Odwzorowania konforemne pól elektrostatycznych

In[137]:=
```
Re[x] ^= x; Im[x] ^= 0; Re[y] ^= y; Im[y] ^= 0;
```
część rzeczy··· część urojona część rzeczy··· część urojona

In[138]:=
```
z = x + I y;
```
jedno:

In[139]:=
```
argrule = {Arg[m_] :>
    ArcTan[Im[m] / Re[m] // ComplexExpand // PowerExpand // FullSimplify]};
  re[w_] := Re[w] // ComplexExpand // Simplify;
  im[w_] := Im[w] // ComplexExpand // Simplify;
```
argument liczby zespolonej; arcus t··· część u·· część rze··· rozwiń na część rzec··· rozwiń potęgi uprość pełniej; część rze··· rozwiń na część rzec··· uprość; część uro·· rozwiń na część rzec··· uprość

map1 w = arcsin(z)

In[141]:=
```
w1 = ArcSin[z];
```
arcus sinus

In[142]:=
```
r1 = re[w1]
i1 = im[w1] /. argrule
```

Out[142]= $\mathrm{Arg}\left[i\,x + \sqrt{1 - (x + i\,y)^2} - y\right]$

Out[143]= $$-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left[\left(y - \left(x^4 + 2x^2(-1+y^2) + (1+y^2)^2\right)^{1/4}\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2xy}{1-x^2+y^2}\right]\right]\right)^2 + \left(x - \left(x^4 + 2x^2(-1+y^2) + (1+y^2)^2\right)^{1/4}\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2xy}{1-x^2+y^2}\right]\right]\right)^2\right]$$

map2 w = ln(z)

In[144]:=
```
w2 = Log[z];
r2 = re[w2]
i2 = im[w2] /. argrule
```
logarytm

Out[145]= $\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left[x^2 + y^2\right]$

Out[146]= $\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$

map3 w=I (1-z)/(1+z)

In[147]:=
```
w3 = I (1 - z) / (1 + z);
r3 = re[w3]
i3 = im[w3] /. argrule
```
jedność urojona

Out[148]= $\frac{2y}{(1+x)^2 + y^2}$

Out[149]= $-\frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + 2x + x^2 + y^2}$

map4 (odwrotna: z->w, w->z) z=(1+iw)/(1-iw)

In[150]:=
```
w4 = (1 + I z) / (1 - I z);
r4 = re[w4]
i4 = im[w4]
```
jedność ur··· jedność

Out[151]= $-\frac{-1+x^2+y^2}{x^2+(1+y)^2}$

Out[152]= $\frac{2\,x}{x^2+(1+y)^2}$

map5 w = z+1/z

In[153]:=
```
w5 = z + 1 / z;
r5 = re[w5]
i5 = im[w5]
```

Out[154]= $x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Out[155]= $y-\frac{y}{x^2+y^2}$

map6 $z^{1/4}$

In[156]:=
```
w6 = z ^ {1 / 4};
r6 = re[w6] /. argrule
i6 = im[w6] /. argrule
```

Out[157]= $\left\{\left(x^2+y^2\right)^{1/8}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\right]\right\}$

Out[158]= $\left\{\left(x^2+y^2\right)^{1/8}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\right]\right\}$

map7 $w=\sqrt{-1+(x+i\,y)^2}$

In[159]:=
```
w7 = Sqrt[z ^ 2 - 1];
r7 = re[w7] /. argrule
i7 = im[w7] /. argrule
```
pierwiastek kwadratowy

Out[160]= $\left(x^4+2\,x^2\left(-1+y^2\right)+\left(1+y^2\right)^2\right)^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,x\,y}{1-x^2+y^2}\right]\right]$

Out[161]= $-\left(x^4+2\,x^2\left(-1+y^2\right)+\left(1+y^2\right)^2\right)^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,x\,y}{1-x^2+y^2}\right]\right]$

map8 w = z-1/z

In[162]:=
```
w8 = z - 1 / z;
r8 = re[w8]
i8 = im[w8]
```

Out[163]= $x - \frac{x}{x^2 + y^2}$

Out[164]= $y \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

map9 w = z + $\sqrt{1+z^2}$

In[165]:=
```
w9 = z + Sqrt[z^2 + 1];
         pierwiastek kwadratow
r9 = re[w9] /. argrule
i9 = im[w9] /. argrule
```

Out[166]= $x + \left(x^4 + \left(-1 + y^2\right)^2 + 2\,x^2\,\left(1 + y^2\right)\right)^{1/4}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,x\,y}{1 + x^2 - y^2}\right]\right]$

Out[167]= $y + \left(x^4 + \left(-1 + y^2\right)^2 + 2\,x^2\,\left(1 + y^2\right)\right)^{1/4}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,x\,y}{1 + x^2 - y^2}\right]\right]$

map10 w = $e^{a z}$

In[168]:=
```
Re[a] ^= a;
część rzeczywis
Im[a] ^= 0;
część urojona
```

In[170]:=
```
w10 = Exp[a z];
      funkcja ekspo
r10 = re[w10]
i10 = im[w10]
```

Out[171]= $e^{a\,x}\,\mathrm{Cos}[a\,y]$

Out[172]= $e^{a\,x}\,\mathrm{Sin}[a\,y]$

map11 w = F(ϕ+iψ), elliptic function

map12 w = sin(πz/a)

In[173]:=
```
w12 = Sin[Pi z / a];
      sinus pi
r12 = re[w12]
i12 = im[w12]
```

Out[174]= $\mathrm{Cosh}\left[\frac{\pi\,y}{a}\right]\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi\,x}{a}\right]$

Out[175]= $\mathrm{Cos}\left[\frac{\pi\,x}{a}\right]\,\mathrm{Sinh}\left[\frac{\pi\,y}{a}\right]$

map13 w = z + a

In[176]:=
```
w13 = z + a;
r13 = re[w13]
i13 = im[w13]
```

Out[177]= $a + x$

Out[178]= y

map14 $w = \sqrt{z}$

In[179]:=
```
w14 = Sqrt[z];
      pierwiastek kwadratowy
r14 = re[w14] /. argrule
i14 = im[w14] /. argrule
```

Out[180]= $\left(x^2+y^2\right)^{1/4} \text{Cos}\left[\frac{1}{2} \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\right]$

Out[181]= $\left(x^2+y^2\right)^{1/4} \text{Sin}\left[\frac{1}{2} \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\right]$

map15 w = arcsin(z/c)

In[182]:=
```
Re[c] ^= c;
część rzeczywista
Im[c] ^= 0;
część urojona
w15 = ArcSin[z / c];
      arcus sinus
r15 = re[w15] /. argrule
i15 = im[w15] /. argrule
```

Out[185]= $$-\text{ArcTan}\left[\left(x + c\left(\frac{c^4+2c^2\left(-x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)^2}{c^4}\right)^{1/4} \text{Sin}\left[\frac{1}{2}\text{Arg}\left[1+\frac{\left(-\text{i}\, x+y\right)^2}{c^2}\right]\right]\right) \Big/ \left(y - c\left(\frac{c^4+2c^2\left(-x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2\right)^2}{c^4}\right)^{1/4} \text{Cos}\left[\frac{1}{2}\text{Arg}\left[1+\frac{\left(-\text{i}\, x+y\right)^2}{c^2}\right]\right]\right)\right]$$

Out[186]= $$-\frac{1}{2}\text{Log}\left[\frac{1}{c^2}\left(\left(y - c\left(\frac{4x^2y^2+\left(c^2-x^2+y^2\right)^2}{c^4}\right)^{1/4}\text{Cos}\left[\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{2xy}{c^2-x^2+y^2}\right]\right]\right)^2 + \left(x - c\left(\frac{4x^2y^2+\left(c^2-x^2+y^2\right)^2}{c^4}\right)^{1/4}\text{Sin}\left[\frac{1}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{2xy}{c^2-x^2+y^2}\right]\right]\right)^2\right)\right]$$

map16 w = z +i a

In[187]:=
```
Clear[a]
wyczyść
w16 = z + I a;
        jednośc
r16 = re[w16]
i16 = im[w16]
```

Out[189]= x

Out[190]= a + y

map17 w=(z-1)/(z+1)

In[191]:=
```
w17 = (z - 1) / (z + 1);
r17 = re[w17]
i17 = im[w17]
```

Out[192]= $\frac{-1 + x^2 + y^2}{1 + 2\,x + x^2 + y^2}$

Out[193]= $\frac{2\,y}{(1 + x)^2 + y^2}$

map18 w = $\frac{i(1+z)}{1-z}$

In[194]:=
```
w18 = I (1 + z) / (1 - z);
      jedność urojona
r18 = re[w18]
i18 = im[w18]
```

Out[195]= $-\frac{2\,y}{1 - 2\,x + x^2 + y^2}$

Out[196]= $-\frac{-1 + x^2 + y^2}{1 - 2\,x + x^2 + y^2}$

map19 w = $e^{i\theta}$ z

In[197]:=
```
Re[θ] ^= θ;
część rzeczywista
Im[θ] ^= 0;
część urojona
w19 = Exp[i θ] z;
      funkcja eksponencjalna
r19 = re[w19] // ExpToTrig
                 zamień fukcje
i19 = im[w19] // ExpToTrig
                 zamień fukcje
```

Out[200]= x Cosh[i θ] + x Sinh[i θ]

Out[201]= y Cosh[i θ] + y Sinh[i θ]

map20 w = 1/z

```
In[202]:= w20 = 1 / z;
          r20 = re[w20]
          i20 = im[w20]
```

Out[203]= $\frac{x}{x^2+y^2}$

Out[204]= $-\frac{y}{x^2+y^2}$

Inne

Nitka nad uziemioną płaszczyzną

```
In[205]:= w = Log[(z - I) / (z + I)]
              logarytm  jedność ⋯ jednc
```

Out[205]= $\mathrm{Log}\left[\frac{-i+x+i\,y}{i+x+i\,y}\right]$

```
In[206]:= re[w] //. argrule
```

Out[206]= $\mathrm{Log}\left[\frac{\sqrt{x^2+(-1+y)^2}}{\sqrt{x^2+(1+y)^2}}\right]$

```
In[207]:= im[w] /. argrule
```

Out[207]= $-\mathrm{ArcTan}\left[\frac{2\,x}{-1+x^2+y^2}\right]$

```
In[208]:= eq = (x^2 + (-1 + y)^2) / (x^2 + (1 + y)^2) == (1 / Tan[c]) ^2 /. {x → r Cos[θ], y → r Sin[θ]};
                                                             tangens             cosinus      sinus

In[209]:= sol = Solve[eq, r] // FullSimplify
                rozwiąż równanie   uprość pełniej
```

Out[209]= $\left\{\left\{r\to\left(\sqrt{2}\,\sqrt{-(\mathrm{Cos}[4\,c]+\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Csc}[c]^4}-2\,\mathrm{Csc}[c]^2\,\mathrm{Sin}[\theta]\right)\Big/\left(-2+2\,\mathrm{Cot}[c]^2\right)\right\},\left\{r\to\frac{1}{2-2\,\mathrm{Cot}[c]^2}\left(\sqrt{2}\,\sqrt{-(\mathrm{Cos}[4\,c]+\mathrm{Cos}[2\,\theta])\,\mathrm{Csc}[c]^4}+2\,\mathrm{Csc}[c]^2\,\mathrm{Sin}[\theta]\right)\right\}\right\}$

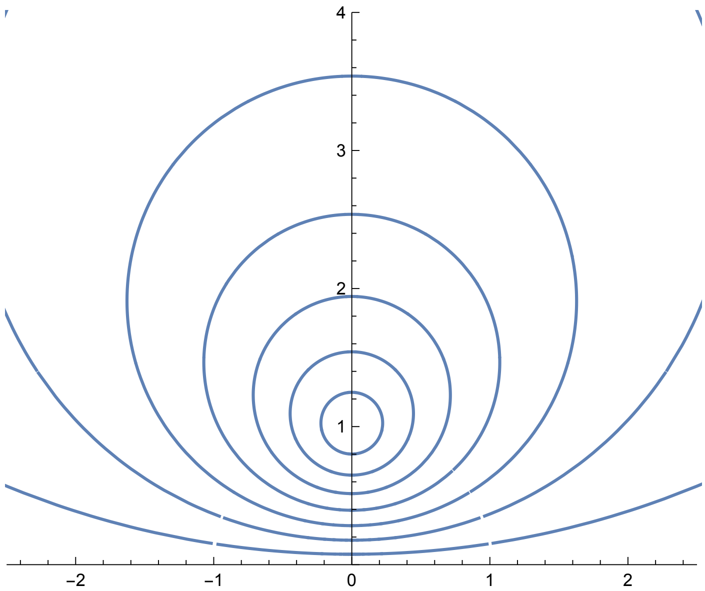
```
In[210]:= Clear[p1, p2, c]
          wyczyść
          p1 = r /. sol[[1]];
          p2 = r /. sol[[1]];

In[213]:= {xp1, yp1} = {p1 Cos[θ], p1 Sin[θ]};
                           cosinus    sinus

In[214]:= pltab = Table[{xp1, yp1}, {c, 0.01, Pi / 4, .1}];
                  tabela                  pi

          pl1 = ParametricPlot[-pltab, {θ, 0, 2 Pi}, PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {0, 4}}]
                wykres parametryczny                pi    zakres wykresu
```

Out[215]=



In[216]:= $\text{neq} = \dfrac{2\,x}{-1 + x^2 + y^2} == c\ /.\ \{x \to r\,\text{Cos}[\theta],\ y \to r\,\text{Sin}[\theta]\}$

cosinus sinus

Out[216]= $\dfrac{2\,r\,\text{Cos}[\theta]}{-1 + r^2\,\text{Cos}[\theta]^2 + r^2\,\text{Sin}[\theta]^2} == c$

In[217]:=
```
nsol = Solve[neq, r] // FullSimplify
```
rozwiąż równanie uprość pełniej

Out[217]= $\left\{\left\{r \to -\dfrac{-2\,\text{Cos}[\theta] + \sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2\,c^2 + \text{Cos}[2\,\theta]}}{2\,c}\right\},\ \left\{r \to \dfrac{2\,\text{Cos}[\theta] + \sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2\,c^2 + \text{Cos}[2\,\theta]}}{2\,c}\right\}\right\}$

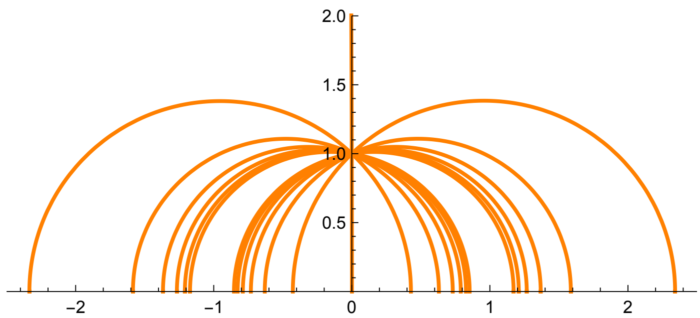
In[218]:=
```
q1 = r /. nsol[[2]];
```

In[219]:=
```
{x1, y1} = {q1 Cos[θ], q1 Sin[θ]};
```
cosinus sinus

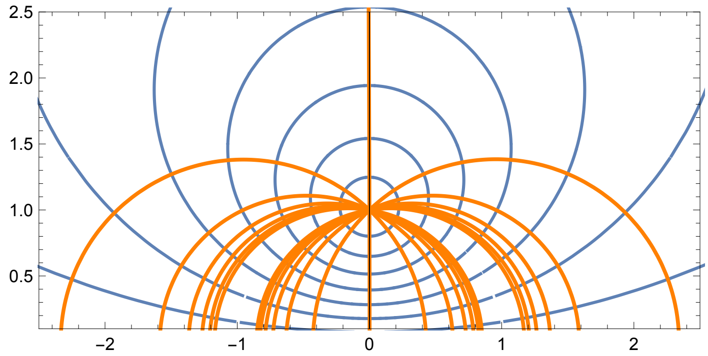
In[220]:=
```
tab = Table[{x1, y1}, {c, -2 Pi, 2 Pi, Pi / 3.001}];
```
tabela pi pi pi

In[221]:=
```
pl2 = ParametricPlot[tab, {θ, 0, 2 Pi},
  PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {0, 2}}, PlotStyle → {Orange, Thick}]
```
wykres parametryczny pi zakres wykresu styl grafiki pomara··· gruby

Out[221]=



In[222]:=
```
Show[pl1, pl2, PlotRange → {{-2.5, 2.5}, {0.1, 2.5}}, Frame → True]
```
pokaż · zakres wykresu · ramka · prawda

Out[222]=


Naładowana wstęga x ∈ [-1, 1]

Linie ekwipotencjalne

In[223]:=
```
p = Integrate[1 / Sqrt[(x - s) ^ 2 + y ^ 2], s]
```
całka · pierwiastek kwadratowy

Out[223]= $\mathrm{Log}\left[s - x + \sqrt{s^2 - 2\,s\,x + x^2 + y^2}\,\right]$

In[224]:=
```
pp1 = p /. {s → 1};
 pm1 = p /. {s → -1};
w  =  pp1 - pm1
```

Out[226]= $\mathrm{Log}\left[1 - x + \sqrt{1 - 2\,x + x^2 + y^2}\,\right] - \mathrm{Log}\left[-1 - x + \sqrt{1 + 2\,x + x^2 + y^2}\,\right]$

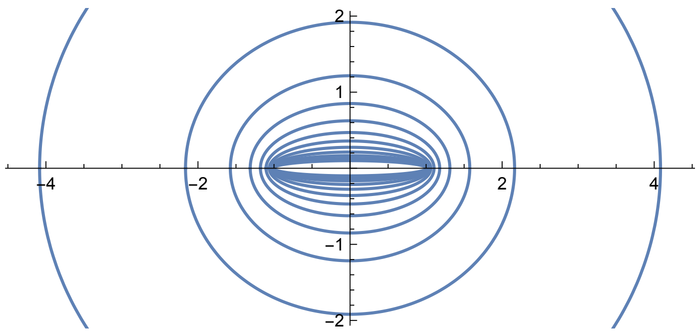
In[227]:=
```
eq = w == c /. {x → r Cos[θ], y → r Sin[θ]};
```
cosinus · sinus

In[228]:=
```
solr = Solve[eq, r];
```
rozwiąż równanie

In[229]:=
```
{x1, y1}  =  {r Cos[θ], r Sin[θ]} /. solr[[1]];
```
cosinus · sinus

In[230]:=
```
tal  =  Table[{x1, y1}, {c, .5, 6, .5}];
```
tabela

```
tap  =  ParametricPlot[tal, {θ, 0, 2 Pi}]
```
wykres parametryczny · pi

Out[231]=


Linie sił pola

```
In[232]:= Clear[u];
          wyczyść
          u[x_, y_] := w

In[234]:= dux = D[u[x, y], x] // Simplify;
                oblicz pochodną    uprość
          duy = D[u[x, y], y] // FullSimplify;
                oblicz pochodną    uprość pełniej

In[236]:= dvx = duy;
          v = Integrate[dvx, x] // FullSimplify;
              całka                 uprość pełniej

In[238]:= dvx = D[v, y] // FullSimplify;
                oblicz poch··· uprość pełniej

In[239]:= dCy = -duy - dvx // FullSimplify;
                               uprość pełniej

In[240]:= vl = v + Integrate[dCy, y] // FullSimplify
                   całka                 uprość pełniej
```

Out[240]= $\text{Log}\left[1-x-\sqrt{(-1+x)^2+y^2}\right]-\text{Log}\left[1+x+\sqrt{(1+x)^2+y^2}\right]$

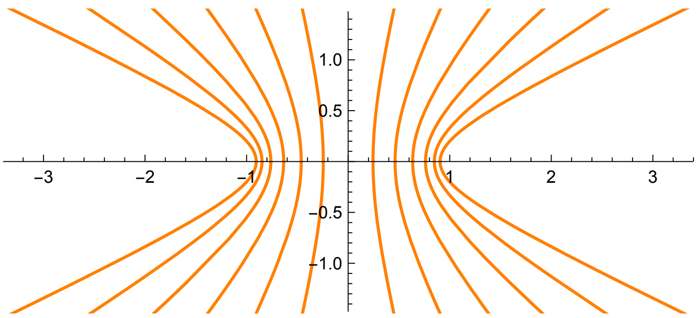
```
In[241]:= vlines = vl /. {x → R Cos[θ], y → R Sin[θ]} // FullSimplify;
                                 cosinus        sinus        uprość pełniej

In[242]:= solv = Solve[vlines == c, R]
                 rozwiąż równanie
```

Out[242]= $\left\{\left\{R\to-\left(\left(2\,e^{c/2}\left(-1+e^c\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\left(-1+2\,e^{2c}-e^{4c}+\text{Cos}[\theta]^2+4\,e^c\,\text{Cos}[\theta]^2+6\,e^{2c}\,\text{Cos}[\theta]^2+4\,e^{3c}\,\text{Cos}[\theta]^2+e^{4c}\,\text{Cos}[\theta]^2\right)}\right)\right)\right\},\left\{R\to\left(2\,e^{c/2}\left(-1+e^c\right)\right)\Big/\left(\sqrt{\left(-1+2\,e^{2c}-e^{4c}+\text{Cos}[\theta]^2+4\,e^c\,\text{Cos}[\theta]^2+6\,e^{2c}\,\text{Cos}[\theta]^2+4\,e^{3c}\,\text{Cos}[\theta]^2+e^{4c}\,\text{Cos}[\theta]^2\right)}\right)\right\}\right\}$

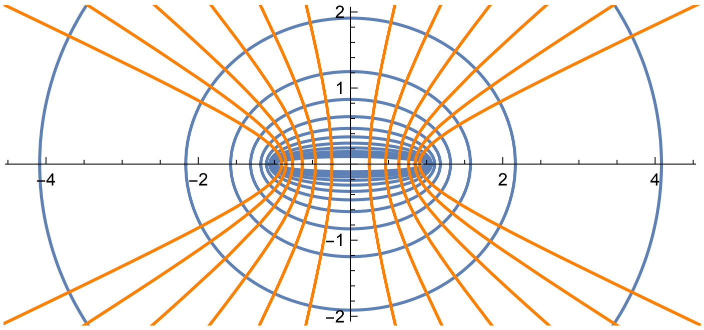
```
In[243]:= x1 = R Cos[θ] /. {solv[[1]]};
                 cosinus
          y1 = R Sin[θ] /. {solv[[1]]};
                 sinus

In[245]:= tab1 = Table[{x1, y1}, {c, -3, 3, .5}];
                 tabela
          tal1 = ParametricPlot[tab1, {θ, 0, Pi}, PlotStyle → {Orange}]
                 wykres parametryczny        pi    styl grafiki   pomarańczow
```

Out[246]=


In[247]:=
```
Show[tap, tal1]
```
pokaż

Out[247]=



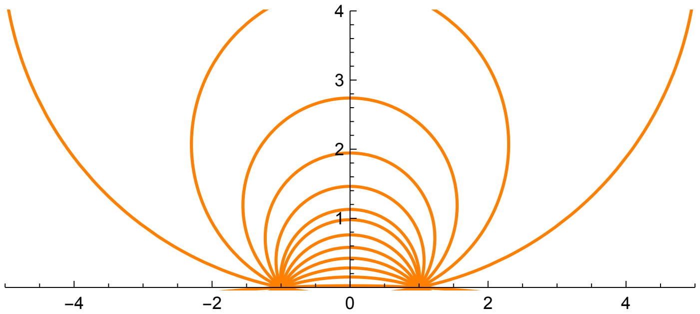
Taśma | x | < a, i uziemione półpłaszczyzny, |x|> a

Wstęga o zadanym potencjale, między uziemionymi półpłaszczyznami

In[248]:=
```
Clear[M, K, λ, a, k, c];
Re[a] ^= a; Im[a] ^= 0; Re[k] ^= k; Im[k] ^= 0; Re[c] ^= c; Im[c] ^= 0;
M[x_, y_] := 2 k λ (ArcTan[y / (x - a)] - ArcTan[y / (x + a)])
K[x_, y_] := 2 k λ ArcTan[2 a y / (x^2 + y^2 - a^2)]
```
wyczyść; część rzeczy··· część urojona część rzeczyw·· część urojona część rzeczyw·· część urojona; arcus tangens arcus tangens; arcus tangens

In[252]:=
```
λ = a = k = 1;
eq = c == K[x, y] //. {x → r Cos[θ], y → r Sin[θ]} // Simplify;
soln = Solve[eq, r] // FullSimplify;
rrule = soln[[1]];
tabul = Table[{r Cos[θ] /. rrule, r Sin[θ] /. rrule}, {c, -3.1, 3.1, .5}];
pl1 = ParametricPlot[tabul, {θ, 0, 2 Pi},
  PlotStyle → {Orange}, PlotRange → {{-5, 5}, {0, 4}}]
```
cosinus sinus uprość; rozwiąż równanie uprość pełniej; tabela cosinus sinus; wykres parametryczny pi; styl grafiki pomarańc··· zakres wykresu

Out[257]=



Linie sił

In[258]:=
```
V[x_, y_] := 2 λ k Log[Sqrt[(x - a)^2 + y^2] / Sqrt[(x + a)^2 + y^2]]
```
log··· pierwiastek kwadratowy pierwiastek kwadratowy

In[259]:=
```
eq = c == V[x, y] /. {x → r Cos[t], y → r Sin[t]}
```
cosinus sinus

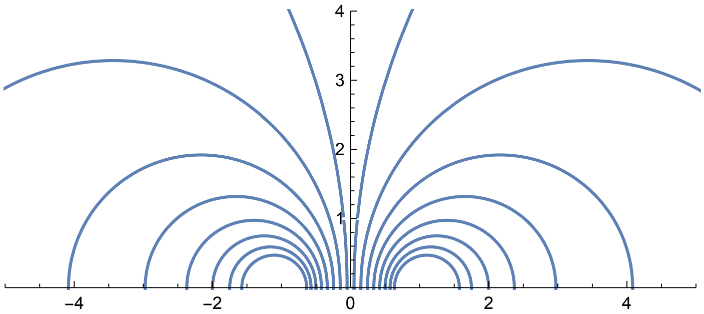
Out[259]=
$$c == 2\,\mathrm{Log}\left[\frac{\sqrt{(-1 + r\,\mathrm{Cos}[t])^2 + r^2\,\mathrm{Sin}[t]^2}}{\sqrt{(1 + r\,\mathrm{Cos}[t])^2 + r^2\,\mathrm{Sin}[t]^2}}\right]$$

In[260]:=
```
soln = Solve[eq, r]
```
rozwiąż równanie

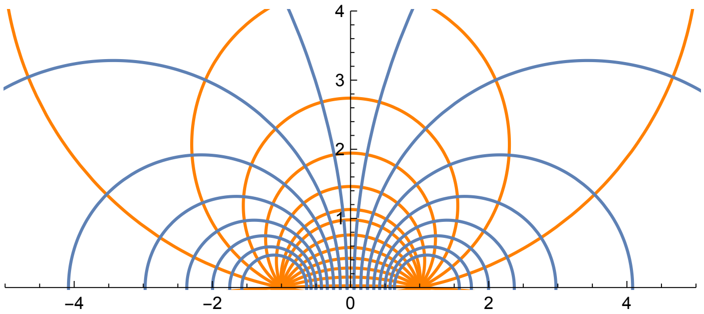
Out[260]=
$$\left\{\left\{r \to \frac{-2\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,e^{c}\,\mathrm{Cos}[t] - \sqrt{2}\,\sqrt{-1 + 6\,e^{c} - e^{2c} + \mathrm{Cos}[2t] + 2\,e^{c}\,\mathrm{Cos}[2t] + e^{2c}\,\mathrm{Cos}[2t]}}{2\left(-\mathrm{Cos}[t]^2 + e^{c}\,\mathrm{Cos}[t]^2 - \mathrm{Sin}[t]^2 + e^{c}\,\mathrm{Sin}[t]^2\right)}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{r \to \frac{-2\,\mathrm{Cos}[t] - 2\,e^{c}\,\mathrm{Cos}[t] + \sqrt{2}\,\sqrt{-1 + 6\,e^{c} - e^{2c} + \mathrm{Cos}[2t] + 2\,e^{c}\,\mathrm{Cos}[2t] + e^{2c}\,\mathrm{Cos}[2t]}}{2\left(-\mathrm{Cos}[t]^2 + e^{c}\,\mathrm{Cos}[t]^2 - \mathrm{Sin}[t]^2 + e^{c}\,\mathrm{Sin}[t]^2\right)}\right\}\right\}$$

In[261]:=
```
x1 = r Cos[t] /. soln[[2]];
```
cosinus
```
y1 = r Sin[t] /. soln[[2]];
```
sinus

In[263]:=
```
tab = Table[{x1, y1}, {c, -3, 3, .4}];
```
tabela
```
pl2 = ParametricPlot[tab, {t, 0, 2 Pi}, PlotRange → {{-5, 5}, {0, 4}}]
```
wykres parametryczny pi zakres wykresu

Out[264]=


In[265]:=
```
Show[pl1, pl2, PlotStyle → {Thin}]
```
pokaż styl grafiki cienki

Out[265]=


Dodatek

In[266]:=
```
Clear[a]
```
wyczyść
```
Re[a] ^= a; Im[a] ^= 0;
```
część rzeczy⋯ część urojona

In[268]:=
```
w = Log[(z - a) / (z + a)]
```
logarytm

Out[268]= $\text{Log}\left[\frac{-a+x+i\,y}{a+x+i\,y}\right]$

In[269]:=
```
re[w]
```

Out[269]= $\text{Log}\left[\frac{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}\right]$

In[270]:=
```
im[w] /. argrule
```

Out[270]= $\text{ArcTan}\left[\frac{2\,a\,y}{-a^2+x^2+y^2}\right]$