

Twierdzenie o *wiriale*

ab

9 maja 2019

– Twierdzenie Clausiusa o wiriale

Wiriał:

wyrażenie $\sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$;

z łaciny *vis* = siła lub energia;

definicja Rudolfa Clausiusa, 1870.

Rozpatrujemy układ cząstek (mas).

Zbadamy wyrażenie (suma jest po wszystkich cząstkach układu)

$$G = \sum \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$$

Pochodna po czasie G :

$$\frac{dG}{dt} = \sum \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{r} + \sum \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

Dalej, ponieważ $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, a $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 2\tau$, gdzie τ jest energią kinetyczną cząstki, mamy

$$\frac{dG}{dt} = \sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + 2T, \quad T = \sum \tau$$

Uśredniając po czasie, otrzymamy

$$\Delta G \equiv G(t) - G(0) = \sum \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{r} + 2\bar{T}$$

Dla układów okresowych $\Delta G = 0$ dla $t = \text{okres}$. W przypadku układów nieokresowych, po dostatecznie długim czasie t ΔG może być dowolnie mała. Stąd

$$0 = \sum \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{r} + 2\bar{T}$$

lub

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \sum \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{r}$$

Dla sił potencjalnych $\mathbf{F} = -\nabla U$ (U - potencjał) mamy

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sum \nabla U \cdot \mathbf{r}$$

Jeśli siły są centralne, tzn. $F \sim r^n$, a więc $U \sim r^{n+1}$, to

$$\frac{dU}{dr}r = (n+1)U$$

i

$$\bar{T} = \frac{n+1}{2}\bar{U}$$

Np., dla $U \sim r^{-2}$ (grawitacja; siła $\sim r^{-2}$)

$$\bar{T} = -\frac{1}{2}\bar{U}.$$

Całkowita energia układu

$$\bar{E}_{tot} = \bar{T} + \bar{U} = -\frac{1}{2}\bar{U} + \bar{U} = \frac{1}{2}\bar{U}.$$