

Elektrostatyka

ab

3 grudnia 2016

- Potencjały, linie ekwipotencjalne
- Pola sił, linie sił
- twierdzenie o wzajemności
- Funkcje zespolone
- Odwzorowania konforemne

Wzajemność. Naładowana nitka.

Potencjał elektrostatyczny

$$V(x, y) = 2k\lambda \left[\log \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right], \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1)$$

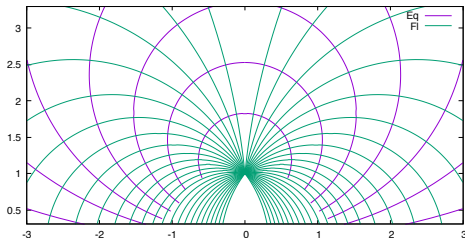
Składowe pola elektrostatycznego $\vec{E}$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right]. \quad (3)$$

Pole nitki naładowanej

Jest to pole wytworzone przez naładowaną nitkę umieszczoną w punkcie w $x = a$, $y = 0$, nad płaszczyzną uziemioną ($y = 0$, $V = 0$) wzdłuż osi z . Wynika to z prawa Gaussa dla liniowego ładunku i zasady superpozycji pól.



Rysunek 1: Pola naładowanej nitki nad uziemioną płaszczyzną.

Wzajemność. Przykład

To samo dostaniemy, biorąc *zamienione* pochodne innej funkcji

$$E_y = -\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}, \quad E_x = +\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}, \quad (4)$$

gdzie

$$\Phi(x,y) = 2k\lambda \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \quad (5)$$

Wzajemność. Przykład

Ponieważ linie sił pola spełniają równanie

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$$

więc mamy

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) / \left(\frac{dx}{dt}\right) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right).$$

Stąd

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Czyli $d\Phi/dt = 0$, a to znaczy, że $\Phi = \text{constant}$!

Wzajemność. Przykład

Linie sił pola są więc dane przez równanie $\Phi = \text{constant}$. Jeśli znamy potencjał $V(x, y)$ i znajdziemy funkcję $\Phi(x, y)$ taką, że

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}, \quad (6)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \quad (7)$$

to równanie linii sił pola jest

$$\Phi(x, y) = \text{constant}.$$

Theorem

O wzajemności. Równanie linii sił pola jest równoważne równaniu linii jednakowego potencjału (linii ekwipotencjalnych) innego rozkładu ładunków (lub przewodników o stałym potencjale).

Dowolne dwie linie sił pola można traktować jak przewodniki innego układu, na których ustalony jest potencjał.

O wzajemności. Przykład

Przyrównując do zera funkcję

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= 2k\lambda \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \\ &= 2k\lambda \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\end{aligned}\quad (8)$$

otrzymamy równanie linii zerowego potencjału.

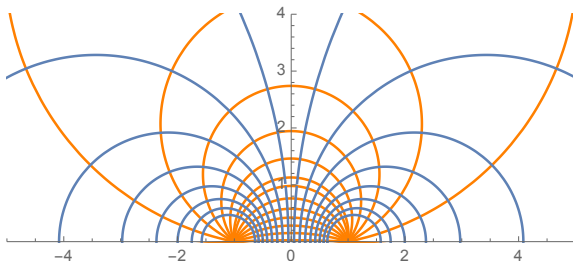
$$0 = \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

Dla jakiego układu przewodników? Dla $y = 0$, $x^2 \neq a^2$ funkcja Φ jest zerem. Mamy

$$\begin{aligned}V &= 0, \quad \text{dla } y = 0, \quad |x| > a, \\ V &= \text{const}, \quad \text{dla } y = 0, \quad |x| < a.\end{aligned}\quad (9)$$

(*Patrz: Rysunek, następna strona.*)

Wstęga. Rysunek.



Rysunek 2: Potencjał i linie sił, utworzone przez wstęgę o szerokości $2a = 2$, w początku układu współrzędnych, wzdłuż osi z , między uziemionymi półpłaszczyznami ($V = 0$).

Funkcja zespolona $F(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$ posiada część rzeczywistą równą $V(x, y)$ i urojoną $\Phi(x, y)$.

Zadanie.

Sprawdzić to.

Metoda rozdzielania zmiennych

Dwa wymiary

Laplasjan. Symetria cylindryczna.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0; \quad V = R(r)\Phi(\phi)$$

$$\Phi(\phi) = C_n \cos n\phi + D_n \sin n\phi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n} \quad n = 1, 2, \dots \quad R(r) = A + B \ln(r)$$

$$V(r, \varphi) = A + B \ln(r)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

Przypomnienie

Pole i potencjał nieskończenie długiej naładowanej nitki o liniowej gęstości ładunku λ :

$$E(r) = 2\lambda k \frac{1}{r}, \quad V(r) = \text{const} - 2\lambda k \ln r$$

Tutaj $k = 1/4\pi\epsilon_0$.

Problem

Znaleźć potencjał i natężenie pola układu dwu nieskończenie długich równoległych walców o osiach oddległych o d , o promieniach r_0 i potencjałach $+V_0/2$ i $-V_0/2$.

Rozwiązanie otrzymamy znając rozwiązanie dla dwu nieskończenie długich ładunków umieszczonych w punktach $x=+a$ i $x=-a$. Z zasady superpozycji mamy

$$V(r) = 2\lambda k \ln \frac{r_2}{r_1} = 2\lambda k \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}$$

Parametry zwiążemy z poprzednimi V_0 itd..

Problem

Niech potencjał w punkcie $P(x_P, y_P)$ będzie V_P . Punkty, w których potencjał jest V_P spełniają równanie

$$r_2 / r_1 = \exp(V_P / 2\lambda k) = e^c$$

lub równoważnie

$$(x - a \coth c)^2 + y^2 = a^2 / \sinh^2 c.$$

Jest to okrąg o środku w punkcie $(a \coth(c), 0)$ o promieniu $a/\sinh(c)$.

Problem

Jeśli wygenerujemy rozwiązanie, które da potencjał $\pm V_0/2$ na okręgach o promieniu r_0 to jest to rozwiązanie problemu walców. Zauważmy, że

$$a = r_0 \sinh c,$$

$$d = 2a \coth c = 2r_0 \cosh c.$$

Stąd

$$2\lambda k = V_0 / 2c ,$$

gdzie

$$c = \cosh^{-1} \frac{d}{2r_0} .$$

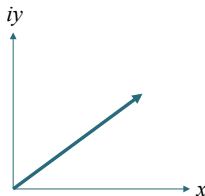
Szukany potencjał jest więc równy: $V(x,y) = \frac{V_0}{2} \frac{\ln(r_2/r_1)}{c} .$

Funkcje analityczne

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$$

$$F(z) = g(x, y) + ih(x, y)$$

$$w = u + iv = F(z)$$



$F(z)$ odwzorowuje płaszczyznę (x,y) w płaszczyznę (u,v) .

Przykłady: z^n , $z^{1/n}$, $\sin z$, e^z , $\ln z$

Funkcje analityczne spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x},$$

Zapewnia to, że $g(x,y)$ i $h(x,y)$ spełniają równania Laplace'a.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

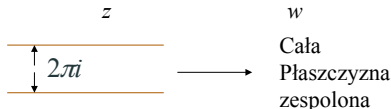
Jeśli $g(x,y)$ spełnia warunki brzegowe problemu to g jest potencjałem.

Jeśli $h(x,y)$ spełnia warunki brzegowe problemu to h jest potencjałem.

Funkcje g i h są sprzężone. Jeśli $g=V$ (potencjał) to $g=const$ opisuje powierzchnie ekwipotencjalne, a $h=const$ opisuje linie sił pola lub odwrotnie.

Jeżeli $F(z)$ jest analityczna to definiuje odwzorowanie konforemne. Transformacja konforemna odwzorowuje sieć prostokątną w sieć krzywoliniową, w której linie współrzędnych są prostopadłe.

Przykład.



Współrzędne kartezjańskie $\rightarrow$ wsp. polarne:

$$w = e^z, \quad z = x + iy, \quad w = e^x e^{iy}.$$

Współrzędne polarne $\rightarrow$ wsp. kartezjańskie:

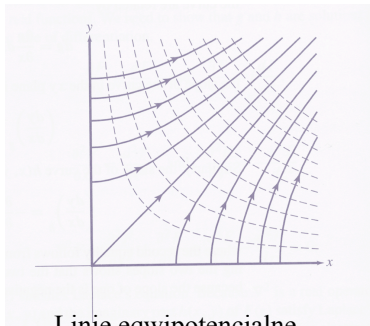
$$w = \ln z, \quad z = \rho e^{i\theta}, \quad \ln z = \ln \rho + i\theta.$$

Kąt z płaszczyzn przewodzących

$$F(z) = az^2 + iV_o$$

$$V = h(x, y) = 2axy + V_o$$

$$g(x, y) = a(x^2 - y^2) = \text{const}$$

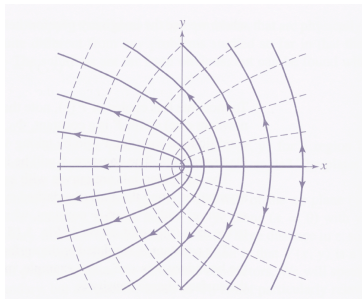


Linie eqwipotencjalne

Linie sił

Brzeg przewodzącej płyty

$$F(z) = az^{1/2} + iV_o$$



$$V(x, y) = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2 + y^2} - x)^{1/2} + V_o$$

Pow. ekwipotencjalne

$$g(x, y) = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2 + y^2} + x)^{1/2}$$

Linie sił

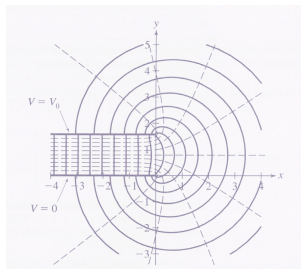
Kondensator płaski

$$F(z) = \frac{V_0}{i\pi} \ln w$$

odwzorowanie $w \rightarrow F$

$$z = \frac{d}{\pi} \left[\ln w + \frac{1}{2}(1 - w^2) \right]$$

odwzorowanie $w \rightarrow z$



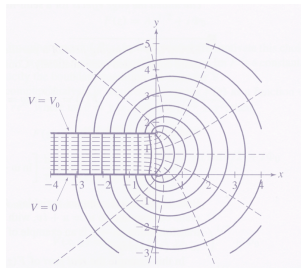
Kondensator płaski

$$w = \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \rho < \infty$$

$$V = V_o \frac{\theta}{\pi}, \quad h = -\frac{V_o}{\pi} \ln \rho$$

$$x = \frac{d}{\pi} \left[\ln \rho + \frac{1}{2} (1 - \rho^2 \cos 2\theta) \right]$$

$$y = \frac{d}{\pi} \left[\ln \rho - \frac{1}{2} \rho^2 \sin 2\theta \right]$$



Przykłady

VISUALIZATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS USING AWK.

Daryl Armstrong, Ian Llanas, Frank Russo, and Jeffrey R. Schmidt:
Computers in physics, Vol 12 No 2, Mar/Apr, 1998, p. 159.

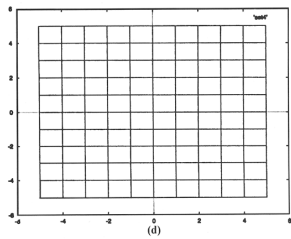
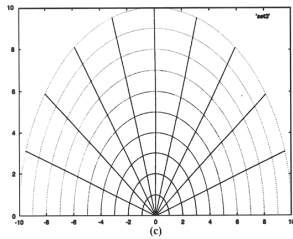
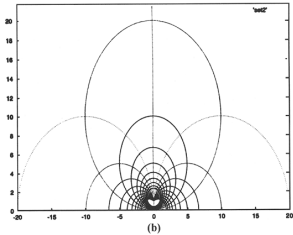
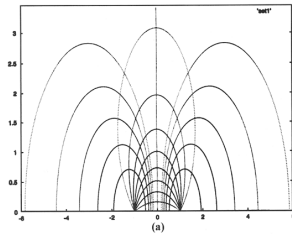


Figure 1. Equipotentials and field lines in four exactly soluble sets of field geometries:

- a) grounded plane with a high-voltage strip from $x = -l$ to $x = l$ (*set1*);
- b) line charge above a grounded plane (*set2*);
- c) line charge through the origin (*set3*);
- d) parallel plates (*set4*) .

Table. Awk scripts used in conformal mapping.

Label	Transform	Label	Transform
map1.awk	$w = \sin^{-1} z$	map11.awk	$w = F(\phi + i\psi)$
map2.awk	$w = \ln z$	map12.awk	$w = \sin \frac{\pi z}{a}$
map3.awk	$w = i \frac{1-z}{1+z}$	map13.awk	$w = z + a$
map4.awk	$z = \frac{1+iw}{1-iw}$	map14.awk	$w = \sqrt{z}$
map5.awk	$w = z + \frac{1}{z}$	map15.awk	$w = \sin^{-1} \frac{z}{c}$
map6.awk	$w = z^{1/4}$	map16.awk	$w = z + ia$
map7.awk	$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$	map17.awk	$w = \frac{z-1}{z+1}$
map8.awk	$w = z - \frac{1}{z}$	map18.awk	$w = i \frac{1+z}{1-z}$
map9.awk	$w = z + \sqrt{z^2 + 1}$	map19.awk	$w = e^{i\theta} z$
map10.awk	$w = e^{az}$	map20.awk	$w = \frac{1}{z}$

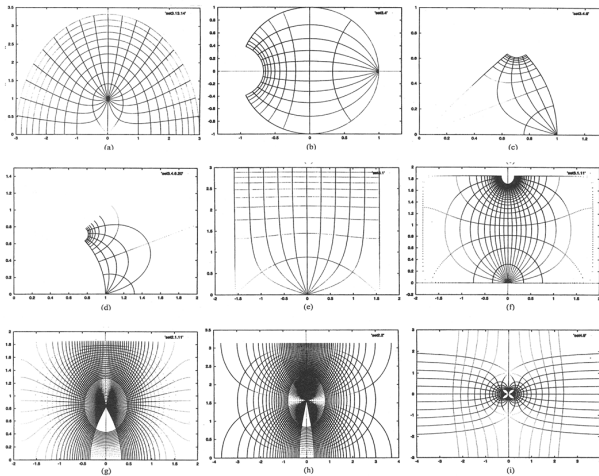
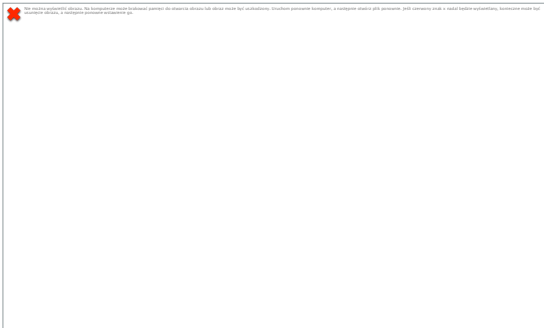


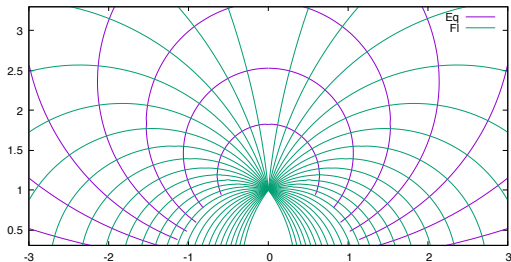
Figure 2. Equipotentials and field lines for various field geometries:

- a) line charge above an insulated plane;
- b) cylinder with upper half grounded and lower half at V_0 ;
- c) wedge with boundaries at different potentials;
- d) external fields of a wedge with boundaries at different potentials;
- e) conducting channel with walls at different potentials;
- f) rectangular box with halves at different potentials;
- g) line charge in a grounded conducting box;
- h) line charge between two grounded parallel plates;
- i) grounded conducting cylinder in a uniform electric field.

Pola naładowanej nitki: $y=0$

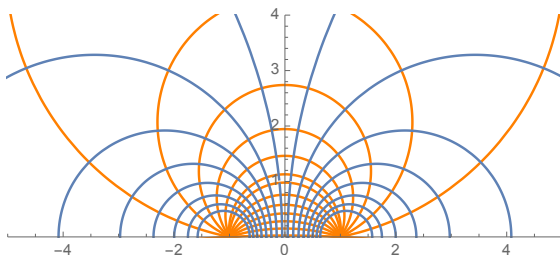


Pola naładowanej nitki: $y=1$

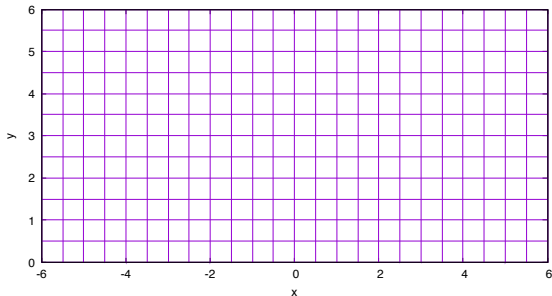


$$f(z) = (\lambda / 2\pi\epsilon) \ln[(z-i)/(z+i)]$$

...
Pola wstęgi $|x| < 1$ na płaszczyźnie 0



Równoległe, naładowane płyty



Inne Przykłady

Y. Shibuya: "Electrostatic Fields Using Conformal Mapping"

[http://demonstrations.wolfram.com/ElectrostaticFieldsUsingConformalMapping/Wolfram Demonstrations Project](http://demonstrations.wolfram.com/ElectrostaticFieldsUsingConformalMapping/WolframDemonstrationsProject)

Dla zadanej funkcji $w(z)$, gdzie $z = x + iy$.

- Znaleźć $\Re w$, $\Im w$
- Wstawić $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
- Rozwiązać równania: $\Re w = \text{const}$, $\Im w = \text{const}'$ względem r
- Obliczyć $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dla $\theta \in [0, 2\pi)$.
- Narysować¹ parametryczne zależności $x(\theta)$, $y(\theta)$ dla wszystkich wybranych stałych const (potencjał) oraz const' (linie sił).

¹Przetwarzając jeden ze zbiorów set1 , set2 , set3 lub set4