

1 Zredukowany, kołowy problem 3 ciał

Rozpatrujemy układ 3 mas m_1, m_2 i m gdzie masa m jest zanedbywalnie mała w porównaniu z pozostałymi. Można więc uważać, że masy 1 i 2 poruszają się po orbitach kołowych. Zakładamy też, że masa m porusza się w płaszczyźnie ruchu obu mas $m_{1,2}$.

W układzie inercyjnym (x', y', z') równania ruchu masy m są

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2|^3}$$

Wygodnie jest przejść do układu ruchomego (x, y, z) , związanego z parą mas 1 i 2, umieszczając początek układu w centrum ich masy. Mamy związek

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

gdzie drugi wyraz po prawej stronie jest przyspieszeniem Coriolisa, a trzeci wyraz jest przyspieszeniem dośrodkowym. Wektor $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ma składowe $(-\omega y, \omega x, 0)$, a wektor $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ składowe $(-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0)$. Ponieważ

$$\omega^2 x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} \right)$$

i analogicznie dla $\omega^2 y$, więc równania ruchu masy m w układzie nieinercyjnym można zapisać w postaci:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) = \nabla \left[\frac{Gm_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \frac{r}{2} \right]$$

Mnożąc skalarnie przez $\dot{\mathbf{r}}$, otrzymamy

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left[\frac{Gm_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \frac{r}{2} \right]$$

Po scałkowaniu dostaniemy

$$\frac{v^2}{2} = \frac{Gm_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C$$

gdzie C jest stałą, którą można wyznaczyć z warunków początkowych, tj. położenia i prędkości ciała m w chwili $t = 0$. Jest to *tzw.* całka Jacobiego. Ponieważ $v^2 > 0$, więc powyższy związek określa granice obszaru, w którym może znajdować się masa m . Powierzchnie $v = 0$ (oznaczymy je przez $\Phi(x, y, z)$) noszą nazwę powierzchni zerowej prędkości lub powierzchni Hilla (1838–1914).

Punkty wyznaczone równością $d\Phi/dt = 0$ są zwane punktami libracji lub punktami Lagrange'a (1772) L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 .

1.1 Obserwacje

Planetoidy z grupy Trojańczyków, L_4 (Anchizes, Agenor, Helenos, Anchizes, Trojlus, Eneas, Priam *Patrokles*,) oraz Greków L_5 (Agamemnon, Achilles, Ajaks, Nestor, Menelaos, Odyseusz, Diomedes, Nestor, *Hektor*) w układzie Słońce – Jowisz.

W układzie Ziemia – Księżyc: Pyłowe księżycy Kordylewskiego (Kazimierz Kordylewski odkrył je w 1961 r)

1.2 Problem 1

Znaleźć położenia punktów L_i dla układu Słońce-Jowisz. $\alpha = m_1/(m_1 + m_2)$.

1.3 Problem 2

Narysować dozwolone obszary ruchu dla różnych wartości C i α .

1.4 Problem 3

Przejsć do wielkości bezwymiarowych (jednostka długości, jednostka czasu). Przyjąć $\omega = 1$. Rozwiązać powyższy problem numerycznie całkując równania ruchu metodą Rungego-Kutty 4-go rzędu ze stałym i zmiennym (adaptowanym) krokiem czasowym.

1. $\alpha = 0.012277471$,
 $t = 0 : x(0) = 0.994, x'(0) = 0, y(0) = 0, y'(0) = -2.00158510637908252240537862224$,
 $T = 17.0652165601579625588917206249$
2. $\alpha = 0.012277471$,
 $t = 0 : x(0) = .87978, x'(0) = 0.0$
 $y(0) = 0, y'(0) = -0.3797$,
 $T = 19.14045706162071$

1.5 Problem 4

Narysować trajektorie dla wybranych przypadków rozwiązań Zadania 4.

1.6 Problem 5

Płaszczyzna Poincare'go ...

1.7 Problem numeryczny

Napisać program przeliczający h, m, s na $^\circ, ', ''$, radiany.

1.8 Problem 6

Podstawowe dane o układzie słonecznym. Tabela.

2 Odp. 3

W jednostkach promienia R i czasu $1/\omega$ równania ruchu masy m są

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -(1 - \alpha) \frac{x + \alpha}{d_1^3} - \alpha \frac{x - 1 + \alpha}{d_2^3}$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -(1 - \alpha) \frac{y + \alpha}{d_1^3} - \alpha \frac{y - 1 + \alpha}{d_2^3}$$

gdzie x i y są w jednostkach $R = |r_1 - r_2|$, a τ jest w jednostkach $1/\omega$. $\alpha = m_2/(m_1 + m_2)$.

$$d_1 = ((u + \alpha)^2 + y^2)^{1/2}, \quad d_2 = ((u - 1 + \alpha)^2 + y^2)^{1/2}$$