

PRAWO PLANCKA

ab

16 maja 2019

- Wstęp
- Prawo Plancka
- Gęstość energii
- Filtry U, B, V

PRAWO PLANCKA

GĘSTOŚĆ ENERGII

Ciało doskonale czarne.

Gęstość energii na przedział częstości ν

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Ilość energii wysłana w danym kierunku – natężenie promieniowania

$$I_\nu = c \frac{du_\nu}{d\Omega}$$

gdzie Ω - kąt bryłowy. Ponieważ promieniowanie jest izotropowe to

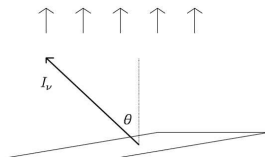
$$\frac{du_\nu}{d\Omega} = \frac{u_\nu}{4\pi}$$

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi} u_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = B_\nu$$

(B – blackbody)

Całkując $I_\nu \cos \theta$ po kącie bryłowym otrzymamy strumień energii dla częstości ν

$$f_\nu = \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_\nu \cos \theta d\Omega = \pi I_\nu = \frac{c}{4} u_\nu$$



Jasność gwiazdy o promieniu r_* przy częstości ν jest

$$L_\nu = f_\nu(r_*) \times 4\pi r_*^2$$

Całkując po częstości otrzymamy **pełne** wielkości B , I , f , L , u , np.

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu$$

Prawo Stefana-Boltzmannna łączy temperaturę z gęstością energii u

$$u = \sigma T^4$$

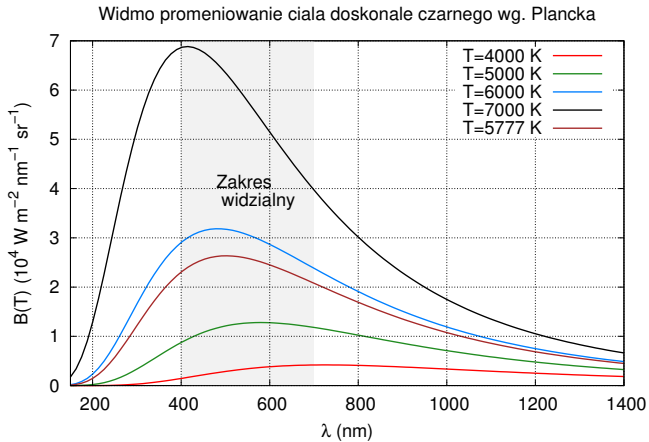
i

$$f = \frac{c}{4} a T^4$$

gdzie

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} = 7,6 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

$$\sigma = \frac{c}{4} a = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$



$$B_{\lambda} = B_{\nu} \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{2hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Maksimum promieniowania: $dB_{\nu}/d\nu = 0$ lub $dB_{\lambda}/d\lambda = 0$

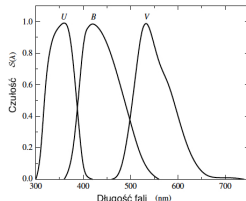
$$\lambda_{\max} T = 0,29 \text{ cm K}$$

$$h\nu_{\max} = 2,8kT$$

Zadanie. Otrzymać powyższe zależności (problem numeryczny).

WSKAŹNIKI BARWY U, B, V

- U centrowany na 365 nm, szerokość 68 nm (UV)
- B centrowany na 440 nm, szerokość 98 nm (niebieski)
- V centrowany na 550 nm, szerokość 89 nm (żółty; widzialny)



Kolor określają różnice U-B i B-V (wskaźniki koloru).

$$U - B = M_U - M_B, \quad B - V = M_B - M_V$$

Wielkość gwiazdowa rośnie wraz z jasnością. Stąd gwiazda z małym wskaźnikiem $B - V$ jest bardziej niebieska niż gwiazda o większym wskaźniku $B - V$. Indeksy barwy nie zależą od odległości. (Dlaczego?)

Syriusz jest najjaśniejszą gwiazdą na niebie. Wielkości widome $U = -1,47$, $B = -1,43$, $V = -1,44$. Stąd $U - B = -0,04$, $B - V = 0,01$. Syriusz jest jaśniejszy w zakresie ultrafioletu tak, jak powinno być dla gwiazdy o $T = 9970$. Dla tej temperatury

$$\lambda_{\max} = \frac{0,0029\text{m K}}{9970\text{K}} = 291\text{nm}$$

$$\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

Funkcja ζ Riemanna

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$