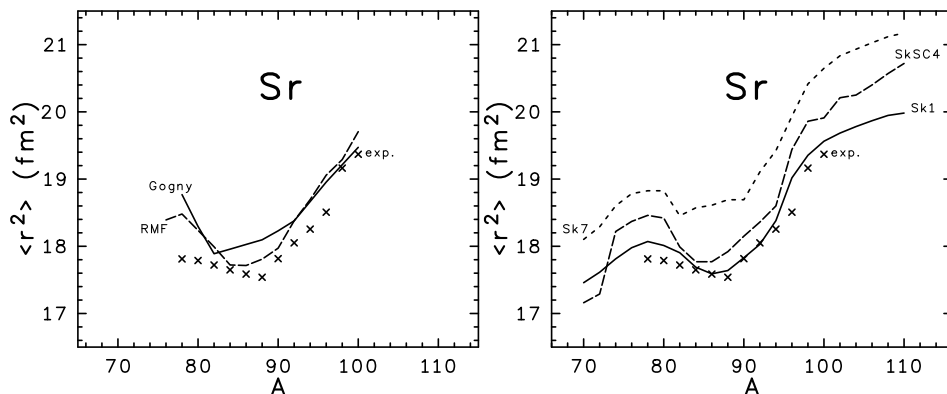
Efekt zagięcia krzywej przesunięć izotopowych jako funkcji liczby neutronów jest obserwowany dla wszystkich trzech rozważanych łańcuchów izotopowych ^{38}Sr , ^{54}Xe i ^{56}Ba . Zagięcie pojawia się tam, gdzie N równe jest liczbie magicznej N_{mag} . Dla strontu jest to $N_{\text{mag}} = 50$ (lub $A_{\text{mag}} = 88$), dla

Fermi Model) oraz specjalną parametryzację SkM*. Bariery na rozszczepienie są tam opisane dużo lepiej niż w innych wymienionych pracach.

kсенону ($A_{\text{mag}} = 136$) i baru ($A_{\text{mag}} = 138$) co odpowiada $N_{\text{mag}} = 82$.

Sytuacja ta jest przedstawiona na rysunkach 3.6–3.8.

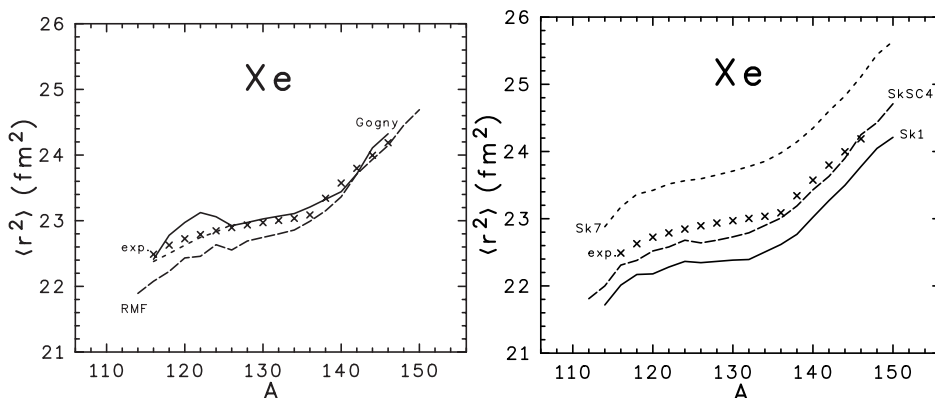
Dla przejrzystości każdy łańcuch izotopowy jest przedstawiony na dwóch rysunkach. Pierwszy z nich dotyczy zawsze obliczeń RMF oraz modelu Gogny'ego, a drugi modeli SkHF oraz SkTF.



Rysunek 3.6. Teoretyczne oszacowania średnich promieni kwadratowych $\langle r^2 \rangle$ rozkładu ładunku w izotopach ${}_{38}\text{Sr}$ [176, B]. Z lewej strony przedstawione są wyniki obliczeń w modelach Gogny'ego (linia ciągła) i w modelu relatywistycznym (linia przerywana). Po stronie prawej przedstawiono wyniki obliczeń w modelu SkHF (parametryzacje Sk1 i Sk7 w tabeli 3.1) oraz w modelu SkTF (parametryzacja SkSC4). Dane doświadczalne, zaznaczone krzyżykami, pochodzą z prac [178, 165].

Średni promień kwadratowy $\langle r^2 \rangle$ jest przedstawiony w funkcji liczby masowej A . Teoretyczne wartości $\langle r^2 \rangle$ (oraz $\langle Q_2 \rangle$, patrz część 3.4.6), które oznaczano na rysunkach kryptonimem SkSC4, pochodzą z pracy [20] i zostały otrzymane z tzw. przybliżenia półklasycznego.

Dokładna analiza przedstawionych promieni średnich pokazuje, że model Gogny'ego i model relatywistyczny RMF oraz oszacowania SkSC4 dają najlepsze wyniki. Model HF z siłami Sk7 daje zawyżone wartości $\langle r^2 \rangle$ natomiast model HF z siłami Sk1 daje za małe promienie rozkładu ładunku. Oprócz wymienionych sił w obliczeniach używano sił Sk3 i Sk6. Wyniki ich są podobne do wyników otrzymanych z siłą Sk7. Wyrzutowanie energii na



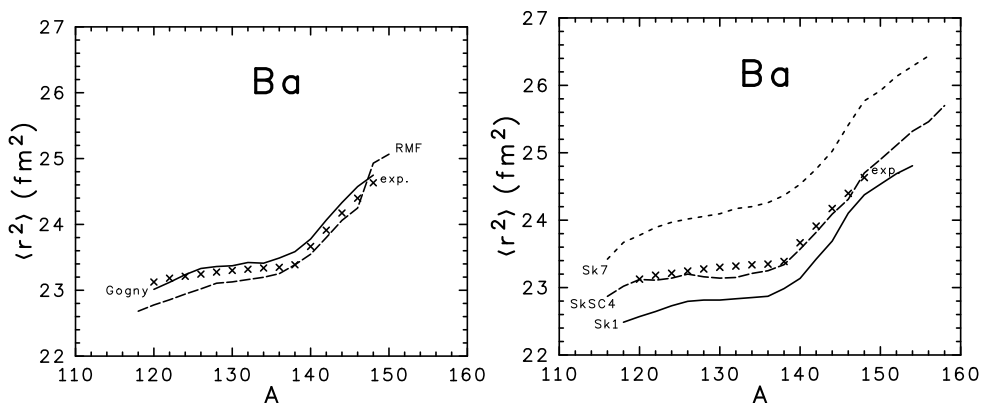
Rysunek 3.7. Teoretyczne oszacowania średnich promieni kwadratowych $\langle r^2 \rangle$ rozkładu ładunku w izotopach ${}_{54}\text{Xe}$ [176, B]. Rysunek pokazany z lewej strony przedstawia wyniki obliczeń w modelu Gogny'ego (linia ciągła) i w modelu relatywistycznym (linia przerywana). Na rysunku po stronie prawej przedstawiono wyniki obliczeń w modelu SkHF (parametryzacje Sk1 i Sk7 w tabeli 3.1) oraz w modelu SkTF (parametryzacja SkSC4). Dane doświadczalne, zaznaczone krzyżykami, pochodzą z prac [178, 165].

dobry moment pędu powoduje, że wyniki Sk3 zbliżają się do wyników doświadczalnych. Pokazano to w pracy dotyczącej własności izotopów strontu [171, B] (patrz też dyskusja poprawki rotacyjnej w części 3.4.1).

Stront

W przypadku izotopów strontu najlepiej pracuje model HF z siłą Sk1. Wyniki otrzymane z modelu relatywistycznego nie są w pełni zadowalające. Zagięcie funkcji średniego promienia kwadratowego $\langle r^2 \rangle$ jest za łagodne, i odbiega od doświadczenia. Podobny rachunek wykonany został z siłą Sk3 w modelu HF w pracy [171, B]. Korekta energii stanu podstawowego, wynikająca z rzutowania, zmienia deformacje stanów podstawowych o $\Delta\beta \sim 0,02$. Nie powoduje to jednak poprawy zgodności przesunięć izotopowych.

Przesunięcia $\delta\langle r^2 \rangle$ obliczone w modelu SkHF oraz doświadczalne, pokazuje rys. 3.9. Obserwuje się gwałtowną zmianę w systematyce przesunięć

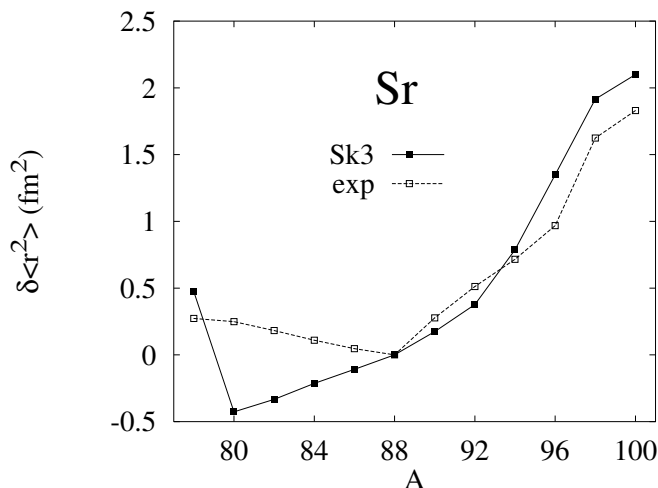


Rysunek 3.8. Teoretyczne oszacowania średnich promieni kwadratowych $\langle r^2 \rangle$ rozkładu ładunku w izotopach ${}_{56}\text{Ba}$ [176, B]. Z lewej strony przedstawiono wyniki obliczeń w modelu Gogny’ego (linia ciągła) oraz w modelu relatywistycznym (linia przerywana). Na rysunku z prawej strony przedstawione są wyniki obliczeń w modelu SkHF (parametryzacje Sk1 i Sk7 w tabeli 3.1) oraz w modelu SkTF (parametryzacja SkSC4). Dane doświadczalne, zaznaczone krzyżykami, pochodzą z prac [178, 165].

izotopowych przy przejściu od $N = 78$ do $N = 80$. Dalej $\delta\langle r^2 \rangle$ zachowuje się gładko. Przejście to może być skutkiem zmiany kształtu ze spłaszczonego (dla $A = 78$, $\beta \sim -0,13$) do wydłużonego (przy $A = 80$, $\beta \approx 0,24$) w tym modelu. Wniosek ten wynika z analizy energii wiązania na rys. 3.10. Na krzywych reprezentujących jądra ${}^{78}\text{Sr}$ i ${}^{80}\text{Sr}$ minima rozlokowane są przy ujemnych i dodatnich deformacjach.⁷

Własności strontu dyskutowane były również w pracy [179], gdzie używano parametrów Ska i G0P. Po korekcie wyników teoretycznych o deformacje wyznaczone z eksperymentalnych danych o momentach kwadrupolowych, otrzymano dobrą zgodność przesunięć izotopowych $\delta\langle r^2 \rangle$ (patrz rys. 8 z cytowanej pracy). Zgodność ta jest gorsza w przypadku modelu HF+BCS+G0P.

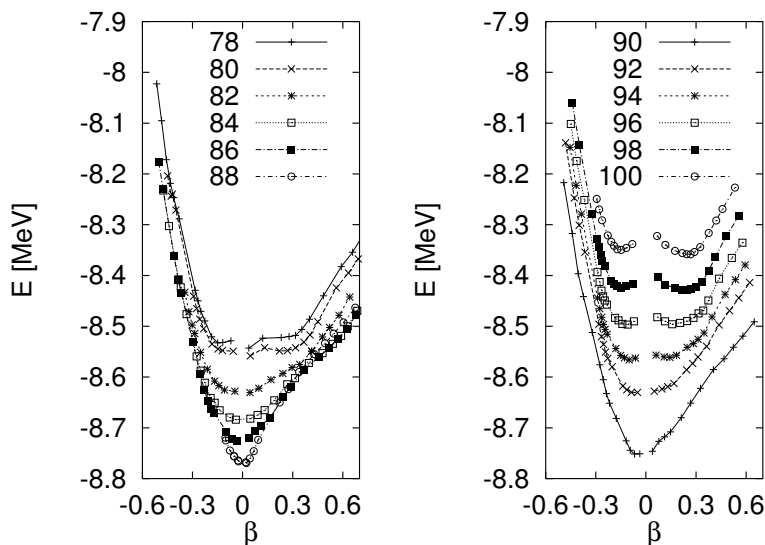
⁷ Należy wykluczyć z analizy centralny obszar deformacji (pozorne minimum), w którym nie działa metoda rzutowania zastosowana w pracy. Jak powiedziano w 3.1.3 metoda może być stosowana tylko dla dużych deformacji.



Rysunek 3.9. Przesunięcia izotopowe dla jąder strontu. Obliczenia przeprowadzono z siłą Sk3 w modelu HF z poprawką rotacyjną wynikającą z rzutowania na zerowy moment pędu [171, B].

Zgodność energii wiązania z energiami doświadczalnymi, pomimo zastosowanej w przypadku dobrze zdeformowanych jąder poprawki rotacyjnej, okazała się gorsza. Pokazuje to rys. 3.11, na którym przedstawiono obliczone energie wiązania na nukleon E/A dla jąder strontu w modelu HF+BCS+GOP (puste kwadraciki) i HF+BCS+Ska (znaki plus), z pracy [179]. Dla porównania, pokazano zmierzone wartości E/A (krzyżyki, \times). Modelowe obliczenia RMF (bez więzów) reprezentują romby. Zgodność modelu RMF z doświadczeniem jest najlepsza.

Szerszą dyskusję własności izotopów strontu w ramach modelu RMF przeprowadzili autorzy pracy [177]. Wykonany tam rachunek z więzami kwadrupolowymi pozwolił otrzymać lepsze wyniki od wyników modelu SkHF prezentowanych w niniejszej pracy. Odtworzono również przebieg przesunięć izotopowych dla strontu.



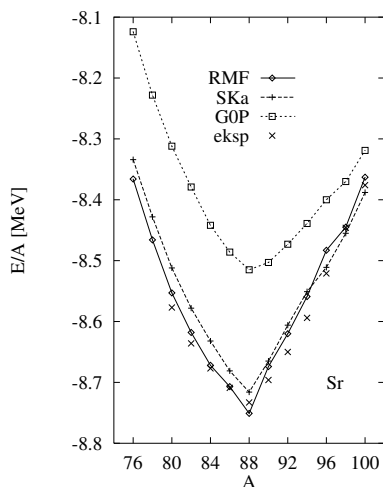
Rysunek 3.10. Energia stanu podstawowego izotopów ${}_{38}\text{Sr}$ w funkcji deformacji β . Obliczenia przeprowadzono z siłą Sk3 w modelu HF z poprawką rotacyjną. Liczby 78–100 występujące w opisie krzywych oznaczają masy atomowe A [171, B].

Ksenon i bar.

Zagięcie funkcji promieni kwadratowych izotopów ksenonu i baru w punkcie $N=82$, ($A = 136$ lub $A = 38$) jest łagodniejsze. RMF i model Gogny'ego dają bliskie rezultaty, zgodne z doświadczalnymi w obszarze ciężkich izotopów. Ani model Sk1HF ani Sk7HF nie opisują wartości promieni ładunkowych. Najlepiej pracuje model SkSC4.

3.4.3. Jądra kuliste

Wśród jąder układu okresowego istnieje ponad 100 nuklidów parzysto–parzystych, które uważane są za kuliste [21]. Ich liczby atomowe i neutronowe pokazano na rys. 3.12. Razem zaznaczono tam 116 jąder sferycznie symetrycznych lub podejrzanych o symetrię kulistą.



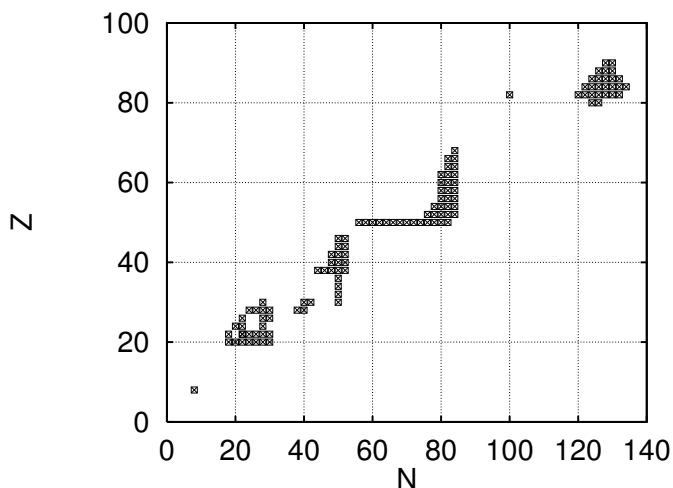
Rysunek 3.11. Teoretyczne energie wiązania na nukleon E/A oszacowane dla jąder strontu w modelu RMF (puste romby). Dla porównania pokazane są obliczenia modelu HF+BCS z pracy [179]. Puste kwadraciki reprezentują model GOP, znaki plus — model Ska. Doświadczalne energie wiązania pochodzą z pracy [174].

Stosując model RMF z różnymi zestawami parametrów z tabeli 3.4, wykonano obliczenia mas oraz promieni rozkładu ładunku dla wszystkich wybranych jąder. Obliczenia przeprowadzono dla sił *pairing* w wersji Nogamiego–Lipkina (patrz 3.1.1) z natężeniem sił G liczonym według dwu recept: albo Möllera i Nixa [21, 180] albo według formuły praktycznej używanej w pracach Sobiczewskiego i współpracowników [181],

$$G^{(P)} = a_i \left(1 + b_i \frac{N - Z}{A}\right) \hbar\omega_0 \frac{1}{\mathcal{N}_i^{2/3}}, \quad (3.61)$$

w której $a_n = a_p = 0,293$, $b_p = 0,2$, $b_n = -1,05$, $\mathcal{N}_p = Z$, $\mathcal{N}_n = N$, a $\hbar\omega_0 = (41/A^{1/3})(2\mathcal{N}_i/A)^{1/3}$.

Podstawą recepty Möllera–Nixa są średnie przerwy energetyczne neutronowa Δ_{G_n} i protonowa Δ_{G_p} podane w pracy [180], które w przypadku



Rysunek 3.12. Jądra kuliste wybrane do rachunku mas skupione w pobliżu liczb magicznych lub półmagicznych $N = 20, 28, 40, 50, 82, 126$ oraz $Z = 20, 28, 40, 50$ i 82 . Wyboru dokonano na podstawie pracy [21].

symetrii sferycznej są równe

$$\Delta_{G_n} = \frac{r_{\text{mic}}}{N^{1/3}}, \quad (3.62)$$

$$\Delta_{G_p} = \frac{r_{\text{mic}}}{Z^{1/3}}. \quad (3.63)$$

Wielkość r_{mic} jest stała. W metodzie Lipkina–Nogamiego przyjmuje się $r_{\text{mic}} = 3,2$ MeV [180, 21]. Natężenie G oblicza się z przerw (3.63) z równań mikroskopowych *pairing*, w modelu jednorodnej gęstości. Prowadzi to do następującego równania dla G

$$\begin{aligned} \frac{1}{G^{(M)}} &= \frac{1}{2} \tilde{\rho} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \Delta_G^2}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\rho} \left[\ln \left(\sqrt{b^2 + \Delta_G^2} + b \right) - \ln \left(\sqrt{a^2 + \Delta_G^2} + a \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Wielkość $\tilde{\rho}$ jest równa połowie średniej gęstości poziomów jednocząstkowych. Wielkości a i b wyznaczają górną i dolną granicę

przedziału energii tej części widma jednocząstkowego, która „uczestniczy” w oddziaływaniach *pairing*. W przeprowadzanych obliczeniach przyjęto $a = 0$, $b = 2 \cdot 41/A^{1/3} + e_{\mathcal{N}_i/2}$, gdzie $e_{\mathcal{N}_i/2}$ jest energią stanu o numerze $\mathcal{N}_i/2$.

Wyniki obliczeń promieni ładunkowych jąder sferycznych przedstawione zostały w tabeli 3.6. Oprócz danych doświadczalnych, pokazano różnice między wyliczonymi r_{ch} , a doświadczalnymi danymi w przypadku czterech modeli RMF oraz wszystkich nuklidów sferycznych, dla których istnieją wyniki doświadczalne. Kolumna 4 podaje dane doświadczalne r_{exp} [178], w kolumnie 5 podany jest błąd pomiarowy σ_{exp} . Kolumny od 6 do 9 zawierają różnice wyliczonych i zmierzonych (kolumna 4) średnich promieni rozkładu ładunku $r_{\text{ch}} - r_{\text{exp}}$. W ostatnim wierszu tabeli podano przeciętne odchylenie standardowe σ_r .

Z analizy danych z tabeli 3.6 wynika, że wszystkie przedstawione modele opisują dobrze dane eksperymentalne. Przeciętny błąd standardowy σ wynosi we wszystkich przypadkach nie więcej niż 0,021 fm.

3.4.4. Skóra neutronowa

W każdym z omawianych modeli (SkHF, Gogny’ego oraz RMF) wartości średnich promieni kwadratowych rozkładów materii neutronowej rosną wraz z liczbą neutronów. Dla ciężkich izotopów przewyższają one odpowiednie promienie rozkładów materii protonowej. Różnica obu typów promieni nosi nazwę skóry neutronowej. Zjawisko to można zaobserwować w doświadczeniu (patrz rozdział o halo neutronowym 3.4.8 oraz [182]).

Efekty związane z peryferyjnymi własnościami rozkładów materii neutronowej i protonowej, i wynikające stąd możliwości pomiarowe skóry neutronowej są omówione dalej (patrz 3.4.8).

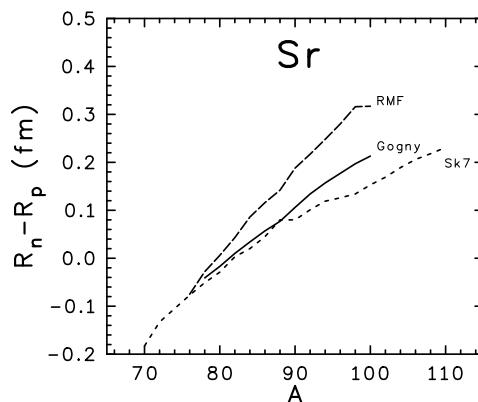
Na kolejnych rysunkach 3.13–3.15 przedstawiona jest różnica średnich promieni kwadratowych, neutronowego (R_n) i protonowego (R_p), w funkcji liczby masowej A dla izotopów strontu, ksenonu i baru. Linia ciągłą pokazano wyniki modelu Gogny’ego, linią przerywaną wyniki RMF, a linią kropkowaną rezultaty modelu Sk7.

We wszystkich przypadkach widoczny jest wzrost grubości skóry neutronowej od wartości ujemnych (skóra protonowa) bliskich $-0,15$ fm,

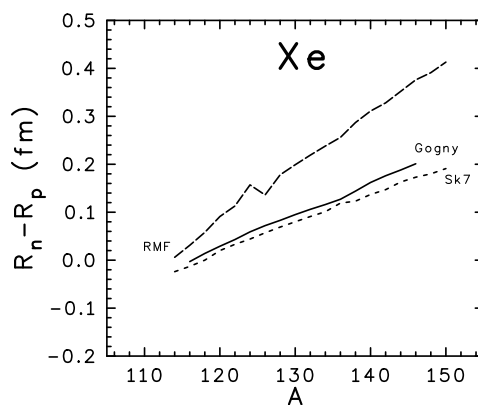
Tablica 3.6. Błędy przeciętne i przeciętne odchylenia kwadratowe promieni rozkładów ładunku wyliczone w modelach RMF dla jąder kulistych. W kolumnie 4 umieszczone są dane doświadczalne r_{exp} [178], w kolumnie 5 błąd pomiarowy σ_{exp} . Kolumny 6–9 zawierają różnice wyliczonych i zmierzonych (kolumna 4) średnich promieni rozkładu ładunku $r_{\text{ch}} - r_{\text{exp}}$. W ostatnim wierszu tabeli podano przeciętne odchylenie standardowe σ_r . (Jednostki: fm).

Z	N	A	r_{exp}	σ_{exp}	$G^{(P)}$	$G^{(M)}$	NL1	NL-SH
1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	8	16	2,737	0,008	-0,002	0,006	0,044	-0,038
20	20	40	3,450	0,010	0,008	0,01	0,049	0,002
20	28	48	3,451	0,009	0,018	0,025	0,040	0,011
22	26	48	3,597	0,001	-0,059	-0,050	0,001	-0,057
22	28	50	3,573	0,002	-0,030	-0,019	0,001	-0,033
24	28	52	3,643	0,003	-0,034	-0,025	-0,010	-0,037
6	28	54	3,680	0,013	-0,012	-0,004	0,001	-0,015
26	30	56	3,729	0,013	-0,038	-0,033	-0,022	-0,038
28	30	58	3,772	0,002	-0,020	-0,012	-0,042	-0,028
30	40	70	3,986	0,013	-0,049	-0,047	-0,024	-0,047
38	50	88	4,188	0,005	-0,183	-0,180	-0,154	-0,184
40	50	90	4,258	0,008	0,003	0,010	0,026	0,002
40	52	92	4,294	0,011	-0,013	-0,007	0,002	-0,016
42	50	92	4,294	0,016	0,013	0,021	0,037	0,011
42	52	94	4,334	0,016	-0,007	-0,001	0,009	-0,009
50	62	112	4,586	0,005	-0,009	-0,006	0,002	-0,012
50	64	114	4,602	0,005	-0,012	-0,008	0,003	-0,014
50	66	116	4,619	0,005	-0,016	-0,011	0,001	-0,018
50	68	118	4,634	0,005	-0,017	-0,013	-0,001	-0,019
50	70	120	4,646	0,005	-0,016	-0,012	0,000	-0,017
50	72	122	4,658	0,005	-0,015	-0,011	0,000	-0,016
50	74	124	4,670	0,005	-0,014	-0,01	0,001	-0,016
56	82	138	4,836	-0,000	-0,006	-0,003	0,023	-0,007
60	82	142	4,920	-0,000	-0,015	-0,012	0,015	-0,017
60	84	144	4,926	-0,000	0,001	0,002	0,031	0,000
62	82	144	4,947	0,009	-0,006	-0,002	0,021	-0,009
62	84	146	5,002	0,006	-0,040	-0,038	-0,013	-0,042
82	122	204	5,479	0,002	0,003	0,008	0,028	0,003
82	124	206	5,490	0,002	0,001	0,006	0,025	0,002
82	126	208	5,503	0,002	-0,001	0,006	0,020	-0,001
σ_r			—	—	0,020	0,019	0,018	0,021

Uwaga: W modelu NL1 w przypadku jąder niemagicznych, zastosowano oddziaływanie *pairing* ze stałym parametrem $\Delta = 6/\sqrt{A}$ MeV. W modelu NL-SH podobnie, z parametrem $\Delta = 12/\sqrt{A}$ MeV.

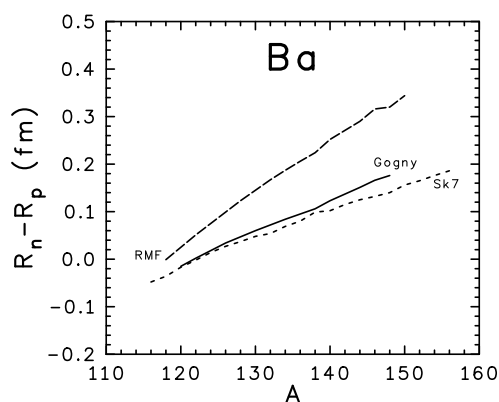


Rysunek 3.13. Teoretyczna grubość skóry neutronowej $R_n - R_p$ w izotopach ^{38}Sr w jednostkach fm. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].



Rysunek 3.14. Teoretyczna grubość skóry neutronowej $R_n - R_p$ w izotopach ^{54}Xe w jednostkach fm. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].

w lekkich izotopach strontu dla modelu Sk7, do maksymalnej wielkości równej 0,4 fm! (gruba skóra neutronowa) otrzymanej w modelu RMF dla ksenonu. Oba modele Gogny'ego i Sk7, przewidują cieńszą skórę neutronową we wszystkich rozważanych przypadkach. Jeśli ten parametr wiąże się w jakiś sposób z charakterem peryferyjnych reakcji anihilacji antyprotonów na jądrach atomowych [182, 183, 184], to badanie tych ostatnich może przynieść rozstrzygnięcie dotyczące wielkości i znaku grubości skóry neutronowej.

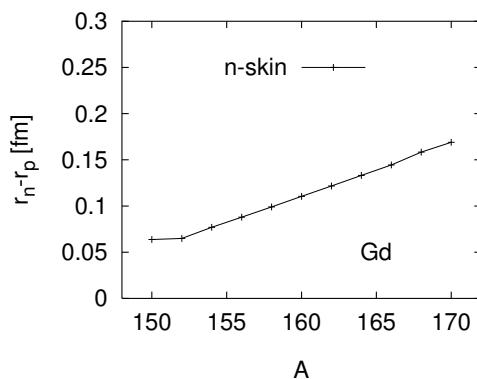


Rysunek 3.15. Teoretyczna grubość skóry neutronowej $R_n - R_p$ w izotopach ^{56}Ba w jednostkach fm. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].

Podobny rachunek wykonany dla jąder gadolinu [172, B] pokazał, że wielkość parametru $s = r_n - r_p$ dla ciężkiego gadolinu $A = 170$ jest równa 0,175 fm. Rachunek ten wykonany został w modelu HF z siłą Sk3, poprawką rotacyjną oraz z oddziaływaniami *pairing* typu δ .⁸ Wielkość s zachowuje się podobnie – rośnie z N i stanowi około 4% promienia jądrowego. Wyniki tych obliczeń przedstawia rys. 3.16.

Wyniki szerszych obliczeń grubości skóry neutronowej pokazano na rys. 3.17. Przedstawione tam różnice $R_n - R_p$ średnich promieni rozkładów

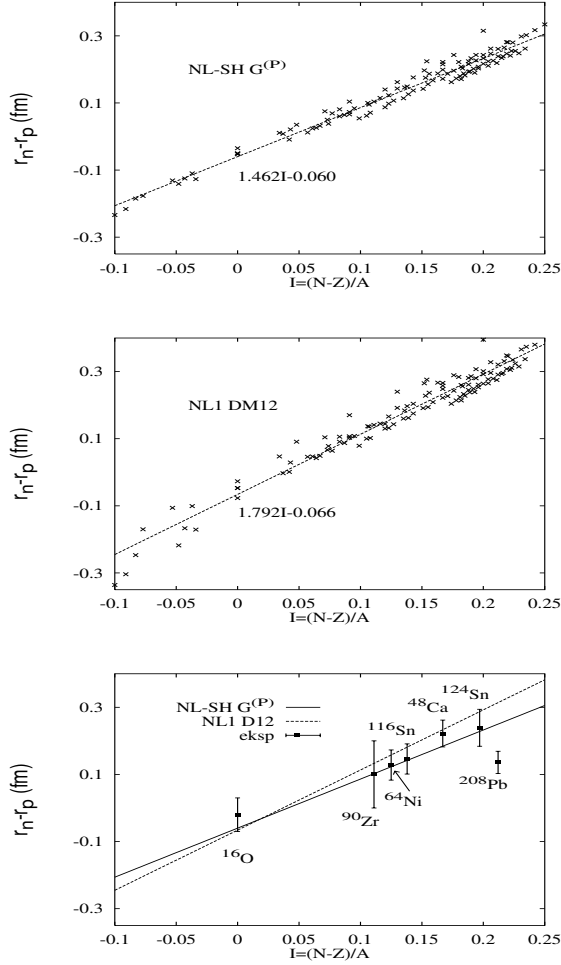
⁸ Rachunek ten będzie dalej oznaczany skrótowo jako Sk3^sHF.



Rysunek 3.16. Teoretyczna grubość skóry neutronowej $r_n - r_p$ w izotopach Gd w jednostkach fm. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk3HF z poprawką rotacyjną w stanie podstawowym oraz z siłami *pairing* typu $\delta(\vec{r})$ [172, B].

materii neutronowej i protonowej dla jąder kulistych (tych samych, które zaznaczone są na rys. 3.12) pochodzą z obliczeń w relatywistycznym modelu polowym z parametrami NL-SH (patrz 3.4) z modelem *pairing* Lipkina–Nogamiego (górną część rysunku) oraz z parametrami NL1 i z przerwą *pairing* $\Delta = 12/\sqrt{A}$ (środkowa część rysunku). Linie proste zostały wyznaczone przez dopasowanie metodą najmniejszych kwadratów współczynników a i b w formule $aA + b$, z obliczonych danych. Równania odpowiadających linii prostych podane są dla przypadku każdego modelu. Model NL1 wykazuje szybszy wzrost grubości skóry neutronowej wraz z asymetrią I ($a = 1,792$) niż modele NL-SH ($a = 1,462$).⁹ Tym samym, skóra neutronowa w modelach NL-SH jest cieńsza [155]. W dolnej części rys. 3.17 pokazane są obie średnie linie proste i dodatkowo punkty doświadczalne. Wartości doświadczalne grubości skóry neutronowej oszacowano na podstawie prac [175, 185]. Istnieje bardzo niewiele danych doświadczalnych dotyczących tej wielkości. Grubość skóry neutronowej dla

⁹ Wyniki otrzymane dla modeli NL-SH z innymi siłami *pairing* są bardzo podobne do wyników przedstawionych na rys. 3.17.



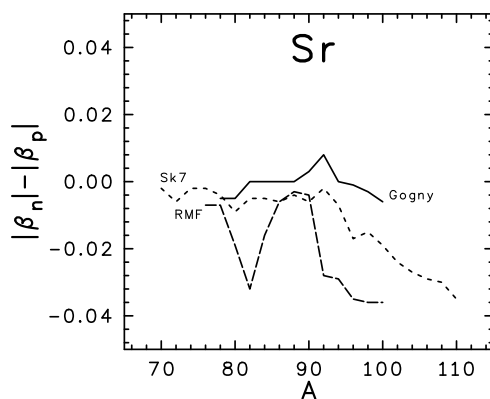
Rysunek 3.17. Grubość skóry neutronowej $R_n - R_p$ jąder kulistych wyznaczona w modelu relatywistycznym RMF w funkcji parametru asymetrii $I = (N - Z)/A$. Rysunek górny przedstawia wyniki modelu z parametrami NL-SH oraz natężeniem sił *pairing* $G^{(P)}$ w modelu Lipkina–Nogamiego. Rysunek środkowy odpowiada parametryzacji NL1 z przerwą energetyczną *pairing* $\Delta = 12/\sqrt{A}$. Linie proste wyznaczone są z dopasowania obliczonych wartości do formuły $aI + b$, w której $I = (N - Z)/A$. Na rysunku dolnym, oprócz średnich linii wynikających z dopasowania wyników obu modeli, zaznaczono punkty doświadczalne (ciemne kwadraciki) oszacowane na podstawie danych z prac [175, 185].

jąder kulistych o dużym parametrze I asymetrii izospinowej jest dodatnia i w przypadku cyny ^{132}Sn sięga 0,38 fm. Rysunek 3.17 sugeruje, że skórkę neutronową opisuje lepiej model NL-SH.

Podobne wyniki otrzymano również w kilkunastu innych modelach RMF.

3.4.5. Deformacje

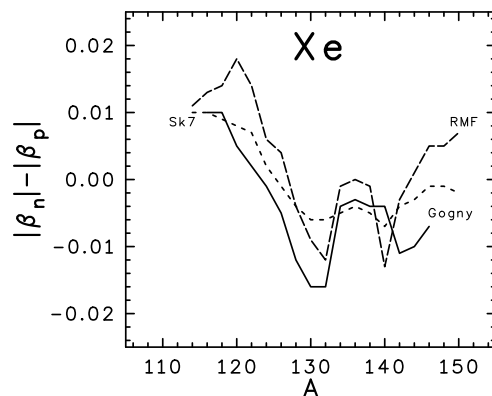
Interesującym faktem wynikającym z obliczeń są różnice w kwadrupolowych deformacjach rozkładów protonów β_p i neutronów β_n . Deformacje są wyznaczone z formuły (3.54). Wielkość odchylenia deformacji $\Delta\beta_{np} = |\beta_n| - |\beta_p|$ sięga w przypadku jąder strontu wartości $-0,04$. Wzrost absolutnej wartości różnicy $\Delta\beta_{n,p}$ ze wzrostem N jest widoczny w przypadku wszystkich rozważanych łańcuchów izotopowych.



Rysunek 3.18. Teoretyczne różnice w deformacjach rozkładu protonów i neutronów $\Delta\beta_{np} = |\beta_n| - |\beta_p|$ w izotopach ${}_{38}\text{Sr}$. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].

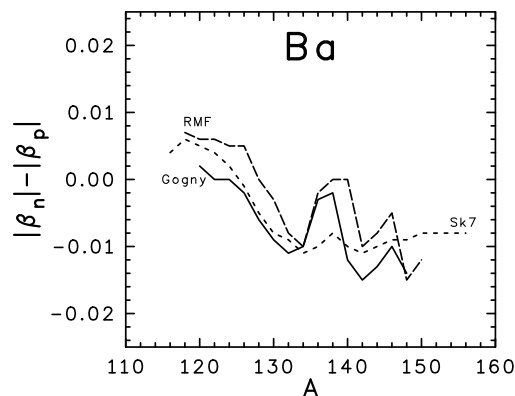
Na rysunkach 3.18–3.20 pokazana jest różnica $\Delta\beta_{np}$ w funkcji liczby masowej A dla wszystkich trzech modeli. Współczynnik nachylenia średnich wartości $\Delta\beta_{np}$ dla wszystkich łańcuchów wynosi około $-0,06$. Oznacza to, że w jądrach bogatszych w neutrony, rozkłady neutronowe są słabiej zdeformowane, a rozkłady protonowe silniej.

W przypadku obliczeń Sk3HF, przeprowadzonych dla ciężkich izotopów gadolinu, z siłami δ -pairing i poprawką rotacyjną w stanie podstawowym [172, B] wartość parametru różnicy deformacji $\delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p$, jest równa zero dla jądra $A = 150$, dalej gwałtownie spada do wartości $-0,04$ dla $A = 152$ i następnie słabo wzrasta do poziomu $-0,03$ w obszarze



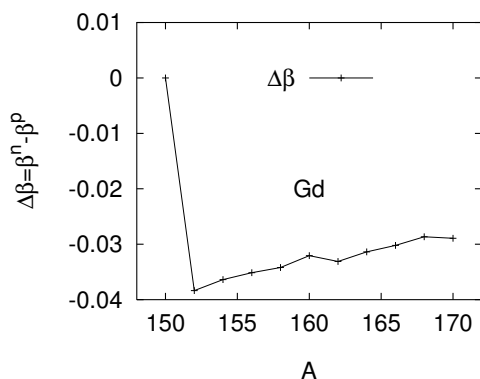
Rysunek 3.19. Teoretyczne różnice w deformacjach rozkładu protonów i neutronów $\Delta\beta_{np} = |\beta_n| - |\beta_p|$ w izotopach ${}_{54}\text{Xe}$. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].

$A = 152 \div 170$. Znak i wielkość tej różnicy świadczy, jak poprzednio, o mniejszych deformacjach neutronowych.



Rysunek 3.20. Teoretyczne różnice kwadrupolowych deformacji rozkładu protonów i neutronów $\Delta\beta_{np} = |\beta_n| - |\beta_p|$ w izotopach ${}_{56}\text{Ba}$. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B].

Hipotezę różnych deformacji p-n potwierdzają prace innych autorów [115, 186]. Dla izotopów siarki ${}_{16}\text{S}$ największa wartość $|\delta\beta| = 0,10$. Wniosek o słabiej zdeformowanych rozkładach neutronowych jest podobny. W pracy [187], w której badane są własności rotacyjne jąder z obszaru ziem rzadkich, pokazano, że w jądrach osmu o $A = 186 \div 190$ deformacja protonowa narasta szybciej z A niż deformacja neutronowa. Oznacza to, że istnieją różnice w deformacjach rozkładów obu rodzajów nukleonów.

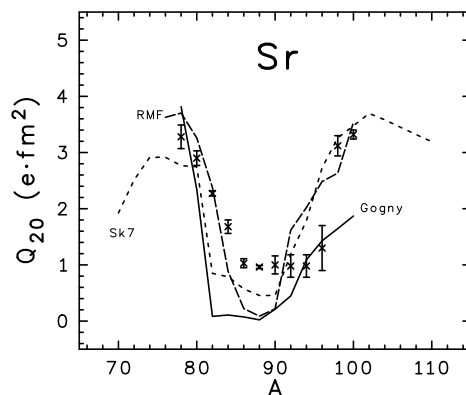


Rysunek 3.21. Teoretyczne różnice kwadrupolowych deformacji rozkładu protonów i neutronów $\Delta\beta_{np} = \beta_n - \beta_p$ w izotopach ${}_{64}\text{Gd}$. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Hartree’ego-Focka z siłą Sk3, oddziaływaniem δ -pairing oraz poprawką rotacyjną [172, B].

Możliwość różnych deformacji, protonowej i neutronowej w stanie podstawowym jąder kłóci się z praktyką modeli powłokowych (Woodsa–Saxona lub Nilssona), gdzie zakłada się jednakowe deformacje równowagowe dla obu rodzajów nukleonów. Wydaje się, że wprowadzenie różnych deformacji protonowych i neutronowych (nowe stopnie swobody) w modelach powłokowych, może poprawić opis własności jąder w stanach podstawowych.

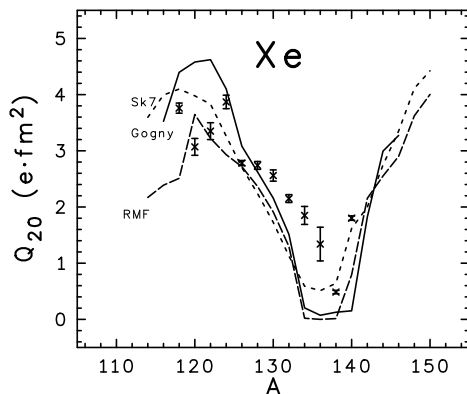
3.4.6. Momenty kwadrupolowe

Wyniki obliczeń momentów kwadrupolowych jąder Sr, Xe, Ba oraz Gd przedstawiono wraz z wynikami pomiarów [188, 189, 190] na rysunkach 3.22–3.25. W jądrach o liczbach neutronowych bliskich liczbom magicznym,

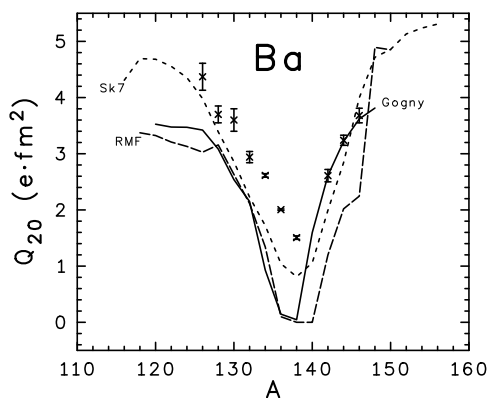


Rysunek 3.22. Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ${}_{38}\text{Sr}$. Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B]. Dane pomiarowe (krzyżyki) wraz z błędami pomiarów pochodzą z prac [188, 189, 190].

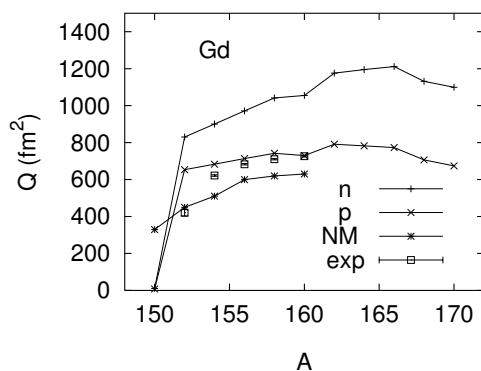
$N = 50$ w przypadku strontu i $N = 82$ w przypadku ksenonu, i baru, a więc słabiej zdeformowanych, wyliczone momenty kwadrupolowe są za małe. Obliczenia modeli dynamicznych [191] przewidują większe wartości Q_2 . Rys. 3.25 przedstawia wyniki obliczeń momentów kwadrupolowych dla jąder gadolinu otrzymane w rachunku Sk3HF z poprawką rotacyjną. Dla porównania, pokazano wyniki obliczeń globalnych (krzywa NM) w tak zwanym modelu FRDM (ang. *finite range droplet model*) z pracy Möller i współpracownicy [21]. Wyniki tej pracy dają systematycznie niższe momenty kwadrupolowe w porównaniu do zmierzonych. Model Sk3 $^{\delta}$ HF (krzywa p) przewiduje w tym przypadku tylko nieco wyższe momenty kwadrupolowe w porównaniu z mierzonymi. Na rys. 3.25 przedstawiono dodatkowo masowe momenty kwadrupolowe rozkładów neutronowych.



Rysunek 3.23. Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ^{54}Xe . Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B]. Dane pomiarowe (krzyżki) wraz z błędami pomiarów pochodzą z prac [188, 189, 190].



Rysunek 3.24. Elektryczne momenty kwadrupolowe jąder ^{56}Ba . Przedstawione są wyniki obliczeń w modelu Sk7 (linia kropkowana), modelu Gogny'ego (linia ciągła) i RMF (linia przerywana) [176, B]. Dane pomiarowe (krzyżki) wraz z błędami pomiarów pochodzą z prac [188, 189, 190].



Rysunek 3.25. Momenty kwadrupolowe rozkładu ładunku i materii jądrowej w izotopach ${}_{64}\text{Gd}$ [172, B]. Rysunek przedstawia wyniki obliczeń w modelu Hartree’ego-Focka z siłą Sk3, oddziaływaniem δ -pairing oraz poprawką rotacyjną. Krzywa (p) pokazuje elektryczny moment kwadrupolowy, krzywa (n) neutronowy moment masowy, a krzywa (NM) reprezentuje globalne obliczenia (FRDM) zamieszczone w pracy [21].

3.4.7. Masy jąder kulistych

Pomiary mas jąder atomowych wykonywane są obecnie z dokładnością lepszą niż dziesięć keV (!) (patrz np. raporty Zespołu ISOLDE [192]). Dla współczesnych teorii taka precyzja obliczeń mas jąder jest nieosiągalna. Warto jednak wypróbować siłę przewidywania istniejących modeli. Obliczenia mas stanowią fragment większego projektu, którego zadaniem jest, między innymi, zbadanie dobroci istniejących modeli teoretycznych opisujących masy [193, B]. Wśród nich znalazło się dziewięć modeli Skyrme’a ze zwykłymi siłami pairing i z siłami typu δ (3.20), model Gogny’ego, model mikroskopowo–makroskopowy (trzy wersje), model ETFSI (ang. *extended Thomas–Fermi with Strutinski Integral*) [108, 20] oraz model RMF w wersjach NL1, NL2 oraz NL–SH. Przedstawione niżej wyniki otrzymano w modelach RMF. Metoda obliczeń jest taka sama jak metoda opisana przy okazji omawiania promieni jąder kulistych w części 3.4.3.

Tablica 3.7. Średnie błędy kwadratowe w obliczeniach mas jąder kulistych w modelach RMF. W pierwszym i drugim wierszu podano nazwę modelu zgodnie z tabelą 3.4. Trzeci wiersz tabeli specyfikuje wielkość parametru Δ używanego w zastosowanym modelu *pairing* wg. formuły $\Delta = \delta/\sqrt{A}$. „M” oznacza, że w modelu tym w jądrach z magiczną liczbą protonów lub neutronów przyjęto $\Delta_p = 0$ lub $\Delta_n = 0$. Obliczenia w modelu NL-SH z modelem *pairing* Lipkina–Nogamiego charakteryzuje parametr natężenia $G^{(P)}$ (3.61) [181] lub $G^{(M)}$ (3.64) [180].

NL1					NL-SH				
δ	6	M 6	12	M 12	0	12	M 6	$G^{(P)}$	$G^{(M)}$
σ	4,74	4,74	3,95	3,95	4,53	3,87	3,77	3,39	3,23

Wyniki obliczeń przeprowadzone w modelu RMF oraz innych, zebrane są w tabelach 3.7 i 3.8 jak też zilustrowane na rysunkach. Parametrem, który decyduje o dobroci modelu, jest średni błąd kwadratowy (odchylenie standardowe) σ wyników od zmierzonych wartości mas zdefiniowany równością

$$\sigma^2 = \frac{1}{N_J - 1} \sum_{J=1}^{N_J} (M_T(J) - M_M(J))^2, \quad (3.65)$$

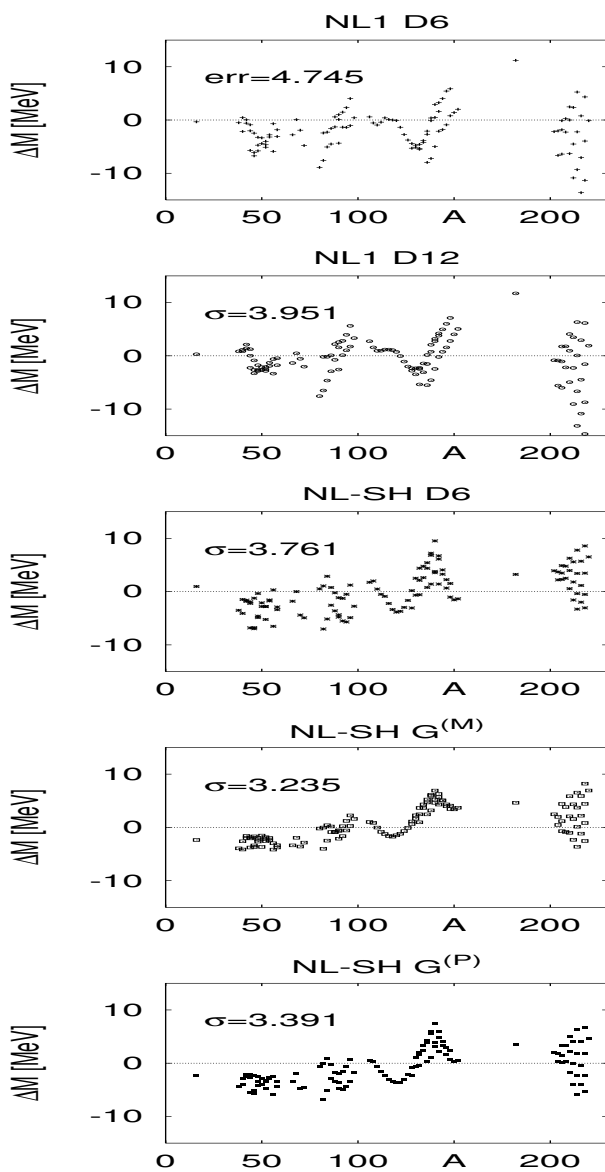
gdzie $M_T(J)$ oznacza masę oszacowaną teoretycznie, a $M_M(J)$ jest masą zmierzoną [174] jądra J . Suma przebiega po wszystkich $N_J = 116$ jądrach. Z tabeli 3.7 wynika, że najmniejsze odchylenie standardowe σ daje model RMF z parametrami NL–SH i siłą *pairing* generowaną według recepty Möllera. Błąd tego samego modelu, lecz z oddziaływaniem *pairing* $G^{(P)}$, niewiele odbiega od modelu najlepszego. Pozostałe modele RMF: PL–40, NL2 i inne dawały odchylenie standardowe większe niż przyjęta w selekcji maksymalna wartość $\sigma = 4$. Dla porównania, w tabeli 3.8, podano odchylenia standardowe mas wyliczonych w modelach alternatywnych. Średnie odchylenia standardowe są wygodną ale globalną miarą zgodności oszacowań teoretycznych z eksperymentem. Szczegółowa struktura uzyskanych wyników pozostaje ukryta. Aby zdać sprawę z wielkości maksymalnych odchyleń mas, na rys. 3.26 pokazane zostały odchylenia mas

Tablica 3.8. Odchylenia standardowe mas jąder w MeV oszacowanych w różnych modelach teoretycznych [193, B] bez modeli RMF.

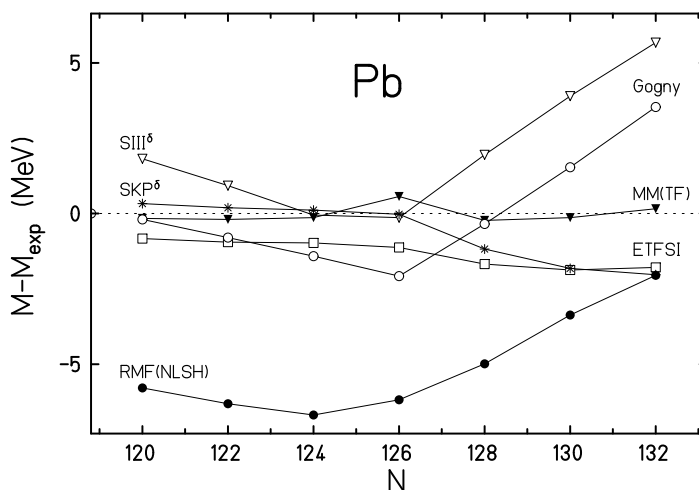
Sk3:	4,74	SkP:	2,37	SkM*:	6,32
Sk3 ^δ HF:	3,07	SkP ^δ :	2,53	SkM** ^δ :	5,36
Sk3 ^{δρ} HF:	2,26	SkP ^{δρ} :	2,32	SkM** ^{δρ} :	4,74
m. Gogny’ego:	2,07	ETFSI:	0,80		
MM(FRDM):	0,65	MM(FRLDM):	0,76	MM(TF):	0,57

teoretycznych (M_t) od mas eksperymentalnych (M_e): $\Delta M = M_t - M_e$, obliczone dla mas otrzymanych z modeli NL1–D6, NL1–D12 oraz trzech wersji modelu NL-SH. Są to modele z parametrami *pairing* $\Delta = 6/\sqrt{A}$ (D6) i modelem *pairing* Lipkina–Nogamiego z natężeniem $G^{(P)}$ lub $G^{(M)}$ (3.61,3.64).

Szczegółowe porównania międzymodelowe przedstawiono dla izotopów ołowiu na rys. 3.27. Podobnie jak w przypadku globalnego parametru σ , odchylenia mas wyznaczonych w modelu RMF nie wypadają najlepiej w porównaniu z modelami SkP^δ, ETFSI lub MM. Warto zauważyć, że kształt krzywej odchyień w funkcji N w modelu RMF przypomina kształt odchyień w modelach Gogny’ego i Sk3^δHF. Może to oznaczać, że modele te są w jakimś sensie podobne. Można pokazać używając specjalnej transformacji Foldy’ego–Wouthuysena [194], że Hamiltonian przetransformowanego modelu RMF, pozostaje w prostej relacji z Hamiltonianem modelu Skyrme’a (patrz [154], Tabela 1). Struktura modeli Hartree’ego–Focka–Bogoliubowa, które na rys. 3.27 reprezentuje SkP^δHF jest inna. Jedną z różnic, stanowi, jak wspomniano wcześniej, używane w nich objętościowo–powierzchniowe oddziaływanie *pairing* zależne od $\delta(\vec{r})$ i gęstości (patrz formuła 3.20). Podobnie, struktura modeli MM(TF) oraz ETFSI jest inna od struktury modelu RMF. Wydaje się, że sytuacja zmienia się w przypadku innej parametryzacji modelu. Częściowo potwierdza to analiza odchyień mas pokazanych dla modeli NL1 i NL-SH na rys. 3.26. Zarówno zmiana wersji oddziaływań *pairing* jak i zmiana parametryzacji pociągają zmiany w strukturze odchyień mas. Otrzymane wyniki nie dyskwalifikują



Rysunek 3.26. Odchylenia teoretycznych mas jąder kulistych od mas doświadczalnych. Kolejno od góry pokazane są modele NL1 D6, NL1 D12, NL-SH D6, NL-SH $G^{(M)}$ i $G^{(P)}$.



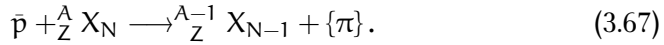
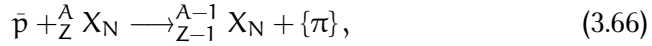
Rysunek 3.27. Odchylenia teoretycznych mas (M) kulistych izotopów ołowiu od mas doświadczalnych (M_{eksp}) w MeV. Pokazane są wyniki obliczeń w modelach Hartree’ego–Focka z siłami Skyrme’a Skd3 (SIII $^{\delta}$, puste trójkąty) oraz SkP $^{\delta}$ HF (gwiazdki), modelu mikroskopowo–makroskopowego (MM(TF), czarne trójkąty), modelu ETFSI (puste kwadraty), modelu Gogny’ego (puste kółka) i modelu RMF (czarne kółka). Obliczenia zostały wykonane w ramach projektu badawczego mas [193, B].

bynajmniej modelu RMF. Przeciwnie, biorąc pod uwagę znikomą liczbę parametrów swobodnych tego modelu (patrz dyskusja w rozdziale 3.2), która waha się w granicach 6–8 (masy występujące w teorii uważać można za znane) i przy pominięciu parametrów *pairing*, należy zauważyć, że lokuje się on wśród modeli SkHF.

3.4.8. Halo neutronowe

Jądra atomowe są rozciągniętymi strukturami protonów i neutronów. Ich rozkłady gęstości charakteryzujemy wyznaczając średnie promienie kwadratowe, parametry rozmycia powierzchni, grubość skóry neutronowej i inne. Oba rodzaje nukleonów wykazują nie tylko różne własności fizyczne ale i geometryczne. Oprócz różnic w promieniach, różnią się deformacjami (rysunki 3.18–3.21) i multipolowymi momentami masowymi (rysunki 3.22–3.25). Różnice w rozkładach gęstości określają własności jądra na jego *peryferiach*. Wyznaczenie ich jest trudne z wielu powodów. Zagadnieniom tego typu poświęcona jest ta część pracy.

Niedawno, na urządzeniu LEAR¹⁰ w CERN, przeprowadzono, szereg doświadczeń anihilacji antyprotonów (\bar{p}) na jądrach atomowych [182, 184]. Obserwowano następujące reakcje



Wśród produktów reakcji znajdowały się jądra atomowe X o liczbie protonów lub neutronów zmniejszonej o jeden oraz piony $\{\pi\}$. Średnia liczba wylatujących pionów wynosiła 4–5. Obserwacje, według zamierzenia ich autorów, dotyczyły tylko anihilacji *dalekich* od powierzchni jądra. Oznacza to, że zliczano tylko takie akty anihilacji, które nie prowadziły do wzbudzeń powstającego jądra. Oznaczmy przez \mathcal{N}_n liczbę anihilacji antyprotonu na neutronach, a przez \mathcal{N}_p taką samą wielkość dla anihilacji na protonach. Ich stosunek, jeśli uwzględnić przekroje czynne na reakcję anihilacji, mierzy pewien średni stosunek gęstości neutronów i protonów w obszarze anihilacji. Tę wielkość, a dokładniej

$$f = \frac{Z}{N} \frac{\sigma(\bar{p}p)}{\sigma(\bar{p}n)} \frac{\mathcal{N}_n}{\mathcal{N}_p}, \quad (3.68)$$

nazywa się czynnikiem halo. W tej definicji, wielkości $\sigma(\bar{p}n)$ i $\sigma(\bar{p}p)$ oznaczają przekroje czynne na anihilację antyneutronu na swobodnych nukleonach.

¹⁰ Nazwa pochodzi od ang. *Low Energy Antiprotonic Ring*.

Wśród jąder, dla których przeprowadzono pomiary, znalazły się ^{58}Ni , ^{96}Zr , ^{96}Ru , ^{130}Te , ^{144}Sm , ^{154}Sm , ^{176}Yb , ^{232}Th , ^{238}U . Wybór ich nie był przypadkowy. Chodziło między innymi o to, by produkty anihilacji można było zidentyfikować (by miały odpowiednio długie czasy życia itd). W ramach dyskutowanych modeli SkHF i modelu relatywistycznego, istnieje możliwość wyznaczenia wielkości charakteryzujących peryferyjne rozkłady materii jądrowej. Należy jedynie zapewnić wysoką precyzję obliczeń. Gęstości materii jądrowej w interesującym obszarze ($r \sim R_0 + 2 \div R_0 + 3$) fm, są znikomo małe, a ich stosunki decydują o zjawiskach, które zamierzamy opisać. Ze względu na to do obliczeń został wybrany prosty, sferyczny model RMF z parametrami L-HS (tabela 3.4.), w którym rozwiązania równań pola Diraca (3.36) otrzymuje się przez całkowanie ich w dowolnie dużym zakresie współrzędnej radialnej r . Założenie symetrii sferycznej, w przypadku dyskutowanych nuklidów, jest pewnym uproszczeniem, które jednak z powodu używania względnych wielkości, nie powinno zbyt fałszować otrzymanych wyników.

Czynnik halo.

Antyproton po przejściu przez powłokę elektronową atomu i po utracie swojej początkowej energii, zajmuje pewną orbitę, tworząc atom antyprotonowy. Rozmiar orbity antyprotonu wyznacza w zasadzie jego masa $m_{\bar{p}}$ oraz ładunek jądra Z . Wychodząc z modelu Bohra atomu wodoropodobnego, można oszacować promień b_n , n -tej orbity antyprotonowej w atomie, jako $b_n = b_0 n^2 m_e / m_{\bar{p}} Z$. Wielkość b_0 jest promieniem bohrowskim elektronu ($b_0 \approx 0,529 \times 10^{-10}$ m), a m_e jego masą. Stąd, dla *typowych*, kołowych orbit antyprotonowych, o $n = 5 \div 8$ otrzymamy dla promienia b_n wartość rzędu $25 \div 65$ fm. Pierwsza orbita elektronowa znajduje się tysiąc razy dalej! Z drugiej strony, promień typowej orbity b_n jest kilkanaście razy większy od promienia jądrowego R_0 . Patrząc na to ze strony oddziaływań elektromagnetycznych, które decydują o wiązaniu atomu antyprotonowego, jądro można traktować punktowo. Funkcja falowa antyprotonu Ψ może więc być funkcją atomu wodoropodobnego i można ją wyznaczyć z równania Schrödingera lub Diraca dla wyliczonego rozkładu ładunku jądrowego.

Funkcja falowa antyprotonu i funkcje nukleonów przekrywają się w obszarze małych gęstości jądrowych. Szerokość na anihilację $\Gamma_{n(p)}$ jest proporcjonalna do wielkości tego przekrycia

$$\Gamma_{n(p)}^s \sim \int \rho_{n(p)}(r) |\Psi^{n, n-1}(r)|^2 P(r) r^2 dr. \quad (3.69)$$

Wyrażenie tego typu pozwoliło wyjaśnić zjawisko wychwytu mezonów K^- z powłok atomowych przez jądra atomowe [195]. Wskaźniki n i p oznaczają, że rozważana wielkość dotyczy neutronów lub protonów. Podobnie jak w cytowanej pracy Bethego i Simensa [195], będziemy rozważać tylko kołowe orbity antyprotonu. Przez $\Psi^{n, n-1}(r)$ oznaczymy funkcję stanu o głównej liczbie kwantowej n i o momencie pędu $l = n - 1$. Czynniki $P(r)$, który wchodzi pod całkę definiującą Γ opisuje prawdopodobieństwo ucieczki pionów. Zapewnia on, że w obliczeniach nie uwzględnimy pionów, które spadną na jądro atomowe i wzbudzą je tak, że po wypromieniowaniu neutronów lub protonów jądro to *ucieknie* z pola widzenia doświadczenia.¹¹ W ten sposób Γ dotyczy (w przybliżeniu) tylko peryferyjnych reakcji anihilacji.

Czynnik proporcjonalności w wyrażeniu na szerokość absorpcji Γ . zawiera informacje o przekrojach czynnych na reakcję anihilacji antyprotonu na neutronie lub na protonie wewnątrz jądra. Można tu użyć przekrojów czynnych odpowiadających anihilacji na nukleonach swobodnych. Byłoby to jednak uproszczeniem. Można założyć, że anihilację (absorpcję) opisuje urojona część $\Im W(r)$ potencjału optycznego $W(r)$. W modelu lokalnej gęstości (patrz np. [196]), zakłada się, że $W(r) = a\rho_{n(p)}(r)$, gdzie a jest stała zespoloną $a = a_r + i a_i$. Wartość tej stałej można wyznaczyć z doświadczenia. W pracy [197] oszacowano jej wielkość dla izotopów tlenu, ^{16}O oraz ^{18}O . Wynika z niej, że wielkość ta zależy od stanu antyprotonu (3d lub 4f) w atomie tlenu.

¹¹ Oznacza to, że liczby Z lub N nie zmieniają się zgodnie z formułami (3.66) lub (3.67) — zmieniają się o kilka jednostek. Powoduje to przesunięcie „produktu” anihilacji w obszar nie uwzględniany w obserwacjach.

Oznaczając przez $a_{n(p)}$ neutronową (protonową) wielkość a , poprawioną szerokość Γ na anihilację (3.69) zapiszemy w postaci

$$\Gamma_{n(p)}^s = \Im a_{n(p)} \int \rho_{n(p)}(r) |\Psi^{n, n-1}(r)|^2 P(r) r^2 dr. \quad (3.70)$$

Czynnik f można teraz zdefiniować następująco

$$f = \frac{Z \Im a_p \sum_s \Gamma_n^s}{N \Im a_n \sum_s \Gamma_p^s}. \quad (3.71)$$

Czynnik halo był również badany w pracach [198, 199]. Gęstości jądrowe $\rho_{n(p)}(r)$ wyznaczano z metody SkHF, przy założeniu symetrii sferycznej. Przyjęta tam definicja f odbiega od podanej brakiem wysumowania po stanach antyprotonowych. Jako czynnik halo przyjęto stosunek anihilacji antyprotonu na neutronach i na protonach w konkretnym stanie atomowym antyprotonu.¹²

Czynnik $\Im a_n / \Im a_p$ wybrany został tak, by uprościć podobny czynnik zawarty w stosunku $\sum_s \Gamma_n^s / \sum_s \Gamma_p^s$.

Przedyskutujemy jego ważność gdyż może on okazać się istotny przy porównaniach otrzymanych wyników z danymi doświadczalnymi. W pracy [200] zmierzono wartość $\Im a_n / \Im a_p$ dla jądra ^{12}C jako równą 0,65. W pracy [201] wielkość ta jest równa 0,80. Autorzy pracy [202] podają wyniki pomiarów relatywnych stosunków anihilacji antyprotonów na neutronach i protonach w spoczynku, w wodorze i deuterze. W stanie singletowym stosunek ten wynosi 0,6, natomiast w stanie trypletowym jest bliski jedności. Praca [203] podaje wartość stosunku $\sigma(\bar{p}n) / \sigma(\bar{p}p) = 0,75$. Różnice występujące w pomiarach $\sigma(\bar{p}n) / \sigma(\bar{p}p)$, mówią, że czynnik korekcyjny, uwzględniający różnicę przekrojów czynnych na anihilację we wzorze (3.71), powinien zależeć od jądra oraz stanu w jakim anihilacja zachodzi.

¹² W pracy o absorpcji mezonów K^- w jądrach atomowych, Bethe i Simens [195], argumentują, że wysumowanie po różnych powłokach mezonowych, nie jest konieczne gdyż wartości czynnika absorpcji $(\Gamma_n + \Gamma_p) / \Gamma_\tau$, gdzie Γ_τ jest szerokością na promieniowanie, obliczane dla kolejnych, rosnących powłok gwałtownie maleją.

Rozwiązaniem może okazać się normalizacja oszacowań teoretycznych względem wybranego jądra.

Czynnik korekcyjny $P(r)$. Przy porównaniach z danymi eksperymentalnymi, należy uwzględnić tylko te akty anihilacji, które prowadzą do końcowych stanów jądrowych zliczanych, czyli tych, które przewidują diagramy reakcji (3.67,3.66). Aby to zapewnić, czynnik $P(r)$ powinien wykluczać wszystkie złe anihilacje. Tworzą go dwa prawdopodobieństwa: prawdopodobieństwo ucieczki pionów $P_{\pi,esc}(r)$ i prawdopodobieństwo niemożności głębokiego wzbudzenia jądra P_{dh} . Pierwsze z prawdopodobieństw jest w zasadzie czynnikiem geometrycznym, równym [204]

$$P_{geom}(r) = 1 - \frac{\Omega}{4\pi}, \quad (3.72)$$

gdzie Ω jest kątem pod jakim widać powierzchnię jądra z punktu w którym zaszła anihilacja. Z prostych rozważań geometrycznych, wynika, że wielkość P_{geom} wynosi

$$P_{geom}(r) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_0}{r}\right)^2} \right), \quad (3.73)$$

gdzie R_0 jest promieniem jądra. W punkcie $r = R_0$, $P_{geom} = 1/2$, a daleko od jądra $P_{geom} \rightarrow 1$. Prawdopodobieństwo ucieczki pionów, wynosi więc $(1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - (R_0/r)^2}))^{\bar{p}}$. Oznaczmy przez \bar{p} średnia liczbę pionów powstałych w procesie anihilacji, Prawdopodobieństwo ich ucieczki z miejsca powstania bez trafienia w jądro, wynosi

$$P_{\pi,esc} = \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_0}{r}\right)^2} \right) \right)^{\bar{p}}. \quad (3.74)$$

Wielkość tę można ulepszyć uwzględniając skończony zasięg sił NN̄. Prowadzi to do poprawki proporcjonalnej (w pierwszym rzędzie) do (a/R_0) , w której a jest promieniem działania sił. Jest ona ważna tuż przy powierzchni i tylko w przypadku jąder lekkich, o małym promieniu krzywizny R_0 .

Współczynnik $P_{\pi,esc}$ w pierwszym przybliżeniu i w wąskim obszarze maksymalnej anihilacji (z oszacowań wynika, że jest to przedział

($R_0 + 2, R_0 + 3$) fm), jest prawie liniową funkcją r . Przesunięcia maksimumów krzywych absorpcji w kierunku większych r są zaniedbywalne. Prawdopodobieństwo niemożności głębokiego wzbudzenia P_{dh} jest w niniejszej pracy przyjęte za pewność (patrz dyskusja wyników).

Relatywny czynnik rozmycia powierzchni.

Wprowadźmy następującą średnią gęstość

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\mathcal{N}_N} \int d\tau \rho^2(\tau), \quad (3.75)$$

gdzie \mathcal{N}_N jest liczbą cząstek,

$$\mathcal{N}_N = \int d\tau \rho_N(\tau), \quad (3.76)$$

a $\rho_N(\tau)$ jest sferycznie symetrycznym rozkładem gęstości nukleonów jednego typu ($N = p$, lub n). W przypadku rozkładu Fermiego,

$$\rho(\tau) = \rho_0 \left(1 + \exp \frac{\tau - R}{a} \right)^{-1}, \quad (3.77)$$

w którym ρ_0 jest gęstością centralną, a a jest szerokością rozmycia powierzchni jądrowej, wielkość $\bar{\rho}$ można wyznaczyć w oparciu o przybliżoną formułę obliczania całek Fermiego

$$F_n(k) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(1 + \exp(x - k))}, \quad (3.78)$$

korzystając z pracy Eltona [205]. Gęstość średnią $\bar{\rho}$ można najpierw zapisać w postaci

$$\bar{\rho} \sim F_2(k) - 2F_1(k), \quad (3.79)$$

gdzie $k = R/a$, i następnie zastosować wspomnianą formułę przybliżoną. Rozwinięcie w drugim rzędzie względem parametru a/R prowadzi do wyrażenia

$$\bar{\rho} \approx \rho_0 \left(1 - 3\frac{a}{R} + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right). \quad (3.80)$$

Człon liniowy $-3a/R$ czyni tę funkcję bardzo czułym wskaźnikiem peryferyjnych własności rozkładu $\rho(\tau)$.

Korzystając z definicji $\bar{\rho}$ wprowadzimy wielkość

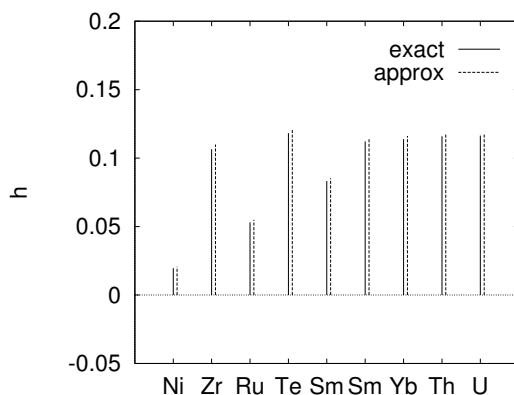
$$h = 1 - \frac{Z}{N} \frac{\bar{\rho}_n}{\bar{\rho}_p}. \quad (3.81)$$

Wielkość ta opisuje odstępstwo obu rozkładów w odniesieniu do rozkładów jednorodnych. Jeśli wykorzystamy wyrażenie (3.80) otrzymamy

$$h \approx 3 \frac{a_n - a_p}{R}, \quad (3.82)$$

gdzie a_n i a_p są szerokościami rozmycia powierzchni rozkładów neutronów i protonów. Założono też, że $R_n \approx R_p \approx R$.

Wprowadzona wielkość, nazwana odchyleniem względnej gęstości i wyliczona według modelu kropelkowego [3, 4, 206, 160], pokazana jest na rys. 3.28. Kolejne linie odpowiadają nuklidom: ^{58}Ni , ^{96}Zr , ^{96}Ru , ^{130}Te , ^{144}Sm , ^{154}Sm , ^{176}Yb , ^{232}Th , ^{238}U . Linia ciągłą zaznaczono wynik uzyskany przez dokładne całkowanie numeryczne, natomiast wyniki zaznaczone linią przerywaną otrzymano według formuł przybliżonych (3.81, 3.80) po wyznaczeniu z formuł Myersa-Schmidta [206] wchodzących w nie parametrów.



Rysunek 3.28. Odchylenie względnej gęstości h wyliczone w modelu kropelkowym dla wybranych nuklidów [207, B].

Dyskusja wyników.

Obie wprowadzone wielkości, czynnik halo f oraz odchylenie względnej gęstości h zostały wyliczone dla wszystkich jąder, dla których zmierzono czynniki halo. Obliczenia przeprowadzono w modelu relatywistycznym z parametryzacją L-HS.

W tabeli 3.9 pokazano wyniki tych obliczeń i ich odpowiedniki doświadczalne. Zmierzona wielkość czynnika halo dla jądra ^{144}Sm sugeruje

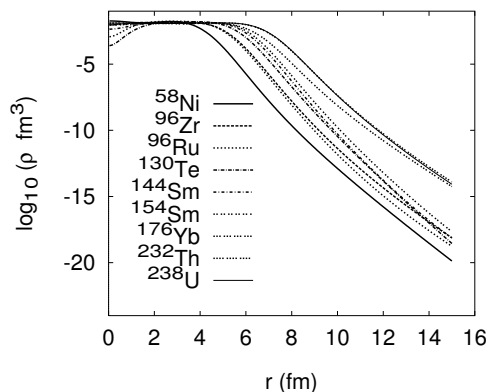
Tablica 3.9. Zmierzone (pierwszy wiersz) i oszacowane (drugi wiersz) czynniki halo neutronowego wyliczone w modelu RMF z parametryzacją L-HS dla wybranych jąder atomowych. Podkreślono najmniejszą i największą wartość zmierzonych czynników halo.

^{58}Ni	^{96}Zr	^{96}Ru	^{130}Te	^{144}Sm	^{154}Sm	^{176}Yb	^{232}Th	^{238}U
0,9	2,6	0,8	4,1	<u>$\leq 0,4$</u>	2,0	<u>8,1</u>	5,1	6,0
1,2	2,3	2,3	3,5	1,5	3,0	3,6	5,5	5,0

istnienie w nim halo protonowego. Wynik teorii nie zgadza się z obserwacją. Podobny wynik, nie potwierdzający halo protonowego w tym jądrze samaru, otrzymano w sferycznym modelu SkHF [198].

Aby zdać sprawę z wielkości gęstości z jaką mamy do czynienia, na rys. 3.29 przedstawiony jest logarytm dziesiętny z całkowitej gęstości jądrowej ($\rho(r) = \rho_n(r) + \rho_p(r)$) w funkcji odległości r dla dziewięciu jąder. Krzywe różnią się głównie wielkością, natomiast ich nachylenia są bardzo podobne. W odległości, równej $R_0 + 2 \div R_0 + 3$ fm, gęstość ma wartość tysiąc razy mniejszą niż w centrum jądra. Wartość gęstości w odległości przewyższającej dwukrotnie średni promień jądrowy jest kilkaset tysięcy i więcej razy mniejsza od gęstości centralnej.

Obraz ten nie opisuje jednak pełnej sytuacji. Rysunek następny, (3.30), przedstawia logarytm dziesiętny ze stosunku gęstości neutronów i protonów $l(r) = \log_{10}(\rho_n(r)/\rho_p(r))$ w funkcji r , w tych samych jądrach, obliczony w modelu RMF. Dla celów lepszej przejrzystości rysunku, kolejne krzywe



Rysunek 3.29. Logarytm z gęstości jądrowej w funkcji współrzędnej radialnej r dla dyskutowanych w pracy jąder atomowych obliczony w modelu RMF z parametrami L-HS [207, B].

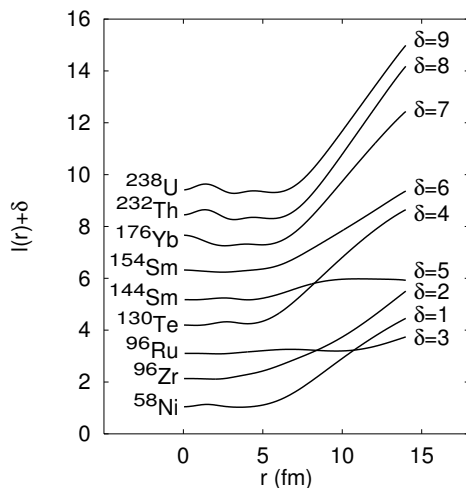
reprezentujące poszczególne jądra atomowe, są przesunięte o wielkość δ podaną po prawej stronie rysunku. Gęstość neutronów, prawie w każdym wypadku, przewyższa gęstość protonową o kilka rzędów wielkości w odległości większej od średniego promienia jądrowego.

W zjawisku anihilacji antyprotonu biorą udział głównie te stany neutronowe i protonowe, których wkład do peryferyjnych gęstości jądrowych jest największy. Ten parcjalny wkład jest ułamkiem zdefiniowanym jako

$$\rho_{\nu,q}(r)/\rho(r) = \rho_{\nu,q}(r) / \sum_{\mu,q'} \rho_{\mu,q'}(r), \quad (3.83)$$

gdzie $\rho_{\nu,q}(r)$ jest gęstością ν -tego stanu protonowego ($q = p$) lub neutronowego ($q = n$), równą $|\psi_{\mu,q}(r)|^2$, mianownik jest całkowitą gęstością materii jądrowej $\rho = \sum_{q=p,n} \rho_q$.

Parcjalne gęstości jądrowe, wszystkich stanów spod powierzchni Fermiego, dla ośmiu jąder atomowych, przedstawia rys. 3.31. Linia ciągła pokazano wkłady pochodzące od stanów neutronowych, linią przerywaną — od protonowych. Strzałki wskazują miejsca odpowiadające średnim promieniom jądrowym R_0 . W odległości $R_0 + 2 \div R_0 + 3 \text{ fm}$, w mieszance stanów protonowo–neutronowych *wystaje* zazwyczaj jeden stan



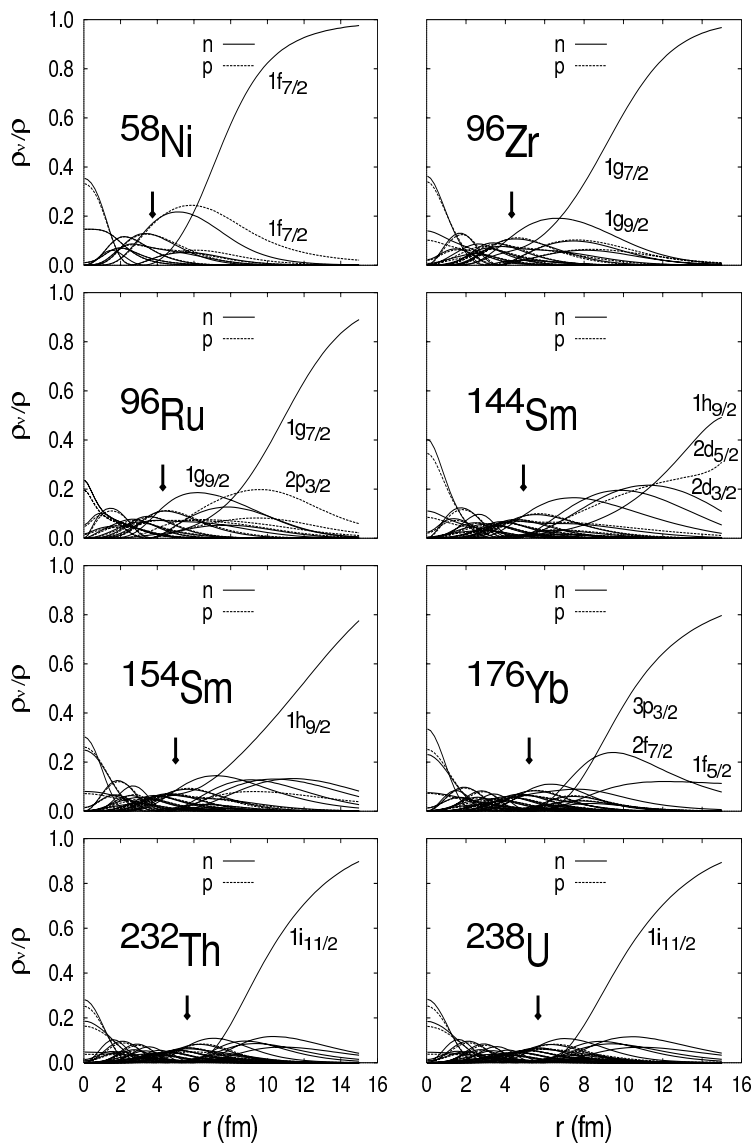
Rysunek 3.30. Logarytm dziesiętny ze stosunku gęstości neutronowej i protonowej $l(r) = \log_{10}(\rho_n(r)/\rho_p(r))$ w funkcji r dla wymienionych po lewej stronie jąder atomowych, obliczony w modelu RMF z parametrami L-HS [207, B].

neutronowy. Może to oznaczać również jego dominujący wkład w anihilację antyprotonu. Stany te, co można sprawdzić w widmie poziomów jednocząstkowych, są najwyżej położonymi stanami energetycznymi. Analiza widma energii jednocząstkowych i rys. 3.31, sugeruje, że wzbudzenia głęboko leżących stanów jednocząstkowych są wielokrotnie mniejsze niż prawdopodobieństwo wzbudzenia wysokopolożonych w energii stanów o największej gęstości parcjalnej. Czynniki P_{dh} wchodzący w skład czynnika $P(r)$ w definicjach (3.69,3.70) jest więc bliski jedności. Możemy stwierdzić *a posteriori*, że w definicjach tych można go opuścić. Ta pobieżna analiza nie stanowi pełnego rozwiązania problemu.

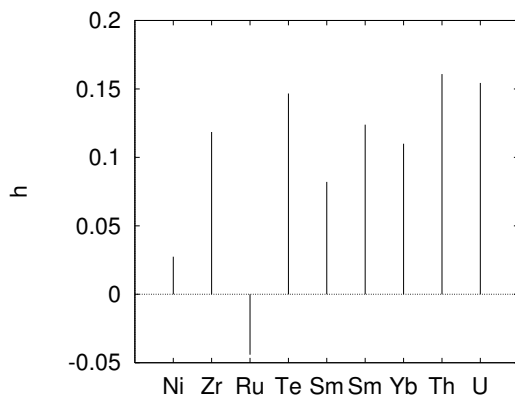
Na zakończenie prezentacji wyników dotyczących możliwości występowania halo neutronowego w jądrach atomowych, na rys. 3.32, analogicznym do rys. 3.28, pokazano szacunkowe odchylenia względnej gęstości h zdefiniowanej w (3.81). Używano wyliczonych w RMF gęstości jądrowych. Interesującym faktem jest tu ujemna wartość h dla jądra ^{96}Ru . Istnieje

pewna struktura tej wielkości i niewielkie korelacje z obliczonym czynnikiem f , który pokazujemy na rysunku następnym (rys. 3.33).

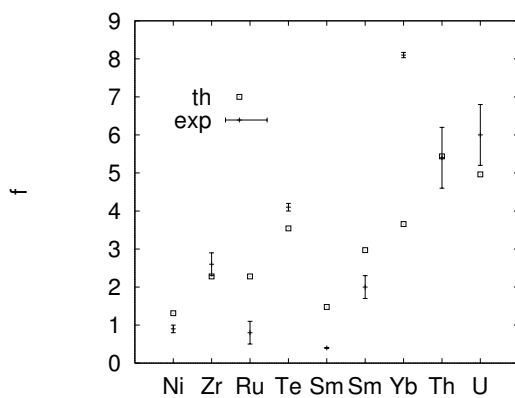
Idea obserwacji halo neutronowego nie jest nowa. Obserwacje halo mogą pomóc w wyznaczeniu średnich promieni rozkładów neutronowych w jądrach. Na możliwość wystąpienia halo neutronowego w jądrach atomowych, zwrócono np. uwagę w pracy [208], w której zmierzono promień rozkładu neutronów w ołowiu ^{208}Pb .



Rysunek 3.31. Ułamki parcjalnych gęstości jądrowych dla ośmiu badanych w pracy nuklidów [207, B]. Linia ciągła pokazano układy neutronowe, linią przerywaną protonowe. Strzałki wskazują średnie promienie jądrowe R_0 . W odległości większej o $2 \div 3$ fm w mieszance stanów protonowo–neutronowych *wystaje* zazwyczaj jeden stan neutronowy.



Rysunek 3.32. Oszacowania odchylenia względnej gęstości średniej h [207, B].



Rysunek 3.33. Oszacowania czynnika halo neutronowego f (puste kwadraciki) [207, B]. Krzyżykami zaznaczono wyniki doświadczalne z prac [182, 184].

Rozdział 4

Podsumowanie

Z badań przeprowadzonych w przedstawionej pracy wynika wiele wniosków dotyczących zarówno interpretacji danych doświadczalnych, siły przewidywania używanych modeli jak również zastosowanych technik teoretycznych i rachunkowych.

1. Klasyczne modele powłokowe w połączeniu z metodą Strutinskiego zadowalająco opisują i przewidują czasy życia jąder ze względu na rozszczepienie spontaniczne. Dokładność obliczeń wynosi od 1,5 do 2 rzędów wielkości.
2. Dynamiczna interpretacja zmiennych *pairing*, Δ_n i Δ_p , wprowadza do opisu nowy mechanizm, który m. in. obniża teoretyczne czasy życia jąder ze względu na rozszczepienia. Silna zależność składowych $B_{\Delta\Delta}$ parametru masowego od obu przerw energetycznych *pairing* powoduje, że proces rozszczepienia przebiega tak, iż efektywny parametr masowy maleje, a efektywna bariera rośnie.
3. Oprócz zwykłych, krótkożyciowych stanów wzbudzonych, modele przewidują istnienie stanów K-izomerycznych, które nie rozpadają się przez rozszczepienie szybciej niż stany podstawowe. Wyliczono współczynniki opóźnienia (h) rozpadów. Sugeruje się, że w tej sytuacji, pomiary czasów życia „stanów podstawowych” nowych jąder atomowych, mogą zawierać domieszki stanów wzbudzonych.
4. Ciepła reakcji Q_α otrzymane z modelu Woodsa–Saxona–Strutinskiego, odtwarzają najlepiej czasy życia jąder ze względu na emisję alfa, przy stosowaniu modelu Viola–Seaborga (VS). Na ogół zgodność wyliczonych czasów T_α wynosi 1–1,5 rzędu wielkości. Nie jest to rezultat zadowalający. Dokładna analiza wyników dotyczących rozpadów alfa

pokazuje, że formuły fenomenologiczne opisujące emisję α wymagają rewizji. Nie zawierają one praktycznie żadnych informacji o strukturze jądra. Istnieje więc potrzeba dalszych badań w tej dziedzinie.

5. W pracy podano czasy życia jąder najcięższych ze względu na emisję cząstek alfa oraz ze względu na wychwyty elektronu z powłoki K i rozszczepienie dla wszystkich typów jąder: parzystych, nieparzystych i podwójnie parzystych (do $Z=111$). Ciężkie izotopy jąder najcięższych najchętniej rozpadają się przez emisję α . W obszarze średnich mas, procesy emisji α i rozszczepienie są konkurencyjne, a w obszarze mas lekkich sytuacja jest odwrotna — dominuje rozszczepienie. Sposób rozpadu poprzez emisję α pomaga identyfikować nowe nuklidy (nawet w wypadku gdy obserwuje się jedno jądro atomowe) i stwarza nadzieję na produkcję coraz cięższych pierwiastków.
6. Czynniki zahamowania rozszczepienia dla jąder nieparzystych przewidują, zgodnie z pomiarami, wyższe czasy życia ze względu na rozszczepienie, dla jąder nieparzystych lub podwójnie nieparzystych.
7. Modele samozgodne Hartree'ego–Focka z siłami Skyrme'a i relatywistyczny model polowy, dają spójny opis deformacji i rozmiarów rozkładów gęstości jądrowych i średnich potencjałów. Nie jest to całkiem możliwe w przypadku modeli powłokowych.
8. Deformacje protonowa i neutronowa są na ogół różne. Informacja ta sugeruje nowy sposób traktowania deformacji w modelach mikroskopowo–makroskopowych Nilssona i Woodsa–Saxona polegający na wprowadzeniu różnych deformacyjnych stopni swobody dla obu typów pól średnich, protonowego i neutronowego, i kropli.
9. Momenty kwadrupolowe (lub zredukowane prawdopodobieństwa przejść $B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)$) oszacowane zarówno w modelu SkHF jak i RMF, pozostają na poziomie wartości doświadczalnych. Wyjątek stanowią słabo zdeformowane układy półmagiczne, w których przewidywania są systematycznie zaniżone. Efekty dynamiczne to wyjaśniają.
10. Metody rzutowania na dobry moment pędu i dobrą liczbę cząstek, obniżają wyliczone energie Hartree'ego–Focka lub Hartree'ego.
11. Obliczenia HF barier na rozszczepienie powinny zawierać zależną od

- deformacji, korekcyjną energię rotacyjną, wynikającą z rzutowania na dobry moment pędu (równy zeru w stanie podstawowym).
12. Stosowanie w modelu SkHF oddziaływań $\delta(\vec{r})$ pozwala w jednolity sposób generować oddziaływania resztkowe typu pairing.
 13. W pracy zastosowano klasyczny sposób generowania oddziaływań *pairing*, używając zwykłych albo rozszerzonych równań BCS. W dotychczasowych opracowaniach stosowano zazwyczaj doświadczalne przerwy energetyczne Δ . Nie pozwalało to na skuteczne stosowanie RMF w obszarach nieznanymi mas.
 14. Masy jąder atomowych otrzymane w modelach RMF, odtwarzane są wciąż na poziomie prostych modeli. Odchylenia standardowe mas od ich wartości doświadczalnych wskazują na potrzebę znalezienia nowych parametryzacji oddziaływań w modelu relatywistycznym. Masy mierzy się obecnie z dokładnością lepszą niż 10 keV.
 15. Obliczenia wykonane w obu typach modeli samozgodnych, SkHF oraz modelu RMF, potwierdzają istnienie w ciężkich izotopach badanych jąder (Sr, Xe, Ba, Gd) skóry neutronowej, której grubość rośnie z liczbą neutronów. Wynik ten potwierdzają badania jąder sferycznych. Grubość skóry neutronowej dochodzi do 0,4 fm. Skóra neutronowa (powierzchnia jądra) odpowiada za wiele zjawisk, których badanie może dostarczyć informacji o promieniach rozkładów neutronowych. Doświadczalne dane o promieniach rozkładów neutronowych R_n są znane w przypadku bardzo niewielu jąder. Ich znajomość może zmodyfikować obraz jądrowych oddziaływań NN. Można powiedzieć, że badanie skóry neutronowej lub protonowej (zarówno doświadczalne jak i modelowe) jest na obecnym etapie rozwoju teorii i wiedzy o jądrze atomowym, wysoce pożądane.
 16. Model RMF zadowalająco opisuje peryferyjne zachowanie się gęstości jądrowych, zarówno protonowej jak i neutronowej, przewidując istnienie halo neutronowego w szeregu jądrach. Fakt ten obserwuje się w doświadczeniu. Subtelne różnice gęstości można mierzyć obserwując anihilację antyprotonów na jądrach atomowych. Czynniki halo są bardzo podobne do obserwowanych.
 17. Wprowadzona została nowa charakterystyka halo neutronowego:

względne odchylenie gęstości. Parametr ten jest skorelowany z mierzonym czynnikiem halo. W najprostszym wypadku jest on proporcjonalny do różnicy parametrów rozmycia rozkładu neutronowego i protonowego.

Na zakończenie, wypada wypowiedzieć kilka uwag o perspektywach jakie rysują się przed najmłodszym omawianym w pracy relatywistycznym modelem jądra atomowego. Wymaga on dalszych ulepszeń i rozbudowy. Włączenie większej liczby pól mezonowych (ich liczba ograniczona jest tymczasem do trzech) oraz włączenie antycząstek (przyjęto założenie *no sea*), z których zrezygnowano, mogą istotnie zmienić teorię. Model RMF oddziaływań jądrowych mógłby być wówczas stosowany do opisu układów o dużej gęstości. Sytuacje takie powstają w zderzeniach ciężkich jonów oraz w przypadku gęstej materii gwiazdowej.

Już na poziomie fenomenologicznym, model relatywistyczny jądra atomowego stwarza szanse teoretycznego badania dziwnej materii jądrowej i jąder dziwnych, zbudowanych z hiperonów Λ , Σ , Ξ , itd. Aby to osiągnąć należy rozszerzyć go o odpowiednie pola, w tym o pola ze spinem $3/2$ (np. Ω^-). Ogólnie, można tu wprowadzić dowolne pola barionowe klasyfikowane multipletami $SU(3)$ — grupy symetrii oddziaływań silnych. Pola te dodaje się na poziomie gęstości funkcji Lagrange'a. Reszta to wynik uniwersalności modelu RMF. Należy w standardowy sposób wygenerować równania tych pól (pojawią się nowe ich typy, np. równanie Rarity–Schwingera dla cząstek o spinie $3/2$), rozwiązać je, wyliczyć wartości średnie obserwabli itd. Możliwości przedstawionego schematu ogranicza tylko dobroć samej teorii pola i teorii cząstek elementarnych.

Zastosowania modelu RMF nie ograniczają się tylko do opisu statycznych własności jąder atomowych. Składowe przestrzenne pól, równe zeru w statycznej teorii, i ich zależność od czasu, wyznaczają dynamikę układów jądrowych. Jest to dziedzina, która, jeśli pominąć kilka prostych zastosowań, w przedstawionym modelu RMF nie była badana i napewno dostarczy nowego spojrzenia na zachowanie się jąder atomowych.

Dodatek A

Oznaczenia i skróty

W pracy używane są powszechne lub nowe w fizycznej literaturze jądrowej skróty, które zwyczajowo definiuje się umieszczając ich brzmienie w nawiasie (), po podaniu pełnego brzmienia, np. ..., relatywistyczna teoria pola (RMF)... Oto ważniejsze z nich.

- **BCS**, model, metoda — model Bardeena–Coopera–Schriefera.
- **det** — wyznacznik, (ang. *determinant*).
- **ETFSI**, model — Extended Thomas Fermi with Strutinsky Integral [20].
- **FRLDM** — ang. *Finite Range Liquid Droplet Model* [21], model MM.
- **GCM** — metoda współrzędnej generującej, ang. *generator coordinate method*.
- **HF**, model lub metoda — model lub metoda Hartree’ego–Focka.
- **HFB**, model lub metoda — model lub metoda Hartree’ego–Focka–Bogoliubova.
- **MM**, model — model FRLDM: ang. *Finite Range Liquid Droplet Model* [21].
- **NL-SH** — parametryzacja nieliniowa ($g_2 \neq 0$ $g_3 \neq 0$ modelu RMF, patrz formuła 3.33).
- **N \bar{N}** , oddziaływanie — oddziaływanie nukleon–antynukleon.
- **n–n** — nieparzysto–nieparzysty(e).
- **Tr** — ślad (ang. *trace*).
- **rms** — średni błąd kwadratowy (ang. *root mean square*).
- **p–p** — parzysto–parzysty(e).
- **p–n** — parzysto–nieparzysty(e).
- **RMF**, model — model relatywistyczny średniego pola (ang. *relativistic mean field*).

- **Sk**, siły – siły, oddziaływanie Skyrme’a.
- **SkX**, siły – siły, oddziaływanie Skyrme’a w parametryzacji X.
- **SkHF**, model – model Hartree’ego–Focka z siłami Skyrme’a
- **SkTF**, metoda, model – metoda, model Skyrme’a–Thomasa–Fermiego.
- **SkXHF**, model – model Hartree’ego–Focka z siłą SkX.
- **TF**, metoda – metoda Thomasa–Fermiego.
- **WSS**, metoda – metoda Woodsa–Saxona–Strutinskiego.
- **NS**, metoda – metoda Nilssona–Strutinskiego.

Bibliografia

- [1] W. D. Myers and W. J. Swiatecki. Nuclear masses and deformations. *Nucl. Phys.*, 81:1, 1966.
- [2] W. D. Myers and W. J. Swiatecki. *Ark. Fys.*, 36:1, 1967.
- [3] W. D. Myers and W. J. Swiatecki. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 55:395, 1969.
- [4] W. D. Myers and W. J. Swiatecki. The nuclear droplet model for arbitrary shapes. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 84:186–210, 1974.
- [5] P. Möller and J. R. Nix. Nuclear masses from unified macroscopic - microscopic model. *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, 39:213–223, 1988.
- [6] V. M. Strutinsky. Shell effects in nuclear masses and deformation energies. *Nucl. Phys.*, A95:420–442, 1967.
- [7] V. M. Strutinsky. Shells in deformed nuclei. *Nucl. Phys.*, A122:1–33, 1968.
- [8] M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky, and C. Y. Wong. Funny hills: The shell–correction approach to nuclear shell effects and its applications to the fission process. *Rev. Mod. Phys.*, pages 320–405, 1972.
- [9] Z. Szymański. Efekty dzia/lania si/l kojarz/acych nukleony w pary w j/adrach atomowych. Preprint IBJ,65(430) i 70 (446), 1969.
- [10] S. G. Nilsson. Binding states of individual nucleons in strongly deformed nuclei. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 29:no 16, 1955.
- [11] S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymański, C. Wycech, C. Gustafson, I.-L. Lamm, P. Möller, and B. Nilsson. On the nuclear structure and stability of heavy and superheavy elements. *Nucl. Phys.*, A131:1–66, 1969.
- [12] J. Dudek and T. Werner. New parameters of the deformed Woods–Saxon potential. *J. Phys. G*, 4:1543–1561, 1978.
- [13] J. Dudek, Z. Szymański, and T. Werner. Woods–Saxon potential parameters optimized to the high spin spectra in the lead region. *Phys. Rev. C*, 23:920–925, 1981.
- [14] S. Ćwiok, J. Dudek, W. Nazarewicz, J. Skalski, and T. Werner. Single–particle energies, wave functions, quadrupole moments and G–factors in an axially

- deformed Woods–Saxon potential with applications to the two–centre–type nuclear problems. *Comput. Phys. Commun.*, 46:379–399, 1987.
- [15] T. H. R. Skyrme. The nuclear surface. *Phil. Mag.*, 1:1043–1054, 1956.
- [16] D. Vautherin and D. M. Brink. Hartree–Fock calculations with Skyrme’s interaction. I. Spherical nuclei. *Phys. Rev. C*, 5:626–647, 1972.
- [17] B. D. Serot and J. D. Walecka. The relativistic nuclear many–body problem. In J. W. Negele and E. Vogt, editors, *Advances in Nuclear Physics*, volume 16, pages 1–327. Plenum Press, New York, London, 1986.
- [18] D. Gogny. Self–consistent pairing calculations. In G. Ripka and M. Porneuf, editors, *Nuclear Self Consistent Fields*, pages 333–352, Amsterdam, 1975. North–Holland.
- [19] J. F. Berger, M. Girod, and D. Gogny. Microscopic analysis of collective dynamics in low energy fission. *Nucl. Phys.*, A428:23c–36c, 1984.
- [20] Y. Aboussir, J. M. Pearson, A. K. Dutta, and F. Tondeur. Thomas–Fermi approach to nuclear mass formula. (IV) The ETFSI–1 mass formula. *Nucl. Phys.*, A549:155–179, 1992.
- [21] P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki. Nuclear ground state masses and deformations. *Atomic Data Nucl. Data Tables*, 59:185–381, 1995.
- [22] A. Baran, K. Pomorski, A. /Lukasiak, and Sobiczewski A. A dynamical analysis of spontaneous-fission half-lives. *Nucl. Phys.*, A361:83–101, 1981.
- [23] R. D. Woods and D. S. Saxon. Diffuse surface optical model for nucleon–nuclei scattering. *Phys. Rev.*, 95:577–578, 1954.
- [24] J. Blaton. Procesy rozszczepiania ci/e/zkich j/ader. *Post/epy Fizyki*, 1:88–124, 1950.
- [25] A. Baran. Dynamika j/ader atomowych silnie zdeformowanych. Technical Report 1803//VII//PL//B, Institute of Nuclear Research, Warszawa, 1979. PhDThesis, Maria Curie-Sk/lodowska University, Lublin.
- [26] R. E. Bellman and R. E. Kalaba. *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*. American Elsevier Publ. Comp. Inc., New York, 1965.
- [27] W. Rubinowicz and W. Królikowski. *Mechanika teoretyczna*. PWN, Warszawa, 7 edition, 1995.
- [28] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison – Wesley Press Inc., Cambridge, Mass., 1950.
- [29] P. O. Fröman and N. Fröman. *JWKB Approximation, Contribution to the theory*. North Holland Press, 1965.
- [30] A. Staszczak, K. Pomorski, A. Baran, and K. Böning. Coupling of the pairing vibrations with the fission mode. *Phys. Lett.*, 161B:227–230, 1985.

- [31] Z. Patyk and A. Sobiczewski. Potential energy and spontaneous fission half lives for heavy and superheavy nuclei. *Nucl. Phys.*, A502:591c–600c, 1989.
- [32] R. Smolańczuk, H. V. Klapdor-Kleingrothaus, and A. Sobiczewski. Role of the deformation space admitted in the analysis of spontaneous fission. *Acta Phys. Pol.*, 24:685–705, 1993.
- [33] L. G. Moretto and R. P. Babinet. Large superfluidity enhancement in the penetration of the fission barrier. *Phys. Lett.*, 49B:147–149, 1974.
- [34] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:367–387, 1948.
- [35] C. Morette. On the definition and approximation of Feynman’s path integrals. *Phys. Rev.*, 81:848–852, 1951.
- [36] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [37] B. R. Holstein and A. R. Swift. Path integrals and the WKB approximation. *Am. J. Phys.*, 50:829–832, 1982.
- [38] B. R. Holstein. Bound states, virtual states, and nonexponential decay via path integrals. *Am. J. Phys.*, 51:897–901, 1983.
- [39] Barry R. Holstein. Semiclassical treatment of the double well. *Am. J. Phys.*, 56:338–344, 1988.
- [40] S. Levit. Time dependent mean–field approximation for nuclear dynamical problems. *Phys. Rev. C*, 21:1594–1602, 1980.
- [41] J. W. Negele. The mean-field theory of nuclear structure and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 54:913–1015, 1982.
- [42] J. W. Negele. Microscopic theory of fission dynamics. *Nucl. Phys. A*, 502:371c–386c, 1989.
- [43] H. Hofmann. Quantummechanical treatment of the penetration through a two-dimensional fission barrier. *Nucl. Phys. A*, 224:116–139, 1974.
- [44] E. K. Hulet, J. F. Wild, R. J. Dougan, R. W. Lougheed, J. H. Landrum, A. D. Dougan, P. A. Baisden, C. M. Henderson, R. J. Dupzyk, R. L. Hahn, M. Schödel, K. Sümmerer, and G. R. Bethune. Spontaneous fission properties of ^{258}Fm , ^{259}Md , ^{260}Md , ^{258}No , and $^{260}[104]$: Bimodal fission. *Phys. Rev. C*, 40:770–784, 1989.
- [45] D. Inglis. Nuclear moments of inertia due to nucleus motion in a rotating well. *Phys. Rev.*, 103:1786, 1956.
- [46] A. Baran and Z. /Lojewski. Analysis of numerical errors in calculations of fission half–lives. *Nukleonika*, 39:77–90, 1994.
- [47] K. Böning and A. Sobiczewski. Role of the deformation of multipolarity six in

- the dynamic description of spontaneous fission. *Acta Physica Polonica*, B14:287–301, 1982.
- [48] R. Vandenbosch and J. R. Huizenga. *Nuclear Fission*. Academic Press, New York, 1973.
- [49] S. Ćwiok, P. Rozmej, A. Sobiczewski, and Z. Patyk. Two fission modes of the heavy fermium isotopes. *Nucl. Phys.*, A491:281, 1989.
- [50] D. C. Hoffman. Spontaneous fission properties and lifetime systematics. *Nucl. Phys.*, A502:21–40, 1989.
- [51] A. Baran. Some dynamical aspects of the fission process. *Phys. Lett.*, 76B:8–10, 1978.
- [52] T. Kaniowska, A. Sobiczewski, K. Pomorski, and G. S. Rohoziński. Microscopic inertial functions for nuclei in the barrier region. *Nucl. Phys.*, A274:151–167, 1976.
- [53] K. Pomorski, T. Kaniowska, A. Sobiczewski, and G. S. Rohoziński. Study of the inertial functions for rare-earth nuclei. *Nucl. Phys.*, A283:394–412, 1977.
- [54] C. H. Britt. Experimental studies of fission barrier properties. *Nukleonika*, 25:71–1003, 1980.
- [55] P. Möller and J. R. Nix. Stability of heavy and superheavy elements. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 20:1681–1747, 1994.
- [56] J. A. Wheeler. Fission. In Condon and Odishow, editors, *Handbook of Physics*, pages 9–177–9–200. McGraw–Hill Book comp., 1958.
- [57] K. Pomorski. Spontaneous fission half lives for odd A nuclei. *Nukleonika*, 23:125–131, 1979.
- [58] Z. /Lojewski and A. Baran. Spontaneous fission half-life-times of double-odd nuclei ($Z \geq 97$). *Z. Phys.*, A322:695–700, 1985.
- [59] Z. /Lojewski and A. Baran. Half lives of heaviest nuclei with Woods-Saxon potential. *Z. Phys.*, A329:161–167, 1988.
- [60] A. Baran and K. Pomorski. New modified oscillator potential for nuclei in the actinide. *Z. Phys.*, A291:175–178, 1979.
- [61] A. Baran, A. Superson, and K. Pomorski. New estimates for the parameters of the modified oscillator potential of the rare earth nuclei. *Z. Physik*, A295:299–301, 1980.
- [62] A. Baran and Z. /Lojewski. Spontaneous fission of double-odd nuclei in Ω -nonconverging model. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*, XL//XLI:15–23, 1985//1986.
- [63] J. Dudek, A. Majhofer, J. Skalski, T. Werner, S. Ćwiok, and W. Nazarewicz. Parameters of the deformed Woods–Saxon potential outside $A = 110$ –210 nuclei. *J. Phys. G*, 5:1359–1381, 1979.

- [64] J. Randrup, S. E. Larsson, P. Möller, S. G. Nilsson, K. Pomorski, and A. Sobiczewski. Spontaneous-fission half-lives for even nuclei with $Z > 92$. *Phys. Rev. C*, 13:229–239, 1976.
- [65] Jr. Viola V. E. and G. T. Seaborg. *J. Inorg. Nucl. Chem.*, 28:741, 1966.
- [66] D. N. Poenaru, W. Greiner, K. Depta, M. Ivascu, and D. Mazilu. Calculated half-lives and kinetic energies for spontaneous emission of heavy ions from nuclei. *Atomic Data Nucl. Data Tables*, 34:423–538, 1986.
- [67] K. Böning, Z. Patyk, A. Sobiczewski, and S. Cwiok. Theoretical half-lives for the heaviest nuclei. *Z. Phys. A – Atomic Nuclei*, 325:479–484, 1986.
- [68] A. Baran and Z. /Lojewski. Alpha decay half-lives of heavy nuclei. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska*, XLVIII, 3:31–46, 1993.
- [69] A. Baran and Z. /Lojewski. Systematics of α half-lives of heaviest nuclei. *Nukleonika*, uka/ze si/e w Nr. 1//1996, 1996.
- [70] R. Taagepera and M. Nurmi. *Ann. Acad. Sci. Fennicae.*, Ser. A IV:78, 1961.
- [71] K. A. Keller and H. Münzel. Schaleneffekt und α -Halbwertszeit. *Z. Phys.*, 255:419–424, 1972.
- [72] P. Hornshøj, P. G. Hansen, B. Jonson, H. L. Ravn, L. Westgaard, and D. B. Nielsen. Width for S- and D-wave α -decay of neutron-deficient isotopes with $Z \leq 82$. *Nucl. Phys.*, A230:365–379, 1974.
- [73] P. O. Fröman. *Fys. Sk. Dan. Vid. Selsk.*, 1:3, 1957.
- [74] A. H. Wapstra, G. J. Nijgh, and R. Lieshout. *Nuclear Spectroscopy Tables*. North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1959.
- [75] D. N. Poenaru, M. Ivascu, and D. Mazilu. *J. Phys. (Paris)*, 44:791, 1983.
- [76] E. O. Fiset and J. R. Nix. Calculation of half-lives for superheavy nuclei. *Nucl. Phys.*, A193:647, 1972.
- [77] R. Smolańczuk, J. Skalski, and A. Sobiczewski. Spontaneous-fission half-lives of deformed superheavy nuclei. *Phys. Rev. C*, 52:1871–1880, 1995.
- [78] G. Münzenberg, P. Armbruster, G. Berthes, F. P. Hessberger, S. Hofmann, K. Poppensieker, W. Reisdorf, B. Quint, K.-H. Schmidt, H.-J. Schött, K. Sümmerer, I. Zychor, M. E. Leino, U. Gollerthan, and E. Handt. Evidence for $^{264}108$, the heaviest known even-even isotope. *Z. Phys. A – Atomic Nuclei*, 324:489–490, 1986.
- [79] S. Hofmann. Experimental for production of heavy elements at Darmstadt. In *Int. Summer School on heavy Ion Physics*, Dubna, USSR, October 1989.
- [80] S. Hofmann, N. Ninov, F. P. Hessberger, P. Armbruster, H. Folger, H. Münzenberg, H. J. Schött, A. G. Popeko, V. Yeremin A, A. N. Andreyev, S. Saro, R. Janik, and M. Leino. Production and decay of $^{269}110$. GSI-94-82, Preprint, November 1994.

- [81] S. Hofmann. The new element $Z = 110$. *Nucl. Phys. News*, 5:28, 1995.
- [82] P. Armbruster. The making and being of the heaviest elements 107–109. A quantal ballet of nucleons. GSI-88-31 Preprint, 5 1988. (Adress given at IOP, London, May 4, 1988 (Max-Born-Medal)).
- [83] P. Armbruster. Neutron rich clusters and the dynamics of fission and fussion. GSI-88-38 Preprint, 6 1988. (5th Int. Conf. on Clustering Aspects in Nuclear and Subnuclear Systems, July 25–29, 1988, Kyoto, Japan).
- [84] Yu. Ts. Et Al. Oganessian. The experiments aimed to synthesize element 110. INR Dubna Preprint, D7-87-392, 1987.
- [85] Yu. Ts. Oganessian. Synthesis and properties of superheavy nuclei. *Nucl. Phys.*, A583:823c–836c, 1995.
- [86] L. P. Somerville, N. J. Nurmia, J. M. Nitschke, A. Ghiorso, E. K. Hulet, and R. W. Lougheed. Spontaneous fission of rutherfordium isotopes. *Phys. Rev. C*, 31:1801–1815, 1985.
- [87] A. Ghiorso *et al.*. Evidence for the synthesis of $^{267}110$ produced by the $^{59}\text{Co}+^{209}\text{Bi}$ reaction. *Nucl. Phys.*, A583:861c–866c, 1995.
- [88] A. Baran and A. Staszczak. Influence of the pairing vibrations on the fission mode. In *Proceedings of XVIIIth Summer School on Nuclear Physics, Mikolajki, Poland*, pages 306–312, 1985.
- [89] S. Staszczak A. Piłat and K. Pomorski. Influence of the pairing vibrations on spontaneous fission probability. *Nucl. Phys. A*, A504:589–604, 1989.
- [90] S. Piłat, A. Staszczak, and K. Pomorski. Coupling of the pairing vibrations with the fission mode. In A. D. Carlson J. W. Behrens, editor, *50 Years with Nuclear Fission*, pages 637–642. National Academy of Science, National Institute of Standards and Technology, American Nuclear Society, Inc., April, 25–28 1989.
- [91] A. Ghiorso, K. Eskola, P. Eskola, and M. Nurmia. Isomeric states in ^{250}Fm and ^{254}No . *Phys. Rev. C*, 7:2032–2036, 1973.
- [92] M. S. Antony. Chart of nuclides – Strasbourg 1992. Centre de Recherches Nucléaires et Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1992.
- [93] A. Baran and Z. /Lojewski. Spontaneous fission of isomeric states in ^{250}Fm and ^{254}No . *Phys. Lett.*, B176:7, 1986.
- [94] A. Baran and Z. /Lojewski. Spontaneous fission of isomeric states of actinide nuclei. *Nucl. Phys.*, A475:327–337, 1987.
- [95] T. H. R. Skyrme. The effective nuclear potential. *Nucl. Phys.*, 9:615–634, 1959.
- [96] T. H. R. Skyrme. The spin–orbit interaction in nuclei. *Nucl. Phys.*, 9:635–640, 1958//59.
- [97] D. Vautherin. Hartree–Fock calculations with Skyrme’s interaction. II. Deformed nuclei. *Phys. Rev. C*, 7:298–316, 1973.

- [98] H. Flocard. Nuclear ground state properties with the Skyrme interaction. In G. Ripka and M. Porneuf, editors, *Nuclear Self Consistent Fields*, pages 219–254, Amsterdam, 1975. North–Holland.
- [99] M. Beiner, H. Flocard, Nguyen Van Giai, and P. Quentin. Nuclear ground state properties and self–consistent calculations with the Skyrme interaction. (I). Spherical nuclei. *Nucl. Phys.*, A238:29–69, 1975.
- [100] P. Ring and P. Schuck. *The Nuclear Many–Body Problem*. Springer Verlag, Heidelberg, 1980.
- [101] M. J. Giannoni and P. Quentin. Mass parameters in the adiabatic time–dependent Hartree–Fock approximation. II. Results for the isoscalar quadrupole mode. *Phys. Rev. C*, 21:2076–2093, 1980.
- [102] J. Dobaczewski, H. Flocard, and J. Treiner. Hartree–Fock–Bogoliubov description of nuclei near the neutron drip line. *Nucl. Phys.*, 422:103–139, 1983.
- [103] M. K. Pal. *Theory of Nuclear Structure*. Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York, 1983.
- [104] P. Bonche, J. Dobaczewski, H. Flocard, and P.-H. Heenen. Generator coordinate method for triaxial quadrupole collective dynamics in strontium isotopes. *Nucl. Phys.*, A530:149–170, 1991.
- [105] F. Tondeur. Pairing with a delta interaction in the energy density nuclear mass formula. *Nucl. Phys.*, A315:353–369, 1978.
- [106] A. K. Dutta, J.-P. Arcoragi, J. M. Pearson, R. Behrman, and F. Tondeur. Thomas–Fermi approach to nuclear mass formula. (I) Spherical nuclei. *Nucl. Phys.*, A458:77–94, 1986.
- [107] F. Tondeur, A. K. Dutta, J. M. Pearson, and R. Behrman. Thomas–Fermi approach to nuclear mass formula. (II) deformed nuclei and fission barriers. *Nucl. Phys.*, A470:93–106, 1987.
- [108] J. M. Pearson, Y. Aboussir, A. K. Dutta, R. C. Nayak, M. Farine, and F. Tondeur. Thomas–Fermi approach to nuclear mass formula. (III) force fitting and construction of mass table. *Nucl. Phys.*, A528:1–47, 1991.
- [109] Y. Nogami and I. J. Zucker. A note on the pairing interaction in nuclei. *Nucl. Phys.*, 60:203–208, 1964.
- [110] Y. Nogami. On the superconductivity theory of the nuclear pairing interaction. *Phys. Lett.*, 15:335–337, 1965.
- [111] J. F. Goodfellow and Y. Nogami. On the superconductivity approximation for the nuclear pairing interaction. *Can. J. Phys.*, 44:1321–1327, 1966.
- [112] H. C. Pradhan, Y. Nogami, and J. Law. Study of approximations in the nuclear pairing–force problem. *Nucl. Phys.*, A201:357–368, 1973.

- [113] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, and T. R. Werner. Closed shells at drip-line nuclei. *Physica Scripta*, T56:15–22, 1995.
- [114] J. Dobaczewski and W. Nazarewicz. Limits of proton stability near ^{100}Sn . *Phys. Rev. C*, 51:R1070–R1073, 1995.
- [115] W. Nazarewicz, J. Dobaczewski, and T. R. Werner. Physics of exotic nuclear states. *Physica Scripta*, T56:9–14, 1995.
- [116] N. K. Kuzmenko and V. M. Mikhajlov. Manifestation of surface pairing in finite nuclei. *Phys. Lett. B*, 322:301–303, 1994.
- [117] K. Dietrich, H. J. Mang, and J. H. Pradal. Conservation of particle number in nuclear pairing model. *Phys. Rev.*, 135:B22–B34, 1964.
- [118] A. Kamlah. An approximation for rotation-projected expectation values of the energy for deformed nuclei and a derivation of the cranking variational equation. *Z. Phys.*, 216:52–64, 1968.
- [119] S. T. Belyaev. Effect of pairing correlations on nuclear properties. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 31:no. 11, 1959.
- [120] P. Quentin and H. Flocard. Self-consistent calculations of nuclear properties with phenomenological effective forces. *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, 28:523–596, 1978.
- [121] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1958.
- [122] R. Machleidt. The meson theory of nuclear forces and nuclear structure. In J. W. Negele and Erich Vogt, editors, *Advances in Nuclear Physics*, volume 19, chapter 2, pages 189–376. Plenum Press, New York, London, 1989.
- [123] Particle Data Group. Review of particle properties. *Phys. Rev. D*, 50:1173, 1994.
- [124] M. H. Johnson and E. Teller. Classical field theory of nuclear forces. *Phys. Rev.*, 98:783, 1955.
- [125] H. P. Duerr. Relativistic effects in nuclear forces. *Phys. Rev.*, 103:469–480, 1956.
- [126] L. D. Miller and A. E. S. Green. Relativistic self-consistent meson field theory of spherical nuclei. *Phys. Rev. C*, 5:241–252, 1972.
- [127] J. D. Walecka. A theory of highly condensed matter. *Ann. Phys (N.Y.)*, 83:491–529, 1974.
- [128] J. Boguta. Ground state properties of ^{16}O , ^{40}Ca and ^{48}Ca in a relativistic Hartree theory of nuclear matter. *Nucl. Phys.*, A372:386–396, 1981.
- [129] C. J. Horowitz and B. D. Serot. Self-consistent Hartree description of finite nuclei in a relativistic quantum field theory. *Nucl. Phys.*, A368:503–528, 1981.
- [130] A. Bouyssy, S. Marcos, and J. F. Mathiot. Single-particle magnetic moments in relativistic shell model. *Nucl. Phys.*, A415:497–519, 1984.
- [131] A. Bouyssy, S. Marcos, and Pham Van Thieu. Systematics of nuclear matter

- and finite nuclei properties in a non-linear relativistic mean field approach. *Nucl. Phys.*, A422:541–581, 1984.
- [132] W. Pannert, P. Ring, and J. Boguta. Relativistic mean-field theory and nuclear deformation. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2420, 1987.
- [133] R. J. Furnstahl, C. E. Price, and G. E. Walker. Systematics of light deformed nuclei in relativistic mean-field models. *Phys. Rev. C*, 36:2590, 1987.
- [134] C. E. Price and G. E. Walker. Self-consistent description of deformed nuclei in a relativistic quantum field theory. *Phys. Rev. C*, 36:354–364, 1987.
- [135] Y. K. Gambhir, P. Ring, and A. Thimet. Relativistic mean field theory for finite nuclei. *Ann. Phys.*, 198:132–179, 1990.
- [136] A. Bouyssy. A simplified relativistic model for nuclei and hypernuclei. *Nucl. Phys.*, A381:445–471, 1982.
- [137] W. Koepf and P. Ring. A relativistic description of rotating nuclei. The yrast line of ^{20}Ne . *Nucl. Phys.*, A493:61–82, 1989.
- [138] W. Koepf, M. M. Sharma, and P. Ring. Scalar coupling in relativistic mean field theory and properties of nuclei and nuclear matter. *Nucl. Phys.*, A533:95–112, 1991.
- [139] D. Hirata, H. Toki, T. Watabe, I. Tanihata, and B. V. Carlson. Relativistic Hartree theory for nuclei far from stability line. *Phys. Rev. C*, 44:1467–1475, 1991.
- [140] V. Blum, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard, and W. Greiner. The fission barrier of ^{240}Pu in the relativistic mean field theory. *Phys. Lett. B*, 323:262–266, 1994.
- [141] K. Rutz, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard, and W. Greiner. Fission barriers and asymmetric ground states in the relativistic mean-field theory. *Nucl. Phys.*, A590:680–702, 1995.
- [142] S. A. Chin. A relativistic many-body theory of high density matter. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 108:301–367, 1977.
- [143] T. Matsui and Serot B. D. The pion propagator in relativistic quantum field theories of the nuclear many-body problem. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 144:107–167, 1982.
- [144] C. J. Horowitz and B. D. Serot. Relativistic Hartree theory of finite nuclei, the role of the quantum vacuum. *Phys. Lett.*, 140 B:181–186, 1984.
- [145] R. J. Perry. Effects of Fermi sea on finite nuclei. *Phys. Lett. B*, 182:269, 1986.
- [146] A. Bouyssy, J.-F. Mathiot, and N. V. Giai. Relativistic description of nuclear systems in the Hartree-Fock approximation. *Phys. Rev. C*, 36:380–401, 1987.
- [147] W. R. Fox. The one-loop effective potential in nuclear matter and nuclei. *Nucl. Phys.*, A495:463–482, 1989.
- [148] P.-G. Reinhard, M. Rufa, J. A. Maruhn, W. Greiner, and J. Friedrich. Nuclear

- ground state properties in a relativistic meson–field theory. *Z. Phys.*, 323:13–25, 1986.
- [149] J. Boguta and A. R. Bodmer. Relativistic calculation of nuclear matter and the nuclear surface. *Nucl. Phys.*, A292:413, 1977.
- [150] A. R. Bodmer and C. E. Price. Relativistic mean field theory for nuclei. *Nucl. Phys.*, A505:123–144, 1989.
- [151] P. Ramond. *Field Theory. A modern primer*. The Benjamin – Cummings Publishing Co., Inc., 1981.
- [152] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [153] P.-G. Reinhard. The nonlinearity of the scalar field in a relativistic mean field theory of the nucleus. *Z. Phys. A – Atomic Nuclei*, 329:257–266, 1988.
- [154] P.-G. Reinhard. The relativistic mean–field description of nuclei and nuclear dynamics. *Rep. Prog. Phys.*, 52:439, 1989.
- [155] M. M. Sharma, M. A. Nagarajan, and P. Ring. Rho meson coupling in the relativistic mean field theory and description of exotic nuclei. *Phys. Lett. B*, 312:377–381, 1993.
- [156] M. Rufa, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, and W. Greiner. Optimal parametrization for the relativistic mean–field model of the nucleus. *Phys. Rev. C*, 38:390–409, 1988.
- [157] C. J. Horowitz, J. A. McNeil, and B. D. Serot. The relativistic impulse approximation. In K. Langanke, J. A. Maruhn, and S. E. Koonin, editors, *Computational Nuclear Physics 1*, volume 1, pages 129–151. Springer–Verlag, Berlin, 1991.
- [158] J. Błocki and H. Flocard. Simple dynamical models including pairing residual interaction. *Nucl. Phys.*, A273:45–60, 1976.
- [159] G. A. Lalazissis and C. P. Panos. Isospin dependence of the oscillator spacing. *Phys. Rev. C*, 51:1247–1252, 1995.
- [160] R. W. Hasse and W. D. Myers. *Geometrical Relationships of Macroscopic Nuclear Physics*. Springer–Verlag, Berlin, 1988.
- [161] Y. K. Gambhir, P. Ring, and H. De Vries. Semi–phenomenological charge distribution in nuclei. *Europhys. Lett.*, 10:219–224, 1989.
- [162] F. Buchinger, J. E. Crawford, A. K. Dutta, J. M. Pearson, and F. Tondeur. Nuclear charge radii in modern mass formulas. *Phys. Rev. C*, 49:1402–1411, 1994.
- [163] A. Bohr and B. R. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume I Single–Particle Motion. W.A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1969.

- [164] W. D. Myers. Geometric properties of leptodermous distributions with applications to nuclei. *Nucl. Phys.*, A204:465–484, 1973.
- [165] E. W. Otten. Nuclear radii and moments of unstable isotopes. In D. A. Bromley, editor, *Treatise on Heavy-Ion Science*, volume 8, pages 517–638. Plenum Publishing Corporation, 1989.
- [166] J. Billowes and P. Campbell. High-resolution laser spectroscopy for the study of nuclear sizes and shapes. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 21:707–739, 1995.
- [167] X. Campi. How good are Hartree-Fock charge densities? In G. Ripka and M. Porneuf, editors, *Nuclear Self Consistent Fields*, pages 271–294, Amsterdam, 1975. North-Holland.
- [168] M. Nishimura and D. W. L. Sprung. Electromagnetic spin-orbit contribution to the C6 transition in $^{50}\text{Ti}(e,e')$. *Prog. Theor. Phys.*, 77:781–786, 1987.
- [169] J. L. Egido and L. M. Robledo. Microscopic study of the octupole degree of freedom in the radium isotopes with Gogny forces. *Nucl. Phys.*, A494:85–101, 1989.
- [170] P. Bonche, H. Flocard, P. H. Heenen, S. J. Krieger, and M. S. Weiss. Self-consistent study of triaxial deformations: Applications to the isotopes of Kr, Sr, Zr and Mo. *Nucl. Phys.*, A443:39–63, 1985.
- [171] A. Baran and W. Höhenberger. Ground state properties of strontium isotopes. *Phys. Rev. C*, 52:2242–2245, 1995.
- [172] A. Baran and W. Höhenberger. Gd isotopes systematics with Skyrme and δ -pairing forces. *Phys. Rev. C*, 53:1571–1579, 1996.
- [173] National Nuclear Data Center. NNDC online data service. Brookhaven National Laboratory, Upton, New York, USA. bnlnd2.dne.bnl.gov.
- [174] G. Audi and A. H. Wapstra. The 1993 atomic mass evaluation. (I) Atomic mass table. *Nucl. Phys.*, A565:1–65, 1993.
- [175] M. Brack, C. Guet, and Håkansson. Selfconsistent semiclassical description of average nuclear properties – a link between microscopic and macroscopic models. *Phys. Rep.*, 123:27–364, 1985.
- [176] A. Baran, J. L. Egido, B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski, P. Ring, and L. M. Robledo. Mean-field calculations of protons and neutrons distributions in Sr, Xe and Ba isotopes. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, 21:657–668, 1995.
- [177] D. Hirata, H. Toki, J. Tanihata, and P. Ring. Systematic study of Sr isotopes in the relativistic mean field theory. *Phys. Lett. B*, 314:168–172, 1993.
- [178] H. De Vries, C. W. Jager, and C. De Vries. Nuclear charge – density – distribution parameters from elastic electron scattering. *Atomic Data Nucl. Data Tables*, 36:495–536, 1987.
- [179] F. Buchinger, E. B. Ramsay, E. Arnold, W. Neu, R. Neugard, K. Wendt, R. E.

- Silverans, P. Lievens, L. Vermeeren, D. Berdichevsky, R. Fleming, D. W. L. Sprung, and G. Ulm. Systematics of nuclear ground state properties in $78\text{--}100\text{Sr}$ by laser spectroscopy. *Phys. Rev. C*, 41:2883–2897, 1990.
- [180] P. Möller and J. R. Nix. Nuclear pairing models. *Nucl. Phys.*, A536:20, 1992.
- [181] Z. Patyk. informacja prywatna, 1995.
- [182] J. Jastrz/ebski, H. Daniel, T. Von Egidy, A. Grabowska, Y. S. Kim, W. Kurcewicz, P. Lubi/nski, G. Riepe, W. Schmid, A. Stolarz, and S. Wycech. Signature of a neutron halo in ^{232}Th from antiproton absorption. *Nucl. Phys.*, A558:405c–414c, 1993.
- [183] J. Jastrz/ebski, W. Kurcewicz, P. Lubi/nski, A. Grabowska, A. Stolarz, H. Daniel, T. Von Egidy, F. J. Hartmann, P. Hofmann, Y. S. Kim, G. Riepe, and H. S. Plendl. Interaction of stopped antiprotons with cop. *Phys. Rev. C*, 47:216–224, 1993.
- [184] P. Lubi/nski, J. Jastrz/ebski, A. Grochulska, A. Stolarz, A. Trzci/nska, W. Kurcewicz, F. J. Hartmann, W. Schmid, T. Von Egidy, J. Skalski, R. Smolańczuk, S. Wycech, D. Hilscher, D. Polster, and H. Rossner. Neutron halo in heavy nuclei from antiproton absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3199–3202, 1994.
- [185] J. Dobaczewski. Warsztaty Fizyki J/adrowej, Kazimierz Dolny, 28.09–1.10 1995.
- [186] T. R. Werner, J. A. Sheikh, W. Nazarewicz, M. R. Strayerand, A. S. Umar, and M. Misu. Shape coexistence around $^{44}_{16}\text{S}_{28}$: the deformed $N = 28$ region. *Phys. Lett.*, B333:303–309, 1994.
- [187] A. E. Stuchbery. Deformation, pairing and magnetic moments in rare–earth nuclei. *Nucl. Phys.*, A589:222–238, 1995.
- [188] H. Mach, F. K. Wohn, G. Molnár, K. Sistemich, J. C. Hill, M. Moszyński, R. L. Gill, W. Krips, and D. S. Brenner. Retardation of $B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ rates in $^{90\text{--}96}\text{Sr}$ and strong subshell closure effects in the $A \sim 100$ region. *Nucl. Phys. A*, A523:197–227, 1991.
- [189] S. Raman, C. H. Malarkey, W. T. Milner, C. W. Jr Nestor, and P. H. Stelson. Transition probability, $B(E2) \uparrow$ from the ground to the first–excited 2^+ state of even–even nuclides. *Atomic Data Nucl. Data Tables*, 36:1–96, 1987.
- [190] S. Raman, C. W. Jr Nestor, S. Kahane, and K. H. Bhat. Predictions of $B(E2; 0_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ values for even–even nuclei. *Atomic Data Nucl. Data Tables*, 42:1–54, 1989.
- [191] B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski, and B. Skorupska-Mach. Mean square radii and quadrupole moments of even–even isotopes with $38 \leq Z \leq 60$, $N \leq 70$. *Nucl. Phys.*, A562:180–190, 1993.

- [192] T. Otto, G. Bollen, G. Savard, L. Schweikhard, H. Stolzenberg, G. Audi, R. B. Moore, G. Rouleau, J. Szerypo, and Z. Patyk. Penning-trap mass measurements of neutron-deficient Rb and Sr isotopes. *Nucl. Phys.*, A567:281, 1994. The ISOLDE Collaboration.
- [193] Z. Patyk, A. Baran, J.F. Berger, J. Dechargé, J. Dobaczewski, R. Smolańczuk, and A. Sobiczewski. On the quality of microscopic descriptions of nuclear mass. *Acta Phys. Pol.*, 27:457–462, 1995.
- [194] J. D. Bjorken and S. D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw–Hill, Inc., 1964.
- [195] H. A. Bethe and P. J. Siemens. Capture of K^- mesons in the nuclear periphery. *Nucl. Phys.*, B21:589–605, 1970.
- [196] J.-P. Jeukenne, A. Lejeune, and C. Mahaux. Single-particles states in nuclei. *Nukleonika*, 20:181–198, 1975.
- [197] C. J. Batty. Optical model analysis of antiprotonic oxygen atom data. *Phys. Lett. B*, 189:393–396, 1987.
- [198] S. Wycech, J. Skalski, R. Smolańczuk, J. Dobaczewski, and J. R. Rook. Antiprotonic studies of nuclear neutron haloes. [nucl-th/9510039](https://arxiv.org/abs/nuc-th/9510039), 1995.
- [199] S. Wycech and R. Smolańczuk. Nuclear neutron haloes as seen by antiprotons. [hep-ph/9507281](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9507281), 1995.
- [200] W. M. Bugg, G. T. Condo, E. L. Hart, H. O. Cohn, and R. D. McCulloch. Evidence for a neutron halo in heavy nuclei from antiproton absorption. *Phys. Rev. Lett.*, 31:475–478, 1973.
- [201] R. Bizzari, P. Guidoni, F. Marcelja, and F. Marzano. Antiproton–deuteron low energy cross-sections. *Il Nuovo Cimento*, 22:225–250, 1974.
- [202] R. A. Bryan and R. J. N. Phillips. Nucleon–antinucleon potential from single meson exchange. *Nucl. Phys.*, B5:201–219, 1968.
- [203] T. E. Kalogeropoulos and G. S. Tzanakos. Search for $\bar{n}n$ resonances and bound states near threshold. In G. Ekspung and S. Nilsson, editors, *Antinucleon–Nucleon Interaction*, pages 29–44. Pergamon Press, Oxford, 1977.
- [204] D. Polster, D. Hilscher, H. Rossner, T. Von Egidy, F. J. Hartmann, J. Hoffmann, W. Schmid, I. A. Pshenichnov, A. S. Iljinov, Ye.S. Golubeva, H. Machner, H. S. Plendl, A. Grochulska, J. Jastrzebski, W. Kurcewicz, and P. Lubiński. Light particle emission induced by stopped antiprotons in nuclei : Energy dissipation and neutron-to-proton ratio. *Phys. Rev. C*, 51:1167–1180, 1995.
- [205] L. R. B. Elton. *Nuclear Sizes*. Oxford University Press, 1960.
- [206] W. D. Myers and K.-H. Schmidt. An update on droplet model charge distribution. *Nucl. Phys.*, A410:61–73, 1983.

- [207] A. Baran, K. Pomorski, and M. Warda. Neutron halos in heavy nuclei, relativistic mean field approach. *Phys. Rev.*, C:praca wys/lana do druku, 1995.
- [208] H. J. Körner and J. P. Schiffer. Neutron radius of ^{208}Pb from sub-Coulomb pickup. *Phys. Rev. Lett.*, 27:1457–1460, 1973.