

Równania struktury gwiazd

ab

6 czerwca 2019

- Wstęp
- Równowaga hydrostatyczna
- Równanie ciągłości masy
- Transport energii promieniowania
- Prawo zachowanie energii
- Przybliżenia (skala wielkości)

Wstęp

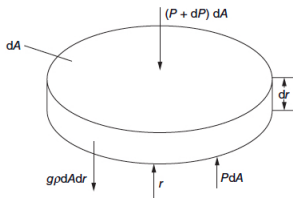
Materia gwiazd w *równowadze hydrostatycznej* spełnia szereg równań opisujących ich stan, proces transportu energii z ich wnętrza i opisujących podstawowe prawa zachowania.

Równania struktury zależą od równań stanu, składu chemicznego, od tempa produkcji energii, od nieprzezyczystości materii itd.

Cele: Równania struktury. Równania stanu. Tempo produkcji energii.

Równowaga hydrostatyczna

Równowaga hydrostatyczna i



Symetria sferyczna

Ciśnienie, gęstość, temperatura, *etc.*, zależą od odległości od centrum gwiazdy r .

Warunek równowagi elementu masy (rysunek):

$$P(r) dA - [P(r) + dP] dA - \rho(r) dA dr g(r) = 0$$

gdzie

$P(r)$ – ciśnienie

$\rho(r)$ – gęstość

$g(r)$ – przyspieszenie grawitacyjne

Stąd

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Wstawiając

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

mamy

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \quad (1)$$

gdzie $M(r)$ jest masą zawartą w sferze o promieniu r .

Ostatnie równanie opisuje hydrostatyczną równowagę w gwiazdach.

Ciągłość masy

W równowadze hydrostatycznej masa $M(r)$ i gęstość $\rho(r)$ są ze sobą związane

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Stąd

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2)$$

Równanie to nosi nazwę **równania ciągłości masy** lub zachowania masy.

Transport energii w gwiazdach

Procesy transportu energii z wnętrza gwiazd:

- **promieniowanie**
- **konwekcja**; w pewnych warunkach
- **przewodnictwo** (białe karły, gwiazdy neutronowe).

Normalne gwiazdy ($\sim$ gaz)

Fotony są rozpraszane, pochłaniane przez materię gwiazdy, ponownie emitowane. Procesy te zależą od tzw. przekroju czynnego σ

liczba oddziaływań fotonu z *tarczami* cząstek $= n \sigma dx$

gdzie n jest gęstością cząstek, a dx drogą przebytą przez foton. Jeśli lewa strona tej równości jest jedyneką to dx nosi nazwę drogi swobodnej l , czyli

$$l = \frac{1}{n\sigma}$$

W ogólnym przypadku, dla różnych cząstek materii

$$I = \frac{1}{\sum n_i \sigma_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\rho \kappa}$$

Wielkość κ jest **nieprzeźroczystością** materii (opacity).

Jednym z procesów, od których zależy κ jest rozpraszanie fotonów na elektronach, tzw. **rozpraszanie thomsonowskie**. Jego przekrój czynny

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right) = 6,7 \times 10^{-25} \text{cm}^2$$

nie zależy od temperatury i energii fotonu. Dla cząstek o masach $m \gg m_e$ przekrój σ jest znikomo mały w porównaniu z przekrojem dla elektronów.

Przykład.

Przyjmując, że gaz słoneczny jest zjonizowanym wodorem mamy

$$n_e \approx \frac{\rho}{m_H}$$

Stąd droga swobodna fotonu wynosi (Obliczyć.):

$$l = \frac{1}{n_e \sigma} = \frac{m_H}{\rho \sigma_T} \approx 2\text{cm}$$

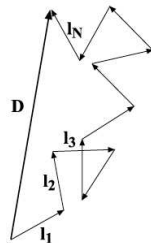
W rzeczywistości (nie tylko elektrony) $l \approx 1\text{mm} = 0.1\text{cm}$.

Błądzenie przypadkowe i

Foton porusza się w materii chaotycznie – przypadkowe kierunki emisji/rozpraszania - błądzenie przypadkowe (random walk). Przesunięcie fotonu po N oddziaływaniach:

$$\vec{D} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots + \vec{l}_N$$

$$\vec{D}^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_N^2 + 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_3 + \dots) \quad (*)$$



Wartość średnia kwadratu przesunięcia (drugi człon w równaniu (*) znika):

$$\langle D^2 \rangle = Nl^2$$

Odległość liniowa przebyta przez foton po N zderzeniach

$$D = \langle D^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{N}l$$

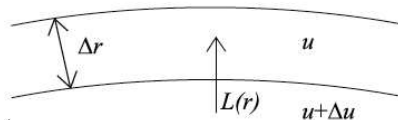
Przykład.

Ile czasu potrzebuje foton by wydostać się z centrum Słońca na jego powierzchnię?

Mamy $N = r_{\odot}^2 / l^2$ – liczba kroków. Każdy krok średnio wymaga czasu l/c , a więc (Obliczyć!)

$$\tau = \frac{l}{c} \frac{r_{\odot}^2}{l^2} \approx 52000 \text{ lat}$$

Jeśli reakcje jądrowe w Słońcu ustaną to fakt ten odnotujemy dopiero po 50000 lat ...



Wypadkowy strumień energii promienistej gwiazdy – moc (jasność) $L(r)$.

Różnica energii w warstwach r , $r + \Delta r$ wynosi $4\pi\Delta r\Delta u$ (u – gęstość energii).

Czas by fotony przebyły drogę Δr : $(\Delta r)^2/lc$. Stąd

$$L(r) \approx -\frac{4\pi r^2 \Delta r \Delta u}{(\Delta r)^2/lc} = -4\pi r^2 lc \frac{\Delta u}{\Delta r}$$

Dokładny rachunek daje dodatkowy czynnik $1/3$. Mamy więc

$$\frac{L(r)}{4\pi r^2} = -\frac{cl}{3} \frac{du}{dr} \quad (**)$$

– równanie dyfuzji; opisuje transport energii na powierzchnię gwiazdy.

Ponieważ u jest bliskie gęstości energii ciała doskonale czarnego to

$$u \approx aT^4$$

Stąd

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dT} \frac{dT}{dr} = 4\pi a T^3 \frac{dT}{dr}$$

Wstawiając to do równania (**) i kładąc $l = (\kappa\rho)^{-1}$ otrzymamy

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 4acT^3(r)} \quad (3)$$

Zachowanie energii

Energia produkowana w gwiazdach pochodzi z reakcji jądrowych – fuzja. Produkowaną gęstość mocy oznaczmy przez $\epsilon(r)$. Zasada zachowania energii w powłoce o grubości dr w odległości r od centrum

$$dL(r) = \epsilon(r) dm = \epsilon(r) \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

lub

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) \quad (4)$$

Równania $??$, $??$, $??$, $??$ są równaniami struktury gwiazdy.

Podsumowanie

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 4acT^3(r)}$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$$

Warunki początkowe

$$M(r=0) = 0, \quad L(r=0) = 0, \quad P(r=r_*) = 0, \quad M(r=r_*) = M_*.$$

Dodatkowo, należy określić zależności

$$P = P(\rho, T, \text{skład}), \quad \rho = \rho(\dots), \quad \epsilon = \epsilon(\dots)$$

Równanie stanu

Rozpowszechnienie wodoru, helu i pierwiastków cięższych:

$$X = \frac{\rho_H}{\rho}, \quad Y = \frac{\rho_{He}}{\rho}, \quad Z_A = \frac{\rho_{metale}}{\rho}$$

Dla większości normalnych gwiazd działa przybliżenie nierelatywistycznego gazu doskonałego

$$P_g = nkT = \frac{\rho}{\bar{m}} kT$$

Ponieważ $n_H = X\rho/m_H$, $n_{He} = Y\rho/4m_H$, $n_A = Z_A\rho/Am_H$, to

$$n \approx 2n_H + 3n_{He} + \sum \frac{A}{2} n_A = \frac{\rho}{m_H} (2X + \frac{3}{4}Y + 12Z)$$

(dla cięższych pierwiastków $Z + 1 \approx A/2$. Ponieważ $X + Y + Z = 1$ to

$$n = \frac{\rho}{2m_H} \left(3X + \frac{Y}{2} + 1 \right)$$

Przy całkowitej jonizacji

$$\frac{\bar{m}}{m_H} = \frac{\rho}{nm_H} \frac{2}{1 + 3X + 0,5Y}$$

Słońce: $X = 0,71$, $Y = 0,27$, $Z = 0,02$ i $\bar{m}/m_H = 0,61$; a w centrum gdzie wyczerpało się $\sim 50\%$ wodoru $X = 0,35$, $Y = 0,64$, $Z = 0,02$ i $\bar{m}/m_H = 0,61$

Oprócz kinetycznego ciśnienia gazu istnieje **ciśnienie promieniowania** (patrz Dodatek):

$$P_{rad} = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}aT^4$$

Całkowite ciśnienie jest więc równe

$$P = P_g + P_{rad} = \frac{\rho k T}{\bar{m}} + \frac{1}{3}aT^4.$$

$a = 4\sigma/c = 7,6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3}\text{K}^{-4}$ jest stałą promieniowania.

(Inne równanie stanu dla białych karłów i gwiazd neutronowych.)

Nieprzeźroczystość (opacity)

Nieprzeźroczystość

W gwiazdach *normalnych* nieprzeźroczystość jest w głównej mierze związana z rozpraszaniem fotonów na elektronach. Liczba elektronów w zjonizowanym gazie

$$n_e = n_H + 2n_{He} + \sum \frac{A}{2} n_A = \frac{\rho}{2m_H} (1 + X)$$
$$\kappa = \frac{n_e \sigma_T}{\rho} = \frac{\sigma_T}{2m_H} (1 + X) = (1 + X) \times 0,2 \text{ cm}^2/\text{g}$$

W obszarach o niższych temperaturach i niepełnej jonizacji nieprzeźroczystość jest wynikiem procesów absorpcji/emisji typu

- bound-bound (bb) – przejścia między stanami związanymi
- bound-free (bf) – jonizacja ($\leftarrow \rightarrow$)
- free-free (ff) – **bremsstrahlung**, ...

Uśrednienie po wszystkich długościach fal daje zależność (Kramers)

$$\kappa_{bf,ff} \sim \frac{\rho}{T^{3,5}}$$

Konwekcja

Konwekcja występuje w obszarach o niskiej temperaturze, w których istnieją atomy i molekuły (również w obszarach centralnych gwiazd bardzo masywnych) gdzie spełniony jest warunek

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T(r)}{P(r)} \left| \frac{dP}{dr} \right|$$

Tutaj γ jest *wykładnikiem adiabatycznym* w równaniu stanu gazu $P \sim \rho^\gamma$.
Wzrasta liczba stopni swobody, rośnie γ , pojawia się konwekcja.

Słońce: 28% zewnętrznego promienia.

W obszarach konwekcyjnych równanie transportu (??) energii należy zamienić na

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T(r)}{P(r)} \frac{dP}{dr}$$

Przybliżenia – relacje skalowania dla gwiazd ciągu głównego

Założmy, że rozwiązania równań struktury są postaci $P(r) \sim r^\beta$, $M(r) \sim r^\gamma$ itd. Wówczas rozwiązania pierwszych trzech równań są

Równanie struktury	→	przybliżenie	Numer
$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}$	→	$P \sim \frac{M\rho}{r}$	(A)
$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$	→	$M \sim r^3 \rho$	(B)
$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 4acT^3(r)}$	→	$L \sim \frac{T^4 r}{\kappa \rho}$	(C)

Otrzymane równania pozwalają zrozumieć obserwowane zależności typu $L \sim M^\alpha$ lub $L \sim T^8$ dla gwiazd ciągu głównego (CG) na diagramie H-R.

$$P \sim \frac{M\rho}{r}, \quad M \sim r^3 \rho, \quad L \sim \frac{T^4 r}{\kappa \rho}$$

Dla gwiazd o średniej masie ciśnienie jest głównie kinetycznym ciśnieniem gazu, a nieprzeźroczystość jest wynikiem rozpraszania fotonów na elektronach, czyli

$$P \sim \rho T, \quad \kappa = \text{const}$$

Porównanie z $P \sim M\rho/r$ daje

$$T \sim M/r$$

Z równania dla L i przy wykorzystaniu wyrażenia dla M mamy

$$L \sim M^3$$

– zgodność z obserwacją dla gwiazd o $M > M_{\odot}$.

Ponieważ temperatura gwiazd ciągu głównego jest *prawie stała* to równanie $T \sim M/r$ prowadzi do wniosku, że

$$r \sim M$$

Dokładne modele potwierdzają, że T zmienia się o czynnik 4 dla zakresu mas ~ 100 na CG (słabo). Wstawiając to do (B) otrzymujemy

$$\rho \sim M^{-2}$$

– gwiazdy mniej masywne są *gęstsze*, bardziej masywne *rzadsze*.

W przypadku gwiazd o małej masie (a więc o dużej gęstości) nieprzeźroczystość jest wynikiem rozpraszania typu *bound-free* oraz *free-free*, czyli

$$\kappa \sim \frac{\rho}{T^{3,5}}$$

Ponieważ $T \sim \text{const.}$, $r \sim M$ i $\rho \sim M^{-2}$ to $\kappa \sim \rho \sim M^{-2}$ i dostajemy

$$L \sim \frac{T^4 r}{\kappa \rho} \sim \frac{r}{\rho^2} \sim M^5$$

– zgodne z obserwacją dla gwiazd o małych masach.

W gwiazdach o dużej masie, mała gęstość powoduje, że ciśnienie jest głównie ciśnieniem promieniowania

$$P \sim T^4$$

a nieprzeźroczystość jest wynikiem rozpraszania na elektronach, $\kappa = \text{const.}$
Porównując z $P \sim M\rho/r$, i wstawiając T^4 w przybliżeniu dla L , otrzymamy

$$L \sim M$$

– obserwowane zmniejszenie jasności dla gwiazd masywnych.

Dalej, ponieważ $L \sim M^5$ i $L \sim M^3$ odpowiednio dla gwiazd małej i dużej masy to, biorąc $L \sim M^4$, i korzystając z zależności $r \sim M$ dostajemy

$$\sigma T^4 = \frac{L}{4\pi r_*^3} \sim \frac{M^4}{M^2} \sim M^2 \sim L^{1/2}$$

a więc,

$$L \sim T^8$$

– w zgodzie z obserwacjami.

Problemy

Liczba protonów w Słońcu.

$$n_H == \frac{2 \times 10^{33} \text{g}}{1,7 \times 10^{-24} \text{g}} = 10^{57}$$

Czynnik Maxwella-Boltzmanna dla typowych gwiazd

$$e^{-E/kT} \sim e^{-1000} \sim 10^{-434}$$

Brak w Słońcu cząstek, które zgodnie z rozkładem M-B mogą reagować tworząc He.

Potrzebny inny mechanizm reakcji. Tunelowanie.

Dodatki

Natężenie promieniowania Plancka

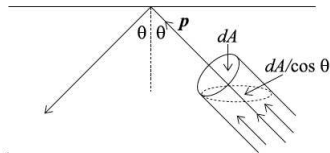
$$B = \frac{c}{4\pi} u$$

gdzie u jest gęstością energii.

Ciśnienie na ścianki radiatora

$$P = \frac{F}{A} = \frac{dp/dt}{A} = \int_{\pi/2}^{\pi} B \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3c} B = \frac{1}{3} u$$

Równanie to jest słuszna dla cząstek bezmasowych.



Reakcje fuzji. Najważniejsze: **cykl p-p**.



Skala czasowa $\sim 10^{10}$ lat (oddziaływania słabe).

Pozytron prawie natychmiast anihiluje z elektronem promieniując 2 kwanty γ o energiach 0,511 MeV. Neutrino ucieka, unosząc średnio 0,26 MeV. Po około 1s deutron reaguje z protonem, tworząc ^3He :



W skali 300000 lat zachodzi kolejna reakcja



Dla utworzenia ${}^4\text{He}$ potrzebne są dwie reakcje $p + p$ i $p + d$. Wydzielona energia jest więc równa

$$(4 \times 0,511 + 2 \times 0,425 + 2 \times 5,49 + 12,86) \text{ MeV} = 26,73 \text{ MeV}$$

Po odjęciu energii anihilacji istniejących pierwotnie 2 elektronów $= 2 \times 0,511 \text{ MeV}$ otrzymujemy energię równą różnicy mas 4 protonów i jądra ${}^4\text{He}$:

$$[m(4p) - m({}^4\text{He})]c^2 = 25,71 \text{ MeV} = 0,7\%m(4p)c^2$$

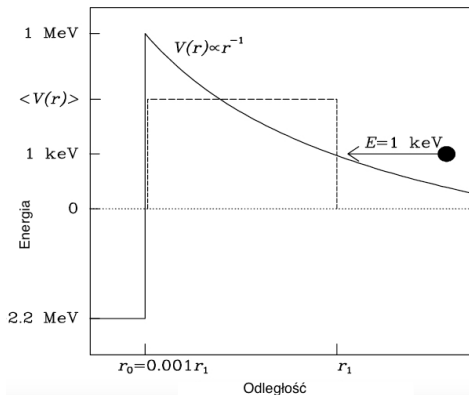
Wydajność cyklu p-p jest więc równa 0,7%.

Słońce: Czas wypromieniowania 10% masy w cyklu p-p

$$t = \frac{0,1 \times 0,007 \times M_{\odot} c^2}{L_{\odot}} \approx 10^{10} \text{ lat}$$

(Obliczyć.) Wniosek: Cykl p-p wystarcza na ~ 10 miliardów lat.

Tunelowanie



Tunelowanie bariery kulombowskiej w reakcji $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Średnia energia protonów $\sim 1 \text{ keV}$ odpowiada temperaturze $\sim 10^7 \text{ K}$ (centralny obszar Słońca). Energia stanu związanego d jest równa $\sim -2.2 \text{ MeV}$. Bariera kulombowska przybliżona barierą prostokątną.

Równanie Schroedingera

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi = [V(r) - E] \psi, \quad \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

$$V(r) = \frac{Z_A Z_B e^2}{r}$$

Przybliżając barierę kulombowską przez barierę prostokątną:

$$\langle V(r) \rangle = \frac{\int_{r_0}^{r_1} 4\pi r^2 V(r) dr}{\int_{r_0}^{r_1} 4\pi r^2 dr}$$

otrzymamy przybliżone równanie:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 r \psi}{dr^2} \approx \frac{E}{2} \psi$$

Rozwiązanie:

$$\psi = A \frac{e^{\beta r}}{r}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu E}}{\hbar}$$

Licząc dokładnie (Zadanie), otrzymamy to samo wyrażenie dla ψ z czynnikiem $\pi/\sqrt{2}$ w exponencie.

Prawdopodobieństwo tunelowania jest więc równe:

$$g(E) \approx \frac{|\psi(r_0)|^2 r_0^2}{|\psi(r_1)|^2 r_1^2} = \frac{e^{2\beta r_0}}{e^{2\beta r_1}} \approx e^{-2\beta r_1} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{\mu E}}{\hbar} \frac{Z_A Z_B e^2}{E}\right)$$

Kładąc

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 2\mu c^2$$

otrzymamy

$$g(E) = e^{\sqrt{E_G/E}}$$

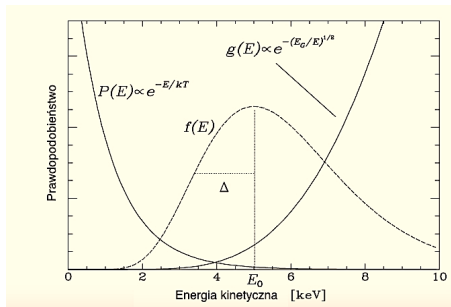
$g(E)$ nosi nazwę czynnika Gamowa. Dla 2 protonów

$$E_G = \left(\pi \frac{1}{137 \times 1 \times 1}\right)^2 2 \frac{1}{2} m_p c^2 \approx 500 \text{ keV}$$

Słońce: $g(E) \sim e^{-22} \sim 10^{-10}$ (Porównaj z 10^{-434} !!!)

Szybkość reakcji

Prawdopodobieństwo reakcji i



Rys. (Nie ma proporcji...) $kT = 1\text{keV}$; $g(E)$ – 2 protony; $f(E) \sim$ funkcja Gaussa.

Prawdopodobieństwo procesu: $f(E) \sim P(E) \times g(E)$

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 2\mu c^2$$

$$\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137, g(E) = e^{-\sqrt{E_G/E}}$$

2 protony: $E_G \approx 500\text{keV}$.

Słońce: $E \sim 1\text{keV} \rightarrow g(E) \sim e^{-22} \sim 10^{-10}$.

Przybliżona gęstość mocy w funkcji temperatury, składu, gęstości:

$$\epsilon = \frac{2^{5/3}\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\rho X_A X_B}{m_H^2 A_A A_B \sqrt{\mu}} Q S_0 \frac{E_G^{1/6}}{(kT)^{2/3}} \exp \left[-3 \left(\frac{E_G}{4kT} \right)^{1/3} \right] \quad (5)$$

Wyrażenie (??) pozwala oszacować gęstość mocy cyklu p-p.

Obliczyć jasność L Słońca. Założenia: $S_0 \sim 4 \times 10^{-46} \text{cm}^2 \text{keV}$, $\rho = 150 \text{g/cm}^3$, $X_A = X_B = X = 0,5$ (centrum Słońca), $Q = 26,2 \text{MeV}$, $E_G = 500 \text{keV}$, $\mu = m_p/2$, $A_A = A_B = 1$. Ponieważ rozważamy identyczne cząstki (protony), więc wynik dzielimy przez 2 by uniknąć podwójnego sumowania. Powinniśmy otrzymać

$$\epsilon = 10 \text{ erg s}^{-1} \text{ g}^{-1}$$

Mnożąc przez masę rdzenia Słońca, np. przez $0,2 M_\odot$ otrzymamy jasność $L \sim 4 \times 10^{33} \text{ erg/s}$. (Pomiary dają: $3,8 \times 10^{33} \text{ erg/s}$).

1 electronvolt

Energia 1 eV: $E = 1,602192 \times 10^{-19} \text{ J}$

Długość fali: $\lambda = 12398,54 \times 10^{-8} \text{ cm}$

Liczba falowa: $k = 8066,02/\text{cm}$

Częstość: $\nu = 2,417965 \times 10^{14}/\text{s}$

Temperatura: $T = 11604,8 \text{ K}$



Dan Maoz. *Astrophysics in a Nutshell [AKA Basic Astrophysics]*. Princeton University Press, 2007.



S. Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover, 1939.