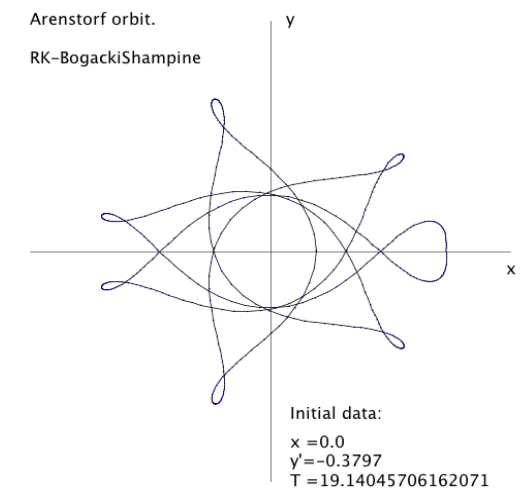


Zwyczajne równania różniczkowe (ZRR)

Metody Runge'go-Kutty



Metoda Runge'go-Kutty (4)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Embedded Runge-Kutta methods.

Są to jawne metody z dwoma zbiorami współczynników, pozwalające oszacować błąd obliczeń.

Tablica Butchera współczynników metody rzędu s :

$\emptyset$					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
	$\dots$	$\dots$			
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	a_{ss-1}	
	b_1	b_2	$\dots$	b_{s-1}	b_s
	b'_1	b'_2	$\dots$	b'_{s-1}	b'_s

Dla metody stopnia s przybliżona wartość $y_s = y(x+h)$ jest:

$$y_s = y + h \sum_{i=1..s} b_i k_i,$$

gdzie

$$k_i = f(x + c_i h, y + \sum_{j=1..s-1} a_{ij} k_j),$$

a szacunkowy błąd wynosi

$$er = \sum_{i=1..s} (b'_i - b_i) k_i.$$

Przykład metody

Bogacki-Shampine 2(3)

0				
1/2	1/2			
3/4	0	3/4		
1	2/9	1/3	4/9	
	2/9	1/3	4/9	0
	7/24	1/4	1/3	1/8

Metody w pliku **Butcher.java**

Nazwa	Rząd
RKF12a	1(2)
RKF12b	1(2)
RKF23a	2(3)
RKF23b	2(3)
BogackiShampine	2(3)
Ceschino	2(4)
Merson	4(5)
Fehlberg	4(5)
Zonneveld	4(3)
DormandPrince	4(5)
CashKarp	5(4)
Verner	6(5)
DormandPrince8	8(7)

Problem 3 ciał

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}$$

OGRANICZONY, KOŁOWY: $m_3=0$.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_3}{dt^2} = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}$$

Problem 3 ciał - Arenstorf

$$\begin{aligned}y_1'' &= y_1 + 2*y_2' - m' (y_1+m)/d_1 - m (y_1-m')/d_2 \\ y_2'' &= y_2 - 2*y_1' - m' y_2/d_1 - m y_2/d_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_1 &= ((y_1+m)^2+y_2^2)^{3/2}, \quad d_2 = ((y_1-m')^2+y_2^2)^{3/2}, \\ m &= 0.012277471; \quad m'=1-m;\end{aligned}$$

warunki początkowe:

1) Hairer, VOL. I:

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 0.994, \quad y_1'(0) = 0, \\ y_2(0) &= 0, \quad y_2'(0) = -2.00158510637908252240537862224; \\ \text{tend} &= 17.0652165601579625588917206249;\end{aligned}$$

2) Butcher:

$$\begin{aligned}y[0] &= 0.87978d; \quad y[1] = 0d; \\ y[2] &= 0d; \quad y[3] = -0.3797d; \\ \text{tend} &= 19.14045706162071d;\end{aligned}$$

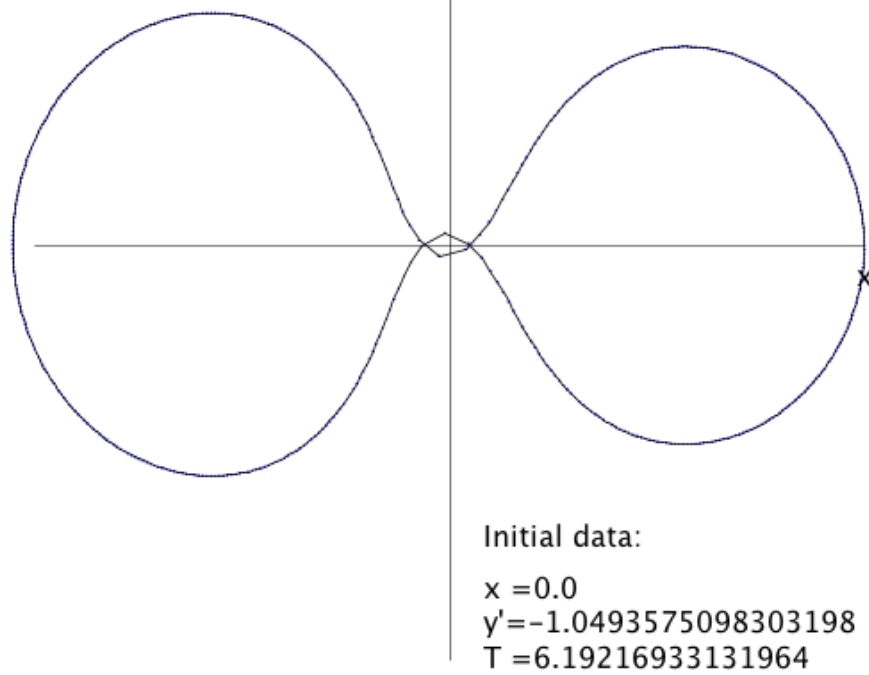
3) Hairer, vol I, Ex II, 6/4

$$\begin{aligned}y[0] &= 0.994; \quad y[1] = 0d; \\ y[2] &= 0d; \quad y[3] = -2.03173262955733683573022057924d; \\ \text{tend} &= 11.124340337266085134999734047d;\end{aligned}$$

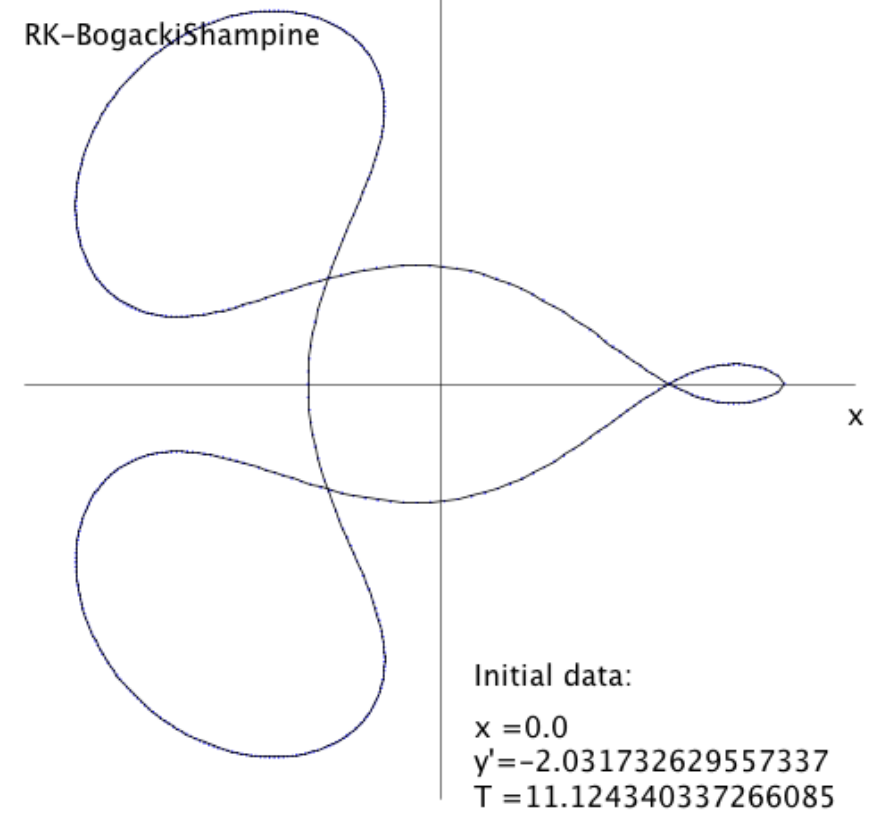
4) Shampine...

$$\begin{aligned}y[0] &= 1.2; \quad y[1] = 0d; \\ y[2] &= 0d; \quad y[3] = -1.04935750983031990726; \\ \text{tend} &= 6.19216933131963970674;\end{aligned}$$

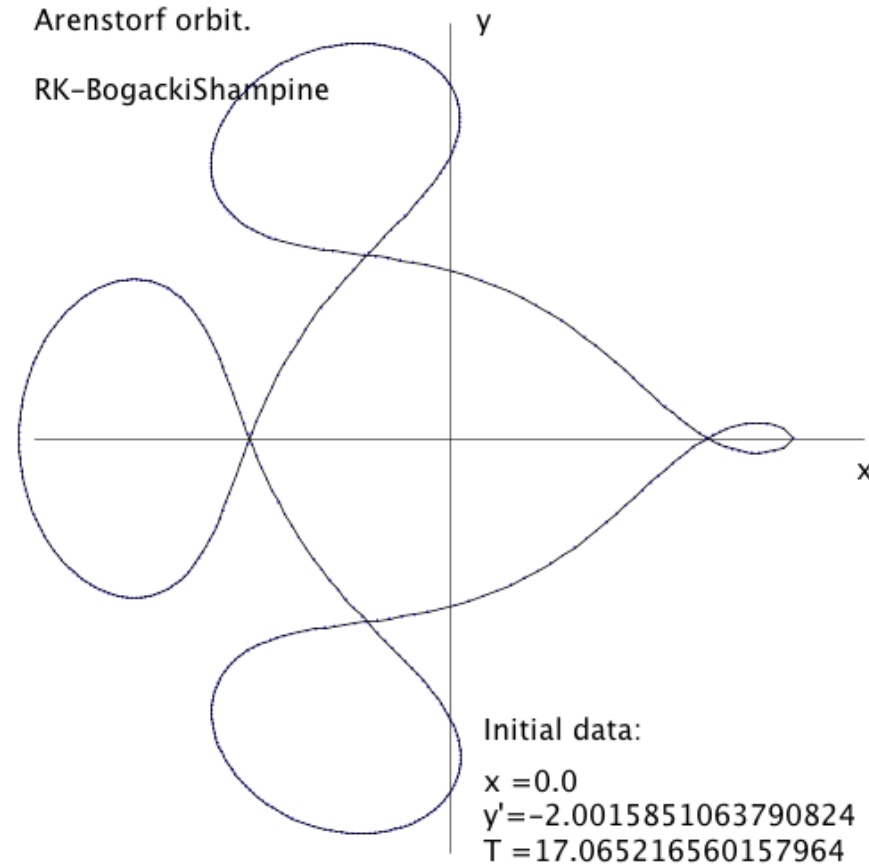
Arenstorf orbit.
RK-BogackiShampine



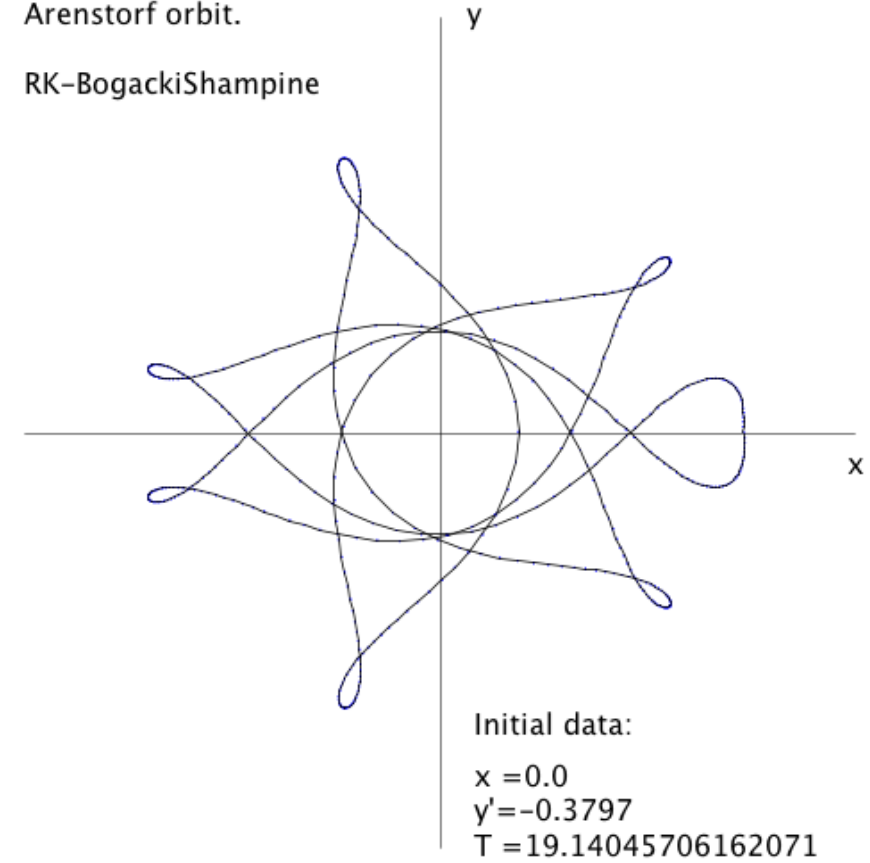
Arenstorf orbit.
RK-BogackiShampine



Arenstorf orbit.
RK-BogackiShampine



Arenstorf orbit.
RK-BogackiShampine



Oscylator Van der Pola

(http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator)

The van der Pol oscillator is an oscillator with nonlinear damping governed by the second-order differential equation

$$\mathbf{x}'' - \boldsymbol{\varepsilon}(1-\mathbf{x}^2)\mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

where x is the dynamical variable and $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ a parameter. This model was proposed by Balthasar van der Pol (1889-1959) in 1920 when he was an engineer working for Philips Company (in the Netherlands).

To make electrical circuits described by equation (1), active circuit elements with the cubic nonlinear property,

$$\mathbf{i} = \varphi(\mathbf{v}) = \gamma \mathbf{v}^3 - \alpha \mathbf{v} \quad (2)$$

are required, where $\mathbf{i}$ and $\mathbf{v}$ are current and voltage, respectively. In the 1920s, van der Pol built the oscillator using the triode or tetrode. After [Reona Esaki](#) (1925-) invented the tunnel diode in 1957, making the van der Pol oscillator with electrical circuits became much simpler.

Using the tunnel diode with input-output relation

$$\mathbf{i} = \varphi_t(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}-\mathbf{E}_0) + \mathbf{I}_0 \quad (3)$$

the equation for the circuit shown in Figure 1 is written as follows.

$$\mathbf{v}^{\cdot} = 1/\mathbf{C} \left(-\varphi(\mathbf{V}) - \mathbf{W} \right) \quad (4)$$

$$\mathbf{W}^{\cdot} = \mathbf{V}/\mathbf{L} \quad (5)$$

This can be rewritten as

$$\mathbf{v}^{\cdot\cdot} - 1/\mathbf{C} \left(\alpha - 3 \gamma \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v}^{\cdot} + \mathbf{v}/\mathbf{LC} = 0 \quad (6)$$

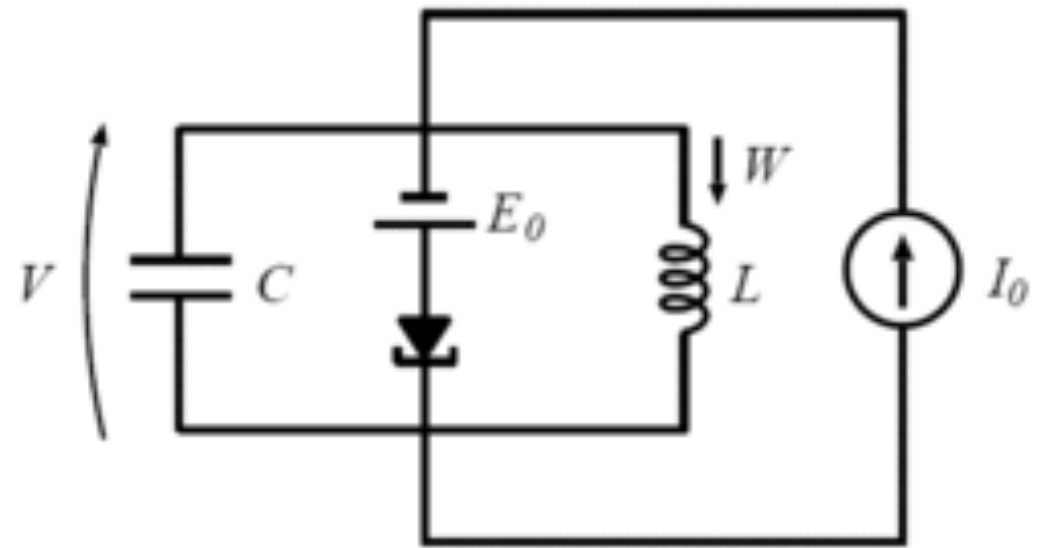
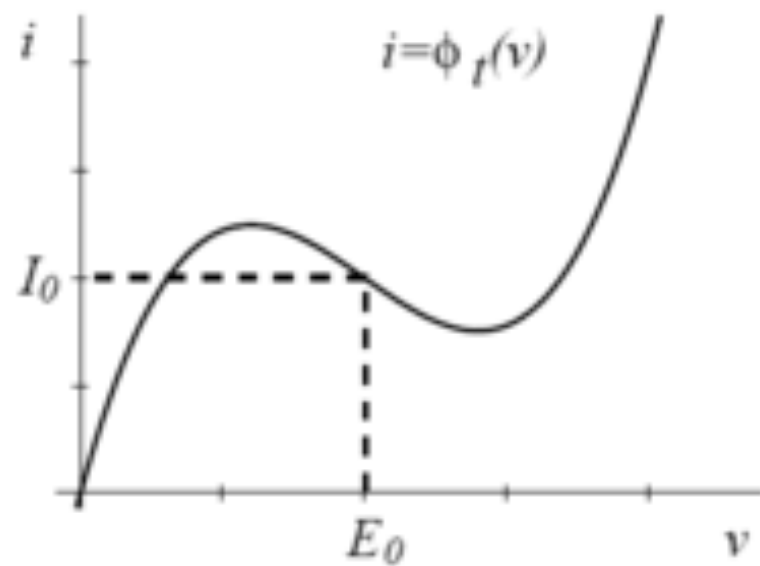


Figure 1.

An electrical circuit with a tunnel diode for the van der Pol oscillator.

Introducing new variables $\mathbf{x} = \sqrt{(3\gamma/\alpha)} \mathbf{v}$, $\mathbf{t}' = \mathbf{t}/\sqrt{(\mathbf{LC})}$, and $\epsilon = \sqrt{(\mathbf{L}/\mathbf{C})} \alpha$, equation (6) can be transformed into equation (1). As shown in the previous section, when ϵ is large, the period of oscillation is proportional to ϵ . Thus, the original system has a period $\mathbf{T} \propto \epsilon\sqrt{(\mathbf{LC})} = \mathbf{L}\alpha$. Because α has an order of the reciprocal of resistance $\mathbf{r}$, $\mathbf{T} \propto \mathbf{L}/\mathbf{r}$ is obtained. $\mathbf{L}/\mathbf{R}$ is the time constant of relaxation in $\mathbf{LR}$ circuit; therefore, the name of "relaxation oscillation" is justified.

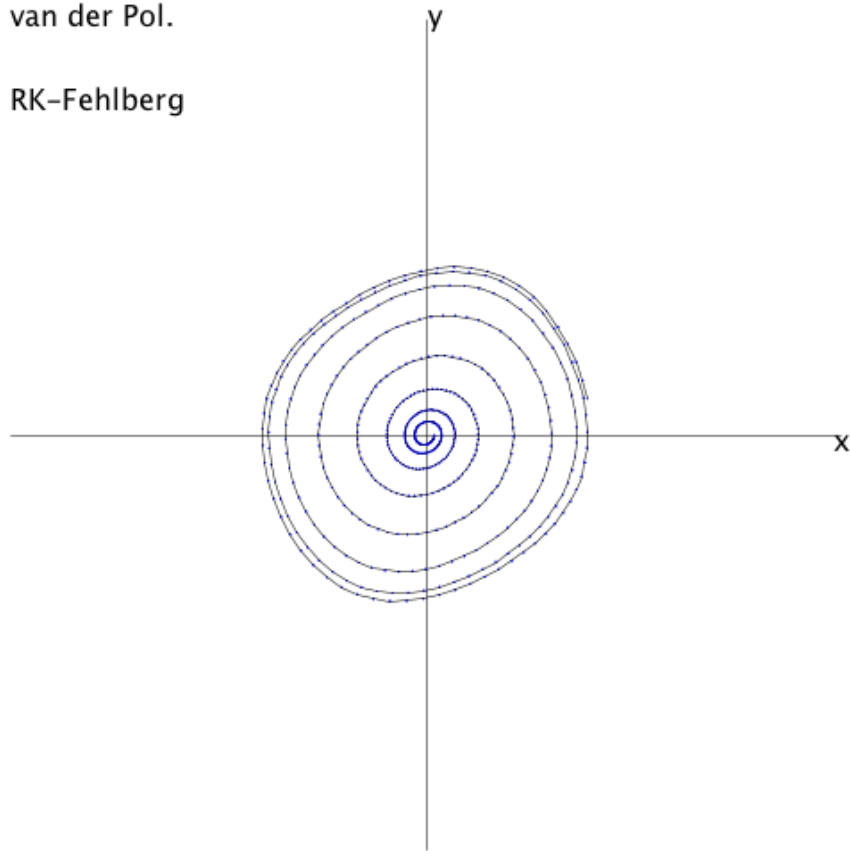
The electrical circuit elements with the nonlinear property can also be realized using operational amplifiers. By this method, much research has been done to study the nonlinear dynamics in physical systems.

(<http://www.scholarpedia.org/article/>

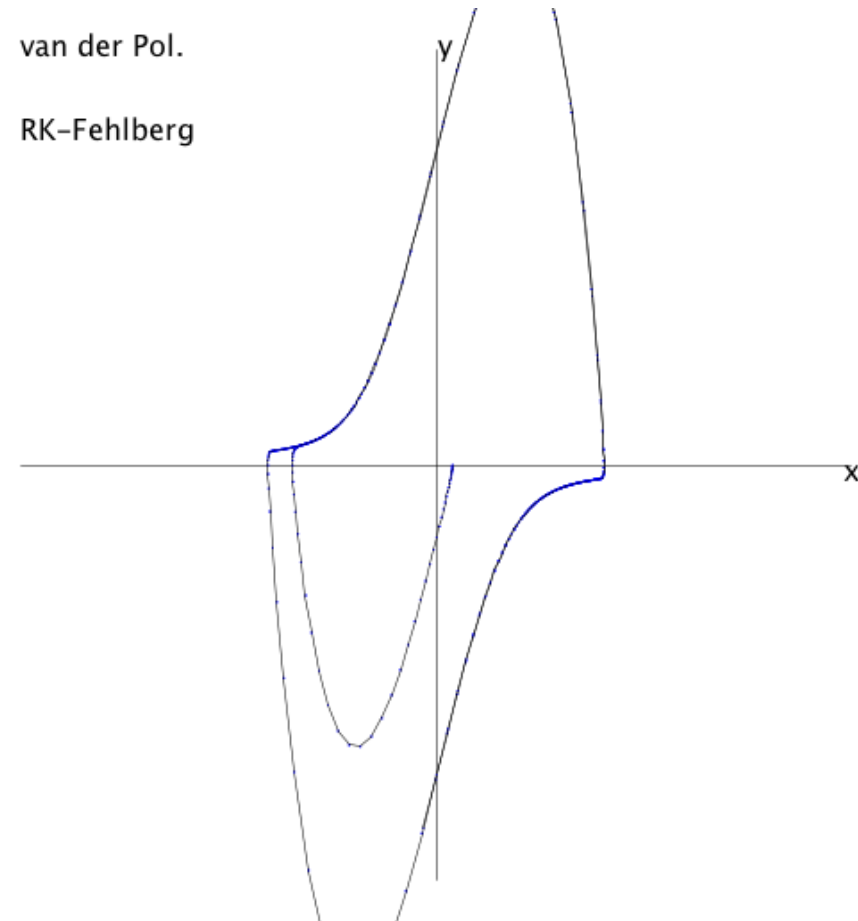
[Van_der_Pol_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator))

Przykłady

van der Pol.
RK-Fehlberg



van der Pol.
RK-Fehlberg



Zadania

- 1. Każde zwyczajne równanie różniczkowe (ZRR) wyższego rzędu można zapisać w postaci układu ZRR pierwszego rzędu. Rozszerzyć program na przypadek n równań.
- 2. Rozwiązać równanie Van der Pola:
 $y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0, \varepsilon > 0$ dla $\varepsilon = .5$ oraz $\varepsilon = 1$.
Zbadać zachowanie rozwiązania, startując z punktów bliskich $(0, 0)$ oraz dalekich od $(0, 0)$. Co się stanie jeśli rozwiązanie przechodzi przez punkt $y_2=0, y_1=2.00861986087484313650940188$? Tutaj

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = \varepsilon (1 - y_1^2) y_2 - y_1, \quad \varepsilon > 0.$$

Pokazać, że ten układ jest równoważny równaniu Van der Pola.

Regulacja kroku całkowania

$$y' = f(x, y(x))$$

$$e(h) = y(x_0 + h) - y_1 \quad - \quad \text{Błąd}$$

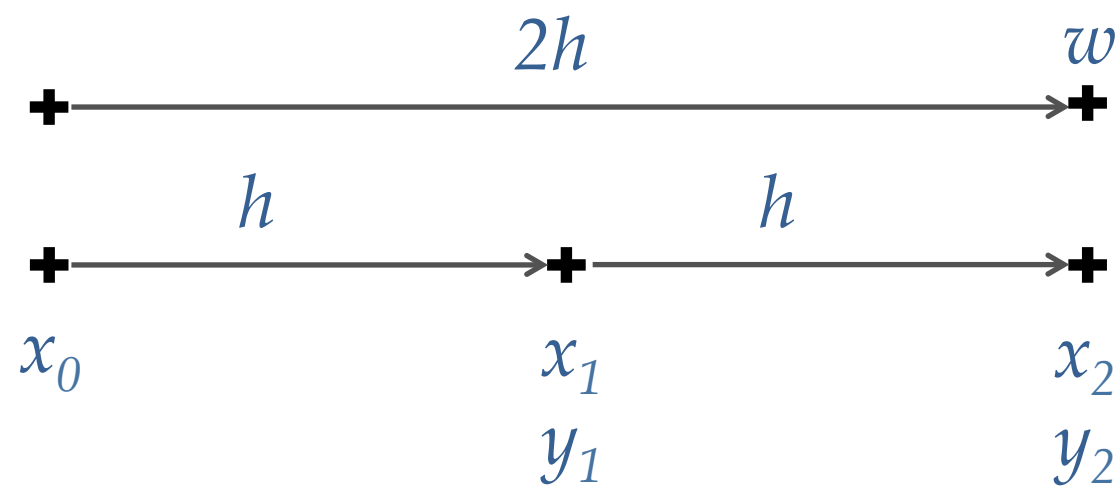
gdzie $y(..)$ jest dokładnym rozwiązaniem, a y_1 pochodzi z obliczeń numerycznych w jednym kroku całkowania. Dla metody rzędu p błąd jest dany wyrażeniem

$$|e(h)| \leq Ch^{p+1}$$

Wykonując dwa razy całkowanie z krokiem h (wynik y_2) i całkowanie z krokiem $(2h)$ (wynik całkowania w) robimy następujące błędy:

$$\begin{aligned} e_1(h) &= y(x_0 + h) - y_1 = Ch^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ e_2(2h) &= y(x_0 + 2h) - y_2 = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2}) \\ y(x_0 + 2h) - w &= C(2h)^{p+1} + O(h^{p+2}) \end{aligned}$$

Regulacja kroku całkowania



$y(x)$ = wartość dokładna
 y_k = wartość obliczona
 z krokiem h

w = wartość obliczona
 z krokiem $2h$

BŁĘDY CAŁKOWANIA:

$$e_1(h) = y(x_0 + h) - y_1 = Ch^{p+1} + O(h^{p+2})$$

$$e_2(2h) = y(x_0 + 2h) - y_2 = 2Ch^{p+1} + O(h^{p+2})$$

$$y(x_0 + 2h) - w = C(2h)^{p+1} + O(h^{p+2})$$

Pomijając $O(h^{p+2})$ można wyeliminować C i ekstrapolować przybliżenie (lepsze) $\hat{y}_2$ dokładnego rozwiązania $y(x_0 + 2h)$. Otrzymuje się:

$$y(x_0 + 2h) - y_2 = \frac{y_2 - w}{2^p - 1} + O(h^{p+1}) \quad \hat{y}_2 = y_2 + \frac{y_2 - w}{2^p - 1}$$

Dla metody RK4 $p=4$, mamy $\hat{y}_2 = y_2 + \frac{y_2 - w}{15}$

Zadając dokładność obliczeń $\Delta_0 = |y_2 - w|$ można też oszacować lepszy krok całkowania h :

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{1/(p-1)} \rightarrow h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2}$$

Jeśli Δ_1 jest większe niż Δ_0 zmniejszamy h , a jeśli odwrotnie, to odpowiednio go zwiększamy. Tutaj Δ_1 jest błędem obliczeń z krokiem h_1 .

Zamiast połowić krok można używać tzw. zanurzonych (*embedded*) metod RK, gdzie przy tych samych współczynnikach a , c metody oraz dwóch różnych zestawów parametrów b mamy możliwość wyznaczenia dwóch różnych wartości y_2 : gorszej (metodą rzędu p) i lepszej (metodą rzędu $p+1$ lub $p-1$). Stąd wylicza się błąd Δ_1 i możliwa jest regulacja kroku całkowania h zgodnie z przytoczoną wyżej formułą.

Przykład metody zanurzonej.

RK Zonneveld 4(3)

0					
1/2	1/2				
1/2	0	1/2			
1	0	0	1		
3/4	5/32	7/32	13/32	-1/32	
	1/6	1/3	1/3	1/6	
	-1/2	7/3	7/3	13/6	-16/3

a	c
	b

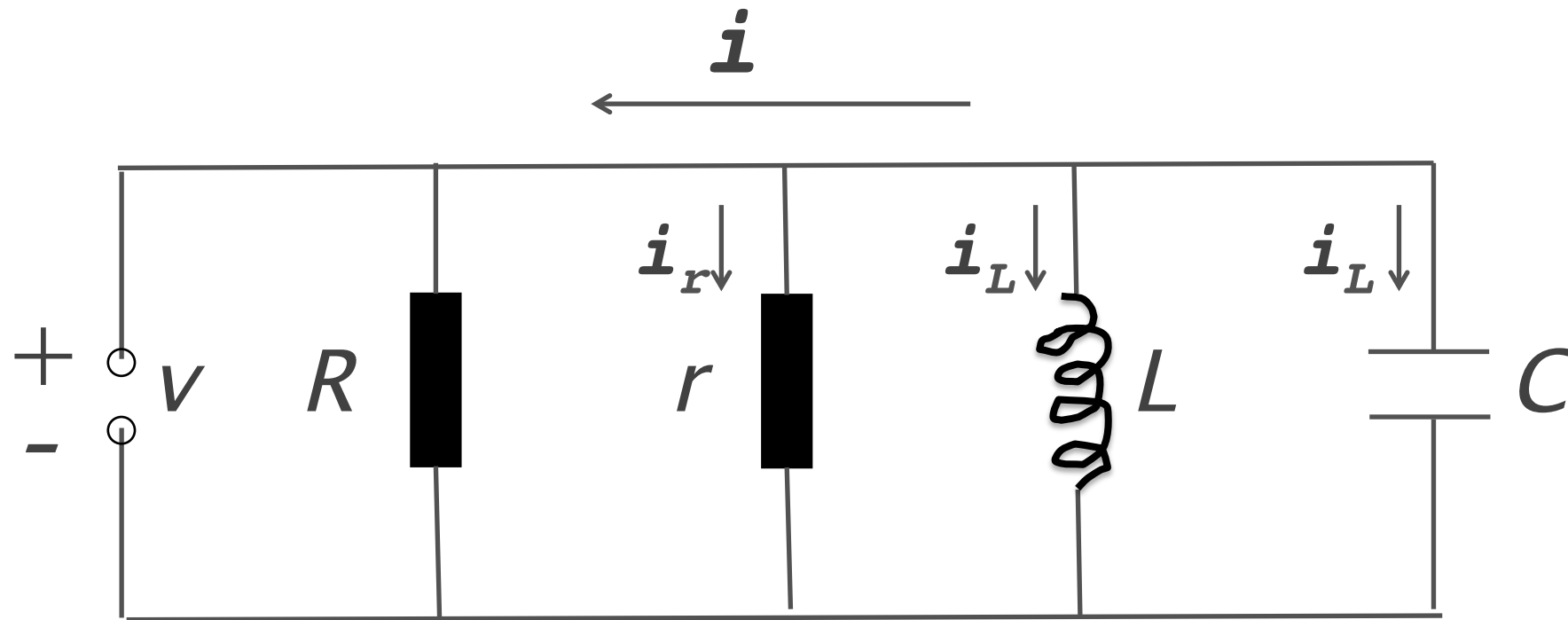


Figure 2. Equivalent electrical circuit.

$$i + i_r + i_L + i_c = 0 \quad (7)$$

$$i_r = v/r, \quad L \, di_L/dt = v, \quad i_c = C v'$$

Inserting these into (7) leads to equation of type (1).