

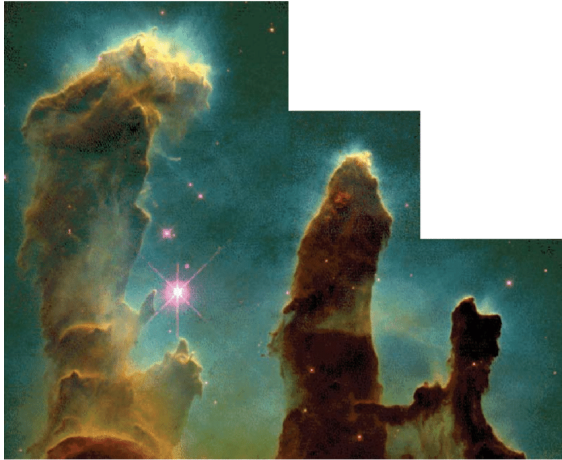
JAK POWSTAJĄ GWIAZDY?

ab

9 maja 2019

- Wstęp
- Równowaga hydrostatyczna
- Twierdzenie o wiriale
- Kryterium Jeans'a
- Protogwiazdy

WSTEP

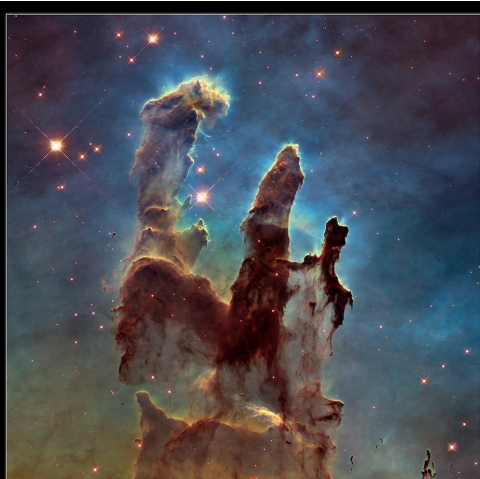


Gwiazdy powstają w obłokach gazowych wodoru HI , HII . Przykład M16 (zdjęcie z teleskopu Hubble'a. NASA).



HST Observations of Protoplanetary disks

Mgławica w Orionie.



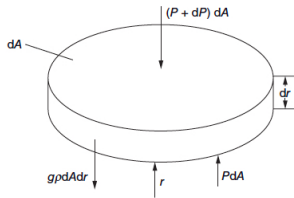
Visible - WFC3 - 2015



Infrared - WFC3 - 2015

(NASA, HST)

STABILNOŚĆ GWIAZD



Symetria sferyczna

Ciśnienie, gęstość, temperatura, *etc.*, zależą od odległości od centrum gwiazdy r .

Warunek równowagi elementu masy (rysunek):

$$P(r) dA - [P(r) + dP] dA - \rho(r) dA dr g(r) = 0$$

gdzie

$P(r)$ – ciśnienie

$\rho(r)$ – gęstość

$g(r)$ – przyspieszenie grawitacyjne

Stąd

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Wstawiając

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

mamy

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

gdzie $M(r)$ jest masą zawartą w sferze o promieniu r .

Ostatnie równanie opisuje hydrostatyczną równowagę w gwiazdach.

Ogólniej, równanie ruchu masy $dm = \rho(r)dV$ gwiazdy

$$dm \frac{d^2 r}{dt^2} = -g(r)dm - AdP = -g(r)dm - \frac{dP}{dr} Adr$$

Dzieląc przez $dm = \rho dV = \rho A dr$, otrzymamy

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g(r) - \frac{1}{\rho(r)} \frac{dP}{dr}$$

Jeśli więc element masy nie porusza się to ciśnienie musi wzrastać w kierunku do centrum gwiazdy (tzn. $dP/dr < 0$).

Jeśli $P = 0$ wszędzie, to element masy porusza się w kierunku centrum swobodnie. Rozważmy energię. Energia potencjalna zamienia się w kinetyczną. Startując z r_0 , z masą m_0 wewnątrz sfery, energia kinetyczna $K = 0$, potencjalna $U = -Gm_0^2/r_0$. $K + U$ jest stałą, $K = m_0 v^2/2 = m_0 (dr/dt)^2/2$. Więc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{Gm_0}{r} = -\frac{Gm_0}{r_0}$$

Czas spadku jest więc

$$t = \int_{r_0}^0 dr \frac{dt}{dr} = - \int_{r_0}^0 dr \left[\frac{2Gm_0}{r} - \frac{GM_0}{r_0} \right]^{-1/2}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r_0^3}{2Gm_0} \right)^{1/2}$$

Zadanie. Wykonać obliczenia.

Zadanie. Policzyc czas swobodnego spadku dla masy $m_0 = M_{\odot}$. $\approx 1/2$ g.

Biorąc $\rho = m_0/(4\pi r_0^3/3)$ otrzymamy:

$$t = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho}}$$

TWIERDZENIE O WIRIALE

TWIERDZENIE O WIRIALE

Mnożymy równanie równowagi hydrostatycznej przez objętość V kuli o promieniu r

$$\frac{4}{3}\pi r^3 dP = -\frac{4}{3}\pi r \rho(r) GM(r) dr$$

Masa zawarta w powłoce sferycznej o promieniu r i grubości dr :

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Mamy więc

$$V dP = -\frac{GM(r)}{3r} dM$$

Całkujemy po objętości całej gwiazdy

$$\int_{P_{centr}}^0 V dP = PV \Big|_{centr}^{brzeg} - \int_0^{V_*} P dV = - \int_0^{V_*} P dV$$

Czyli

$$\int_0^{V_*} P dV = \frac{1}{3} \int_0^{M_*} \frac{GM(r)}{r} dM$$

Całka po prawej stronie to *minus energia potencjalna* E_{graw} , więc

$$3 \int_0^{V_*} P dV = -E_{graw} .$$

TWIERDZENIE O WIRIALE

Z zasady ekwipartycji energii wynika, że energia kinetyczna N cząstek gazu w temperaturze T i objętości V jest równa

$$\epsilon = \frac{N}{V} \frac{3}{2} kT$$

Dla gazu doskonałego

$$P = \frac{NkT}{V} = \frac{2}{3}\epsilon$$

a więc

$$3 \int_0^{V_*} P dV = 2 \int_0^{V_*} \epsilon dV = 2U = -E_{\text{grav}}$$

gdzie $U = \int_0^{V_*} \epsilon dV$ jest energią termiczną gwiazdy. Wobec tego

$$U = -\frac{E_{\text{grav}}}{2} \quad \text{lub} \quad 2U + E_{\text{grav}} = 0.$$

W procesie grawitacyjnego zapadania się gwiazdy połowa energii grawitacyjnej zamienia się w promieniowanie elektromagnetyczne i jest unoszona na zewnątrz gwiazdy, druga połowa jest zamieniana na energię termiczną. Rośnie temperatura...

1. Wyznaczyć potencjalną energię grawitacyjną gwiazdy o masie M_* , i promieniu R_* zakładając, że gęstość gwiazdy jest stała.

(Odp. $E_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} \frac{GM_*^2}{R_*}$)

2. Stosując twierdzenie o wiriale oszacować wewnętrzną temperaturę $\bar{T}$ gwiazdy o masie M_* i promieniu R_* . Obliczyć $\bar{T}$ dla Słońca.

(Odp. $\bar{T} = \frac{1}{6} \frac{Gm_H M_*}{kR_*}$. $\bar{T}_{\odot} = 4 \times 10^6 \text{K}$)

3. Korzystając z prawa równowagi hydrostatycznej oszacować centralne ciśnienie w gwieździe o masie M_* i promieniu R_* .

(Odp. $P_c = \frac{GM_*^2}{4\pi R_*^4}$. $P_{c,\odot} \approx 10^{15} \text{dyn cm}^{-2} = 10^{14} \text{Nm}^{-2}$)

KRYTERIUM JEANS'A

James Hopwood Jeans, 1877-1946.

Jakie warunki fizyczne powodują zapadanie się materii międzygwiazdowej?

Z równania równowagi hydrostatycznej wynika, że

$$2U + E_{\text{graw}} = 0$$

Jeśli energia grawitacji *pokona* energię termiczną, tzn. $-E_{\text{graw}} > 2U$ wówczas materia zacznie się zapadać.

Przybliżymy E_{graw} wartością obliczoną dla stałej gęstości.

$$E_{\text{graw}} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

a energię termiczną przez

$$U = \frac{3}{2} NkT$$

(obłok materii o stałej gęstości i temperaturze)

Liczbę cząstek obłoku N obliczymy używając średniej masy molekularnej μ

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

Z warunku $-E_{\text{grav}} > 2U$ mamy

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} > \frac{3MkT}{\mu m_H}$$

Ponieważ $R = (M/(4/3\pi\rho))^{1/3}$ to stąd

$$M > \left(\frac{5kT}{\mu m_H G} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} = M_J$$

gdzie zdefiniowaliśmy tzw. masę Jeans'a M_J .

Jeśli więc masa obłoku przewyższa masę Jeansa wówczas nastąpić może zapadanie się obłoku materii międzygwiazdowej.



Kryterium masy Jeansa jest równoważne kryterium gęstości

$$\rho > \rho_J = \left(\frac{5kT}{\mu m_H G} \right)^3 \left(\frac{3}{4\pi M^2} \right)$$

oraz kryterium promienia

$$R > R_J =$$

1. Obliczyć masę Jeans'a dla średniego obłoku molekularnego o temperaturze rzędu 10K i gęstości molekuł 1000 H₂ na cm³.

(Odp. $\rho = 2m_H \times 1000$ $M_J \approx 5 \times 10^{34} \text{g} \approx 20M_\odot$)

2. Obliczyć gęstość Jeans'a dla obłoku HI (wodór atomowy). Obłoki tego rodzaju mają zazwyczaj masy mniejsze niż 100 $M_\odot$, temperaturę rzędu 100K i gęstość 1000 H atomów na cm³.

(Odp. $\rho_J \approx 1 \times 10^{-18} \text{g cm}^{-3}$. Ponieważ gęstość Jeansa jest większa niż typowa gęstość obłoku HI to obłoki tego typu są stabilne względem zapadania się.)

Definicja μ

$$n = \frac{\rho}{\mu m_H}$$

gdzie n jest liczbą cząstek w jednostce objętości (gęstość liczbowa cząstek),
 ρ jest zwykłą gęstością, a m_H jest masą atomu wodoru.

Ponieważ

$$\rho = \sum n_i m_i$$

to

$$\mu = \frac{1}{nm_h} \sum n_i m_i$$

Przykład. Średnia masa molekularna zjonizowanego wodoru HII:

$$\mu = \frac{m_p + m_e}{2m_H} \approx \frac{1}{2}$$